

УДК 621.3

ИНДУКТИВНОСТЬ КРУГОВЫХ КОНТУРОВ С ПРОИЗВОЛЬНОЙ ОРИЕНТАЦИЕЙ ОСЕЙ

© 2020 г. Г. Н. Цицикян^{1, *}, А. И. Сенченко^{1, **}

¹Филиал “ЦНИИ СЭТ” “ФГУП Крыловский государственный научный центр”,
Санкт-Петербург, Россия

*e-mail: george.20021940@mail.ru

**e-mail: spb-1205@inbox.ru

Поступила в редакцию 26.12.2019 г.

После доработки 13.01.2020 г.

Принята к публикации 14.01.2020 г.

Даны выражения для коэффициентов взаимной индукции и их градиентов посредством адаптации исходных выражений, содержащих сферические функции Лежандра и производные от них для трех конфигураций круговых контуров с пересекающимися осями, с параллельными осями и с осями, пересекающимися в произвольной точке, что дает возможность получения непосредственных оценок и численных результатов.

Ключевые слова: взаимная индуктивность, круговые контуры, электродинамические силы

DOI: 10.31857/S0002331020010112

В известных руководствах по расчету коэффициентов взаимной индукции круговых контуров с различным расположением от концентрических круговых контуров с пересекающимися осями до контуров с параллельными осями, записаны выражения для коэффициентов взаимной индукции [1, 2] в виде рядов, содержащих полиномы Лежандра и их производные. Оперирование такими рядами без подробных таблиц значений полиномов Лежандра и их производных представляется неудобным и возникает потребность в их адаптации с подстановкой развернутых выражений для полиномов Лежандра и их производных, известных по справочным руководствам и пособиям, например, в [3, 4]. В этом будет состоять одна из задач, решаемая в данной статье. В качестве другой задачи рассматривается возможность такой же адаптации и для производных от коэффициентов взаимоиндукции круговых контуров с целью оценки электродинамических взаимодействий, которые могут быть использованы в интересах прикладной электродинамики.

Начнем изложение вопроса с решения о взаимной индуктивности круговых контуров с пересекающимися осями [2] (рис. 1).

В случае, когда $\delta = \frac{R_2}{R_1} < 0.5$ можно использовать выражение (5.49) в [2] в виде:

$$M = \frac{\pi}{2} \mu_0 \left(\frac{R_1}{a_1} \right)^2 \left(\frac{R_2}{a_1} \right)^2 a_1 \cos \theta \left[1 - \frac{1}{4} \frac{R_2^2}{a_1^2} P_3' \left(\frac{r}{a_1} \right) \frac{P_3(\cos \theta)}{\cos \theta} + \frac{1}{8} \frac{R_2^4}{a_1^4} P_5' \left(\frac{r}{a_1} \right) \frac{P_5(\cos \theta)}{\cos \theta} - \right. \\ \left. - \frac{5}{64} \frac{R_2^6}{a_1^6} P_7' \left(\frac{r}{a_1} \right) \frac{P_7(\cos \theta)}{\cos \theta} + \dots + \right]. \quad (1)$$

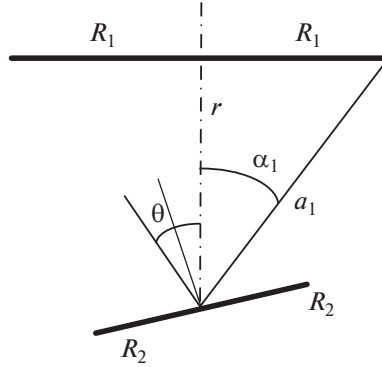


Рис. 1. Два контура, оси которых пересекаются в центре меньшего из них.

