

УДК 621.3

## ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИЕ СИЛЫ, ДЕЙСТВУЮЩИЕ НА ЛИНИЮ С ТОКОМ, ПРОЛОЖЕННУЮ ВДОЛЬ ПРОТЯЖЕННЫХ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ КОНСТРУКЦИЙ

© 2020 г. Г. Н. Цицикян<sup>1</sup>, \*, А. И. Сенченко<sup>1</sup>, \*\*<sup>1</sup>Филиал «ЦНИИ СЭТ» ФГУП «Крыловский государственный научный центр», Санкт-Петербург, Россия

\*e-mail: george.20021940@mail.ru

\*\*e-mail: spb-1205@mail.ru

Поступила в редакцию 09.06.2020 г.

После доработки 27.07.2020 г.

Принята к публикации 30.07.2020 г.

Выражения для электродинамических сил в системе прямолинейных линий с током, проложенных вдоль протяженных сплошных металлических конструкций, получены двумя методами с использованием вносимых коэффициентов самоиндукции, в пределе, когда либо удельная проводимость материала, либо его магнитная проницаемость весьма велики и с помощью векторов магнитной индукции. Выражения для электродинамических сил между трехпроводной линией и сплошной металлической конструкцией получены для важного в практическом отношении случая трехфазной системы токов.

*Ключевые слова:* линия с током, металлическая обшивка, электродинамические силы, сопоставление методов определения

DOI: 10.31857/S0002331020050106

Электродинамические силы, действующие на линию с током, проложенную вдоль металлических конструкций, могут быть определены, если известна ее индуктивность с учетом хорошо проводящих и ферромагнитных оболочек, характерных для транспортных средств с металлической обшивкой, например, в судостроении и авиации. Существуют две возможности для нахождения электродинамических сил, действующих на провода линии с расстоянием  $d$  друг от друга, одна из которых предполагает использование соответствующих связей между силой взаимодействия  $f_d$  в направлении  $d$  (рис. 1) и выражениями для индуктивности линии, если они известны в тех или иных конкретных ситуациях, а именно:

$$f_d = \frac{1}{2} i^2 \frac{\partial L}{\partial d}. \quad (1)$$

Другая возможность определения электродинамических сил состоит в нахождении векторов магнитной индукции с применением векторного произведения для элементарной силы

$$id\vec{l} \times \vec{B} \quad (2)$$

с последующим суммированием вдоль линии. В случае плоскопараллельного магнитного поля это достигается наиболее просто.

Можно заимствовать выражения для коэффициентов самоиндукции с учетом влияния металлических оболочек, как правило, листовых конструкций, в свою очередь, в двух основных случаях когда  $\mu = \mu_0$ , но удельная проводимость достаточно велика

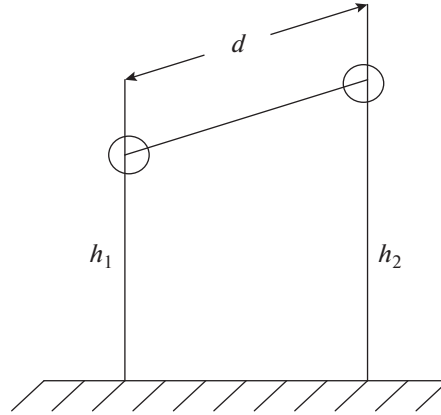


Рис. 1. К вопросу о вносимой индуктивности в линию ( $\mu \rightarrow \infty$ ,  $\gamma \rightarrow \infty$ ).

( $\gamma \rightarrow \infty$ ), и когда удельная проводимость относительно мала, но магнитная проницаемость достаточно велика ( $\mu \rightarrow \infty$ ) [1]. Второй путь предполагает нахождение магнитной индукции в соответствии с указанными предпосылками. Решение для двухпроводной линии при конечном  $\gamma$  и  $\mu = \mu_0$  будет приведено для синусоидального изменения тока во времени.

В справочном руководстве [1] в разделе плоский магнитный экран приведены выражения для вносимых индуктивностей  $\Delta L$  в линию при ( $\mu \rightarrow \infty$ ). Для случая ( $\gamma \rightarrow \infty$ ) те же выражения следует брать со знаком минус, что и отмечено на примере формулы (11–5) в [1].

Вносимая индуктивность в [1] для линии (рис. 1) записана в виде:

$$\Delta L = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \left( 1 + \frac{d^2}{4h_1h_2} \right), \quad (3)$$

а собственная индуктивность линии в виде:

$$L' = \frac{\mu_0}{\pi} \left( \ln \frac{d}{r} + \frac{1}{4} \right), \quad (4)$$

где  $r$  – радиус провода.