Применяя формулы 840 и 845 [5] для полиномов Лежандра и их первых производных, где

$$P_3(\cos \theta) = \frac{1}{2} \cos \theta (5 \cos^2 \theta - 3), \quad P_5(\cos \theta) = \frac{1}{8} \cos \theta (63 \cos^4 \theta - 70 \cos^2 \theta + 15),$$

$$P_7(\cos \theta) = \frac{1}{16} \cos \theta (429 \cos^6 \theta - 693 \cos^4 \theta + 315 \cos^2 \theta - 35),$$

$$P_3' \left(\frac{r}{a_1} \right) = \frac{3}{2} \left[5 \left(\frac{r}{a_1} \right)^2 - 1 \right], \quad P_5' \left(\frac{r}{a_1} \right) = \frac{15}{8} \left[21 \left(\frac{r}{a_1} \right)^4 - 14 \left(\frac{r}{a_1} \right)^2 + 1 \right],$$

$$P_7' \left(\frac{r}{a_1} \right) = \frac{7}{16} \left[429 \left(\frac{r}{a_1} \right)^6 - 495 \left(\frac{r}{a_1} \right)^4 + 135 \left(\frac{r}{a_1} \right)^2 - 5 \right],$$

перепишем (1) в виде:

$$\begin{aligned} M = & \frac{\pi}{2} \mu_0 \frac{R_1^2 R_2^2}{a_1^3} \left\{ \cos \theta - \frac{3 R_2^2}{8 a_1^2} \left[5 \left(\frac{r}{a_1} \right)^2 - 1 \right] P_3(\cos \theta) + \frac{15 R_2^4}{64 a_1^4} \left[21 \left(\frac{r}{a_1} \right)^4 - 14 \left(\frac{r}{a_1} \right)^2 + 1 \right] P_5(\cos \theta) - \right. \\ & \left. - \frac{35 R_2^6}{1024 a_1^6} \left[429 \left(\frac{r}{a_1} \right)^6 - 495 \left(\frac{r}{a_1} \right)^4 + 135 \left(\frac{r}{a_1} \right)^2 - 5 \right] P_7(\cos \theta) \dots \right\} = \frac{\pi}{2} \mu_0 \frac{R_1^2 R_2^2}{a_1^3} \times \\ & \times \cos \theta \left\{ 1 - \frac{3 R_2^2}{16 a_1^2} \left[5 \left(\frac{r}{a_1} \right)^2 - 1 \right] (5 \cos^2 \theta - 3) + \frac{15 R_2^4}{512 a_1^4} \left[21 \left(\frac{r}{a_1} \right)^4 - 14 \left(\frac{r}{a_1} \right)^2 + 1 \right] \times \right. \\ & \times (63 \cos^4 \theta - 70 \cos^2 \theta + 15) - \frac{35 R_2^6}{16384 a_1^6} \left[429 \left(\frac{r}{a_1} \right)^6 - 495 \left(\frac{r}{a_1} \right)^4 + 135 \left(\frac{r}{a_1} \right)^2 - 5 \right] \times \\ & \left. \times (429 \cos^6 \theta - 693 \cos^4 \theta + 315 \cos^2 \theta - 35) \dots \right\}. \end{aligned} \quad (2)$$

При $\theta = \frac{\pi}{2}$ имеем 0, а при $\theta = 0$ в соответствии с (2) (рис. 1)

$$M|_{\theta=0} = \frac{\pi}{2} \mu_0 \frac{R_1^2 R_2^2}{a_1^3} \left\{ 1 - \frac{3 R_2^2}{8 a_1^2} \left[5 \left(\frac{r}{a_1} \right)^2 - 1 \right] + \frac{15 R_2^4}{64 a_1^4} \left[21 \left(\frac{r}{a_1} \right)^4 - 14 \left(\frac{r}{a_1} \right)^2 + 1 \right] - \right. \\ \left. - \frac{35 R_2^6}{1024 a_1^6} \left[429 \left(\frac{r}{a_1} \right)^6 - 495 \left(\frac{r}{a_1} \right)^4 + 135 \left(\frac{r}{a_1} \right)^2 - 5 \right] \dots \right\}. \quad (3)$$

При $r = 0$ и $a_1 = R_1$ (рис. 1) получаем из (2)

$$M(r = 0, a_1 = R_1) = \frac{\pi}{2} \mu_0 \frac{R_2^2}{R_1} \cos \theta \left\{ 1 + \frac{3 R_2^2}{16 R_1^2} (5 \cos^2 \theta - 3) + \right. \\ \left. + \frac{15 R_2^4}{512 R_1^4} (63 \cos^4 \theta - 70 \cos^2 \theta + 15) + \frac{175 R_2^6}{16384 R_1^6} (429 \cos^6 \theta - 693 \cos^4 \theta + 315 \cos^2 \theta - 35) \dots \right\}. \quad (4)$$

Можно показать, что ряд (4) при $r = 0$ и $a_1 = R_1$ не будет отличаться от ряда (5–37) в [2], если в него подставить выражения для $P_1(\cos \theta) = \cos \theta$, $P_3(\cos \theta)$, $P_5(\cos \theta)$, $P_7(\cos \theta)$ и т.д. так, как это осуществлялось при выводе выражения (2).

Внося $\cos \theta$ в фигурные скобки в (4), для случая $r = 0$ и $a_1 = R_1$, получим

$$\frac{\pi}{2} \mu_0 \frac{R_2^2}{R_1} \left\{ \cos \theta + \frac{3 R_2^2}{16 R_1^2} (5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta) + \frac{15 R_2^4}{512 R_1^4} (63 \cos^5 \theta - 70 \cos^3 \theta + 15 \cos \theta) + \right. \\ \left. + \frac{175 R_2^6}{16384 R_1^6} (429 \cos^7 \theta - 693 \cos^5 \theta + 315 \cos^3 \theta - 35 \cos \theta) \dots \right\}$$

и, осуществляя дифференцирование по θ , найдем:

$$\frac{dM}{d\theta} = \frac{\pi}{2} \mu_0 \frac{R_2^2}{R_1} (-\sin \theta) \left\{ 1 + \frac{3 R_2^2}{16 R_1^2} (5 \times 3 \cos^2 \theta - 3) + \frac{15 R_2^4}{512 R_1^4} (63 \times 5 \cos^4 \theta - 70 \times 3 \cos^2 \theta + 15) + \right. \\ \left. + \frac{175 R_2^6}{16384 R_1^6} (429 \times 7 \cos^6 \theta - 693 \times 5 \cos^4 \theta + 315 \times 3 \cos^2 \theta - 35) \dots \right\} = \frac{\pi}{2} \mu_0 \frac{R_2^2}{R_1} (-\sin \theta) \times \\ \times \left\{ 1 + \frac{9 R_2^2}{16 R_1^2} (5 \cos^2 \theta - 1) + \frac{225 R_2^4}{512 R_1^4} (21 \cos^4 \theta - 14 \cos^2 \theta + 1) + \frac{1225 R_2^6}{16384 R_1^6} \times \right. \\ \left. \times (429 \cos^5 \theta - 495 \cos^3 \theta + 135 \cos^2 \theta - 5) \dots \right\}. \quad (5)$$

Из (5) при $\theta = \frac{\pi}{2}$ получим:

$$\frac{dM}{d\theta} \Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = -\frac{\pi}{2} \mu_0 \frac{R_2^2}{R_1} \left\{ 1 - \frac{9 R_2^2}{16 R_1^2} + \frac{225 R_2^4}{512 R_1^4} - \frac{6125 R_2^6}{16384 R_1^6} \dots \right\}. \quad (6)$$

Следует отметить, что взаимодействие концентрических круговых контуров с током лежит в основе принципа действия электродинамического ваттметра.

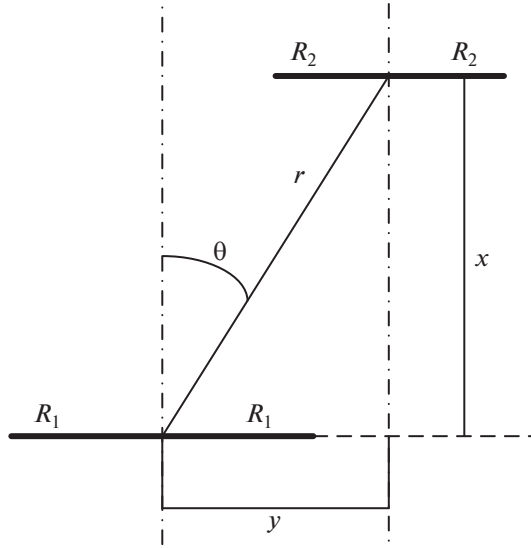


Рис. 2. Контуры с параллельными осями.