Тогда будем иметь:  $L = L' \pm \Delta L$ , где знак плюс следует брать при ( $\mu \rightarrow \infty$ ), а знак минус при ( $\gamma \rightarrow \infty$ ). Для электродинамической силы взаимодействия в линии с учетом (3) и (4) находим:

$$f_d|_{h_1 \neq h_2} = \frac{1}{2} i^2 \frac{\partial L}{\partial d} = \frac{1}{2} i^2 \frac{\partial (L' \pm \Delta L)}{\partial d} = \frac{\mu_0 i^2}{2\pi d} \left( 1 \pm \frac{d^2}{4h_1h_2 + d^2} \right). \quad (5)$$

Для верхнего знака ( $\mu \rightarrow \infty$ ) будем иметь:

$$f_d|_{h_1 \neq h_2, \mu \rightarrow \infty} = \frac{\mu_0 i^2}{2\pi d} \frac{4h_1h_2 + 2d^2}{4h_1h_2 + d^2} = \frac{\mu_0 i^2}{\pi d} \frac{2h_1h_2 + d^2}{4h_1h_2 + d^2}, \quad (6)$$

а для ( $\gamma \rightarrow \infty$ ), т.е. для нижнего знака:

$$f_d|_{h_1 \neq h_2, \gamma \rightarrow \infty} = \frac{\mu_0 i^2}{\pi d} \frac{2h_1h_2}{4h_1h_2 + d^2}. \quad (7)$$

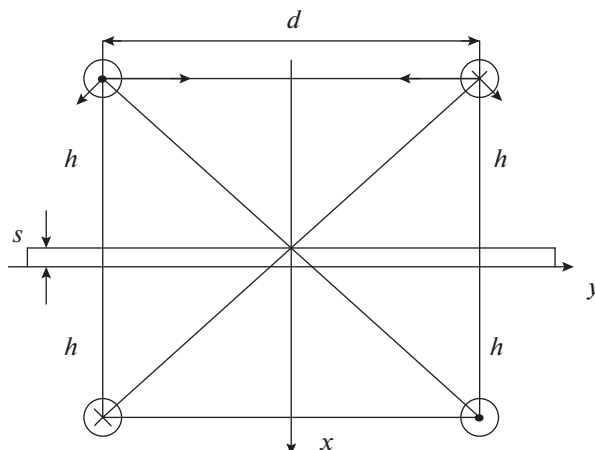


Рис. 2. Двухпроводная линия над плоской листовой оболочкой.

При  $h_1 = h_2 = h$

$$f_d|_{h_1=h_2=h} = \frac{\mu_0 i^2}{2\pi d} \left( 1 \pm \frac{d^2}{4h^2 + d^2} \right). \quad (8)$$

Остановимся на вопросе, связанном с оценкой взаимодействия собственно двухпроводной линии над хорошо проводящей плоской листовой оболочкой толщиной  $s$ , показанной на (рис. 2) с векторами магнитной индукции, которые и обуславливают электродинамические силы в направлении оси  $x$ .

Тогда:

$$B_y = \frac{\mu_0 i}{2\pi 2h} - \frac{\mu_0 i}{2\pi} \frac{2h}{(d^2 + 4h^2)} = \frac{\mu_0 i}{2\pi 2h} \left( 1 - \frac{4h^2}{d^2 + 4h^2} \right) = \frac{\mu_0 i}{4\pi h} \left[ 1 + \left( \frac{2h}{d} \right)^2 \right]^{-1}. \quad (9)$$

С учетом второго проводника линии с током противоположного направления, имеем в совокупности величину силы в направлении координаты  $x$  в виде

$$f_x = -\frac{\mu_0 i^2}{2\pi h} \frac{1}{1 + \left( \frac{2h}{d} \right)^2}. \quad (10)$$

В [3] этот результат записан для средней во времени силы при синусоидальном процессе в следующем виде:

$$F_x|_{(y \rightarrow \infty)} = -\frac{\mu_0 I^2}{2\pi h} \frac{1}{1 + \left( \frac{2h}{d} \right)^2}, \quad (11)$$

где  $I$  – действующее значение тока. В [3] приведено также выражение для средней во времени силы, но с учетом конечной проводимости  $\gamma$  листовой оболочки, которую можно записать с учетом принятых здесь обозначений в следующем виде.

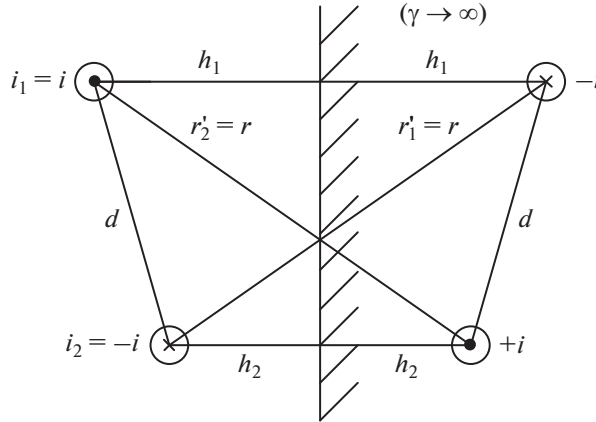


Рис. 3. Линия с прямым и обратным током:  $d$  – расстояние между осями,  $h_1$  и  $h_2$  – высота проложения прямолинейных проводов с током.