При умножении (5) и (6) на токи, протекающие в контурах, получим выражения для вращающих моментов. Наконец, ограничиваясь первыми тремя членами, запишем производную $\frac{dM}{d\theta}$ для (рис. 1) на основании (2):

$$\frac{dM}{d\theta} = \frac{\pi}{2} \mu_0 \frac{R_1^2 R_2^2}{a_1^3} (-\sin \theta) \left\{ 1 - \frac{9}{16} \frac{R_2^2}{a_1^2} \left[5 \left(\frac{r}{a_1} \right)^2 - 1 \right] \left(5 \cos^2 \theta - 1 \right) + \frac{225}{512} \frac{R_2^4}{a_1^4} \left[21 \left(\frac{r}{a_1} \right)^4 - 14 \left(\frac{r}{a_1} \right)^2 + 1 \right] \times \right. \\ \left. \times \left(21 \cos^4 \theta - 14 \cos^2 \theta + 1 \right) \dots \right\}. \quad (7)$$

В следующем примере изберем конфигурацию контуров с параллельными осями с радиусами R_1 и R_2 (рис. 2).

Для этого случая известно выражение для M в виде, предполагающим однократное интегрирование, предложенное еще Гровером [6], а затем приводимое в более поздних публикациях, например, в [7, 8]. Это выражение в [8] записано с учетом обозначений рис. 2 в виде:

$$M = \frac{\mu_0}{\pi} \sqrt{R_1 R_2} \int_0^\pi \frac{\left(1 - \frac{y}{R_2} \cos \vartheta \right) \phi(k)}{v^{3/2}} d\vartheta, \quad (8)$$

где

$$\phi(k) = \left(\frac{2}{k} - k \right) K(k) - \frac{2}{k} E(k) = \frac{2}{k} \left[\left(1 - \frac{k^2}{2} \right) K(k) - E(k) \right]. \quad (9)$$

и

$$k^2 = \frac{4 \frac{R_2}{R_1} v}{\left(1 + \frac{R_2}{R_1} v\right)^2 + \left(\frac{x}{R_1}\right)^2} = \frac{4 R_1 R_2 v}{(R_1 + R_2 v)^2 + x^2}, \quad (10)$$

где

$$v = \left(1 + \frac{y^2}{R_2^2} - 2 \frac{y}{R_2} \cos \vartheta\right)^{1/2}. \quad (11)$$

При $x = 0$ и $y = 0$, и, следовательно, $v = 1, 0$

$$k^2 \Big|_{x=0, y=0} = \frac{4 R_1 R_2}{(R_1 + R_2)^2}. \quad (12)$$

Тогда выражение (8) оказывается равным:

$$M = \mu_0 \times 2k^{-1} (R_1 R_2)^{1/2} \left[\left(1 - \frac{k^2}{2}\right) K(k) - E(k) \right], \quad (13)$$

как это и записано в [9].

Приступая к записи производной M по координате x , заметим, что в отличии от k^2 безразмерная величина v не зависит от x . Учитывая (8) и (10), имеем:

$$\frac{dM}{dx} = \frac{\mu_0}{\pi} (R_1 R_2)^{1/2} \int_0^{\pi} \frac{1 - \frac{y}{R_2} \cos \theta}{v^{3/2}} \frac{d\phi(k)}{dk} \frac{dk}{dx} d\theta, \quad (14)$$

где

$$k = \frac{2 (R_1 R_2 v)^{1/2}}{\left[(R_1 + R_2 v)^2 + x^2\right]^{1/2}}. \quad (15)$$

Используя выражение для производной $\phi(k)$ по k , записываемой в виде

$$\frac{d\phi(k)}{dk} = k^{-2} \left(\frac{2 - k^2}{1 - k^2} E - 2K \right), \quad (16)$$

а также производную по k от x в соответствии с (15):

$$\begin{aligned} \frac{dk}{dx} &= 2 (R_1 R_2 v)^{1/2} \left(-\frac{1}{2}\right) \left[(R_1 + R_2 v)^2 + x^2\right]^{-3/2} 2x = \\ &= -2 (R_1 R_2 v)^{1/2} x \left[(R_1 + R_2 v)^2 + x^2\right]^{-3/2} = -\frac{xk^3}{4 (R_1 R_2 v)}, \end{aligned}$$

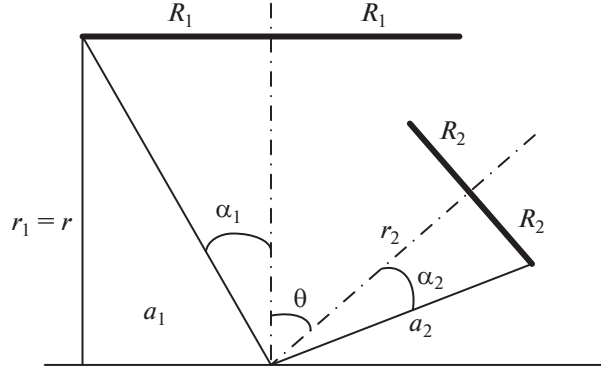


Рис. 3. Два контура, оси которых пересекаются в произвольной точке.

получим для $\frac{dM}{dx}$ следующее выражение

$$\begin{aligned} \frac{dM}{dx} &= -\frac{\mu_0 x}{4\pi (R_1 R_2)^{1/2}} \int_0^{\pi} \frac{1 - \frac{y}{R_2} \cos \theta}{v^{5/2}} k \left(\frac{2 - k^2}{1 - k^2} E - 2K \right) d\vartheta = \\ &= -\frac{\mu_0 x}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{1 - \frac{y}{R_2} \cos \theta}{v^2} \left[(R_1 + R_2 v)^2 + x^2 \right]^{-1/2} \left(\frac{2 - k^2}{1 - k^2} E - 2K \right) d\vartheta. \end{aligned} \quad (17)$$

При $y = 0$ и $v = 1$, найдем:

$$\frac{dM}{dx} = -\frac{\mu_0}{2} \frac{x}{\left[(R_1 + R_2)^2 + x^2 \right]^{1/2}} \left(\frac{2 - k^2}{1 - k^2} E - 2K \right) \quad (18)$$

и

$$k|_{y=0} = \frac{2(R_1 R_2)^{1/2}}{\left[(R_1 + R_2)^2 + x^2 \right]^{1/2}}. \quad (19)$$

В этой связи следует отметить, что в работе [10] в формуле (П. 2–3) допущены опечатки: для исправления квадратную скобку в знаменателе следует дополнить показателем степени $1/2$, а в формуле (П. 2–4) для k^2 в знаменателе минус должен быть заменен на плюс.

Выражение (18) можно видоизменить и записать с заменой x на h в виде

$$\frac{dM}{dh} = \frac{\mu_0 h}{\left[(R_1 + R_2)^2 + h^2 \right]^{1/2}} \left(K - \frac{2 - k^2}{2(1 - k^2)} E \right) = -\frac{\mu_0 k h}{4(R_1 R_2)^{1/2}} \left(\frac{2 - k^2}{1 - k^2} E - 2K \right) \quad (20)$$

в полном согласии с [11].

Рассмотрим теперь случай, когда имеются два контура, оси которых пересекаются в произвольной точке в соответствии с (рис. 3).

Этой конфигурации соответствуют формулы для коэффициента взаимной индукции M , записанные в [1], а также в [9] и в [2].

При $\alpha_2 = \frac{\pi}{2}$ и $a_2 = R_2$ будем иметь случай, отвечающий (рис. 1).

В соответствии с [2] (формула 5–50) коэффициент взаимной индукции можно представить в виде (рис. 3):

$$M = \mu_0 \pi \frac{R_1^2 R_2^2}{a_1^3} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_2}{a_1} \right)^{n-1} \frac{P'_n(\cos \alpha_1) P'_n(\cos \alpha_2) P_n(\cos \theta)}{n(n+1)}. \quad (21)$$

Используем те же приемы, что и при выводе выражения (2), позволяющие развернуть полиномы Лежандра P_n и P'_n .

Раскрывая ряд (21) с учетом формул (840) и (845) [5], запишем (рис. 3):

$$\begin{aligned} M = \mu_0 \pi \frac{R_1^2 R_2^2}{2a_1^3} & \left[\cos \theta + \frac{3a_2}{2a_1} \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 (3 \cos^2 \theta - 1) + \frac{3}{16} \left(\frac{a_2}{a_1} \right)^2 (5 \cos^2 \alpha_1 - 1) \times \right. \\ & \times (5 \cos^2 \alpha_2 - 1) \cos \theta (5 \cos^2 \theta - 3) + \frac{5}{64} \left(\frac{a_2}{a_1} \right)^3 \cos \alpha_1 (7 \cos^2 \alpha_1 - 3) \cos \alpha_2 \times \\ & \times (7 \cos^2 \alpha_2 - 3) (35 \cos^4 \theta - 30 \cos^2 \theta + 3) + \frac{15}{512} \left(\frac{a_2}{a_1} \right)^4 (21 \cos^4 \alpha_1 - 14 \cos^2 \alpha_1 + 1) \times \\ & \left. \times (21 \cos^4 \alpha_2 - 14 \cos^2 \alpha_2 + 1) \cos \theta (63 \cos^4 \theta - 70 \cos^2 \theta + 15) \dots \right]. \quad (22) \end{aligned}$$

При $\alpha_2 = \frac{\pi}{2}$, $a_2 = R_2$ и $\cos \alpha_2 = 0$ из (22) вытекает выражение, совпадение с (2):

$$\begin{aligned} M|_{\cos \alpha_2=0} = \frac{\pi}{2} \mu_0 \frac{R_1^2 R_2^2}{a_1^3} \cos \theta & \left[1 - \frac{3}{16} \left(\frac{R_2}{a_1} \right)^2 (5 \cos^2 \alpha_1 - 1) (5 \cos^2 \theta - 3) + \right. \\ & \left. + \frac{15}{512} \left(\frac{R_2}{a_1} \right)^4 (21 \cos^4 \alpha_1 - 14 \cos^2 \alpha_1 + 1) (63 \cos^4 \theta - 70 \cos^2 \theta + 15) - \dots \right], \end{aligned}$$

где $\cos \alpha_1 = \frac{r}{a_1}$, что также служит подтверждением правильности формулы (22).

Теперь можно проверить выражение (2.4') работы [1] на предмет соответствия формуле (2). Формула (2.4') в наших обозначениях может быть записана в виде (рис. 1):

$$M = \frac{\pi^{1/2}}{2} \mu_0 R_2 \left(\frac{R_1}{a_1} \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{R_2}{a_1} \right)^{2n+1} \frac{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)}{(n+1)!} P'_{2n+1}\left(\frac{r}{a_1}\right) P_{2n+1}(\cos \theta),$$

где $\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)$ – гамма-функция.

Здесь, в отличие от (2.4'), индекс суммирования по n взят от нуля.

По первым двум членам имеем, таким образом, выражение:

$$M = \frac{\pi}{2} \mu_0 \frac{R_1^2 R_2^2}{a_1^3} \cos \theta \left\{ 1 - \frac{3}{16} \left(\frac{R_2}{a_1} \right)^2 \left[5 \left(\frac{r}{a_1} \right)^2 - 1 \right] [5 \cos^2 \theta - 3] \dots \right\},$$

совпадающее с (2), откуда и вытекает необходимость изменения индекса суммирования от нуля и исправления явной опечатки в (2.4'), где вместо μ_2^2 должно стоять μ_1^2 , что также подтверждается записью последующей формулы (2.5) в [1].

Осуществляя дифференцирование выражения (22) по θ с учетом только первых трех членов будем иметь:

$$\frac{dM}{d\theta} = \mu_0 \pi \frac{R_1^2 R_2^2}{2a_1^3} (-\sin \theta) \left[1 + 9 \frac{a_2}{a_1} \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \cos \theta + \frac{9}{16} \left(\frac{a_2}{a_1} \right)^2 \times \right. \\ \left. \times (5 \cos^2 \alpha_1 - 1)(5 \cos^2 \alpha_2 - 1)(\cos^2 \theta - 1) \right]. \quad (23)$$

При $\alpha_2 = \frac{\pi}{2}$ и $a_2 = R_2$

$$\frac{dM}{d\theta} \Big|_{\alpha_2 = \frac{\pi}{2}, a_2 = R_2} = \mu_0 \pi \frac{R_1^2 R_2^2}{2a_1^3} (-\sin \theta) \left[1 - \frac{9}{16} \left(\frac{R_2}{a_1} \right)^2 (5 \cos^2 \alpha_1 - 1)(5 \cos^2 \theta - 1) \dots \right]. \quad (24)$$

Формулу для $\frac{dM}{d\theta}$ на основании (2.5) литературы [1], но без учета знака, можно записать, сохраняя суммирование от $n = 0$, следующим образом:

$$\frac{dM}{d\theta} = \mu_0 \frac{\pi^{1/2}}{2} R_2 \sin \theta \left(\frac{R_1}{a_1} \right)^2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{R_2}{a_1} \right)^{2n+1} \frac{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)}{(n+1)!} P'_{2n+1} \left(\frac{r}{a_1} \right) P'_{2n+1}(\cos \theta), \quad (25)$$

которая должна совпадать с выражением (24).

Проверка показывает, что при суммировании от $n = 0$ предыдущее утверждение действительно имеет место.

Под конец приведем численный пример определения взаимной индуктивности для случаев, когда $\alpha_1 = \frac{\pi}{3}$ и $\cos \alpha_1 = \frac{1}{2} = \frac{r}{a_1}$, (рис. 1), но в одном из них $\theta = \frac{\pi}{3}$, а в другом

$\theta = 0$ и $\frac{R_2}{a_1} = 0.5$. Тогда по выражению (2) для индуктивности будем иметь величину

$\frac{\pi}{2} \mu_0 R_1 \times 0.107$, а по формуле (3) получим величину $\frac{\pi}{2} \mu_0 R_1 \times 0.2071$, т.е. практически в два раза большую, что и должно иметь место по физическим соображениям.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Получены развернутые выражения для коэффициентов взаимной индукции и их производных для круговых контуров с различным расположением осей (пересекающиеся в центре меньшего из них, параллельные, пересекающиеся в произвольной точке), свободных от полиномов Лежандра и их производных, что открывает возможность непосредственного получения соответствующих оценок и численных результатов. Последние могут быть весьма полезны при решении ряда прикладных вопросов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Snow Chester*. Formulas for Computing Capacitance and Inductance. Washington National Bureau of Standards, Circular 544, Dec. 1954.
2. *Калантаров П.Л., Цейтлин Л.А.* Расчет индуктивностей. Справочная книга. Энергоатомиздат. Ленинградское отделение, 1986, 488 с.
3. *Белоусов С.Л.* Таблицы нормированных присоединенных полиномов Лежандра. Изд. АН СССР, М., 1956.
4. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. Под ред. Абрамовица М. и Стиган И. Москва, "Наука", ГРФМЛ, 1979.

5. Двайт Г.Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. Изд. "Наука" ГРФМЛ, Москва, 1977, 228 с.
6. Grover F.W. Inductance calculations. Working formulas and tables. D. VAN Nostrand company, Inc.: New York. 1947.
7. Akyel C., Babic S.I., and Mahmoudi M.-M. Mutual Inductance calculation for Non-coaxial circular air coils with parallel axes. Progress in Electromagnetics Research, PIER91, 2009, 287–301.
8. Ren Young. Magnetic force calculation between Misaligned Coils for a superconducting Magnet. IEEE Transaction on applied superconductivity, vol. 20, № 6, 2010. pp. 2350–2353.
9. Смайт В. Электростатика и электродинамика. Издательство иностранной литературы. Москва, 1954, 606 с.
10. Цицкиан Г.Н. О коэффициентах взаимной индукции и силах взаимодействия круговых коаксиальных контуров. Электричество, 2019, № 6, С. 59–65.
11. Цицкиан Г.Н. О взаимной индуктивности и электродинамических силах взаимодействия коаксиальных контуров. Изв. РАН. Энергетика. 2018, № 4. С. 40–45.

Inductance of Circular Circuits with Arbitrary Axis Orientation

G. N. Tsitsikyan^{a, *} and A. I. Senchenko^{a, **}

^aFSUE "CSRI MET" (Branch of the FSUE "Krylov State Scientific Center"), Saint Petersburg, Russia

*e-mail: george.20021940@mail.ru

**e-mail: spb-1205@inbox.ru

Expressions for mutual induction coefficients and their gradients are given by means of adaptation of initial expressions containing Legendre spherical functions and their derivatives for three configurations of circular contours with intersecting axes, with parallel axes and with axes intersecting at an arbitrary point, which makes it possible to obtain direct estimates and numerical results.

Keywords: mutual inductance, coaxial circles, electrodynamic forces