$$F_x = -\frac{\mu_0 I^2}{4\pi h} \operatorname{Re} \left\{ j 2\beta h \left[ 2e^{j2\beta h} E_1(j 2\beta h) - e^{\beta d + j2\beta h} E_1(\beta d + j 2\beta h) - e^{-\beta d + j2\beta h} E_1(-\beta d + j 2\beta h) \right] \right\}, \quad (12)$$

где  $\beta h = 0.5\omega\mu_0\gamma hs$ ,  $\omega$  – круговая частота,  $s$  – толщина листа (рис. 2), а  $E_1(z)$  – интегральная показательная функция от комплексного аргумента. Пользуясь ее асимптотическим разложением и ограничиваясь первым членом этого же разложения [4, 51.51]

$E_1(z) \approx \frac{e^{-z}}{z}$ , где  $z$  достаточно велико, получим:

$$F_x = -\frac{\mu_0 I^2}{2\pi h} \frac{1}{1 + \left(\frac{2h}{d}\right)^2},$$

т.е. выражение (11). Здесь следует отметить, что в оригинале [3.(П-246)] по сравнению

с (12) допущена опечатка: вместо  $\frac{\mu_0 I^2}{2\pi h}$  должно быть  $\frac{\mu_0 I^2}{4\pi h}$ .

Рассмотрим линию с прямым и обратным током, расположенную вблизи проводящего массива с плоской границей (рис. 3), предполагая  $(\gamma \rightarrow \infty)$ . Введем обозначения  $r_1 = 2h_1$ ,  $r_2 = 2h_2$ ,  $r_1' = r_2' = r$  и остановимся на  $z$  – составляющей векторного потенциала прямолинейных токов в предположении плоскопараллельности магнитного поля (ось  $z$  направлена от плоскости рисунка к наблюдателю).

Тогда с точностью до постоянной  $z$  – составляющая векторного потенциала от тока  $(-i)$  и от тока  $(i)$  зеркальных отображений (рис. 3) на оси тока  $i_1 = i$  равна:

$$\frac{\mu_0 i}{2\pi} \ln 2h_1 - \frac{\mu_0 i}{2\pi} r_2',$$

а  $z$  – составляющая векторного потенциала от тех же зеркально отображенных токов, но на оси тока  $(-i)$  равна:

$$-\frac{\mu_0 i}{2\pi} \ln 2h_2 + \frac{\mu_0 i}{2\pi} \ln r_1'.$$

Разность этих составляющих определяет собой вносимый поток на единицу длины рассматриваемой линии, равный:

$$\frac{\mu_0 i}{2\pi} \ln 2h_1 + \ln 2h_2 - \frac{\mu_0 i}{2\pi} \ln r.$$

Разделив записанное выражение на  $i$ , получим вносимую индуктивность от проводящего полупространства при ( $\gamma \rightarrow \infty$ ). При ( $\mu \rightarrow \infty$ ) вносимой индуктивности следует приписать обратный знак. Таким образом, для вносимой индуктивности имеем:

$$\begin{aligned} \Delta L &= \frac{\mu_0}{2\pi} \left[ \ln(4h_1 h_2) - \ln r^2 \right] = \frac{\mu_0}{2\pi} \left\{ \ln(4h_1 h_2) - \ln \left[ (h_1 + h_2)^2 + d^2 - (h_1 - h_2)^2 \right] \right\} = \\ &= -\frac{\mu_0}{2\pi} \ln \left( \frac{d^2 + 4h_1 h_2}{4h_1 h_2} \right) = -\frac{\mu_0}{2\pi} \ln \left( 1 + \frac{d^2}{4h_1 h_2} \right) \end{aligned} \quad (13)$$

в полном соответствии с выражениями (11–5) и (11–29) [1]. Для ( $\mu \rightarrow \infty$ ) в формуле (13) следует изменить знак на противоположный. При  $h_1 = h_2 = h$  вносимая индуктивность равна:

$$\Delta L = \mp \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \left( 1 + \frac{d^2}{4h^2} \right). \quad (14)$$

Теперь можно записать и вносимую электродинамическую силу, обусловленную близостью проводящего массива в предположении ( $\gamma \rightarrow \infty$ ), ( $\mu \rightarrow \infty$ ):

$$\Delta f_d|_{\gamma \rightarrow \infty, \mu \rightarrow \infty} = \frac{i^2}{2} \frac{\partial(\Delta L)}{\partial d} = \mp \frac{\mu_0 i^2}{4\pi} \frac{2d}{4h_1 h_2 + d^2} = \mp \frac{\mu_0 i^2}{2\pi d} \frac{d^2}{4h_1 h_2 + d^2}. \quad (15)$$

Соответственно, результирующая сила равна:

$$f_d|_{\gamma \rightarrow \infty} = \frac{\mu_0 i^2}{2\pi d} \left[ 1 - \frac{d^2}{4h_1 h_2 + d^2} \right] = \frac{\mu_0 i^2}{\pi d} \frac{2h_1 h_2}{4h_1 h_2 + d^2}, \quad (16)$$

а для  $f_d|_{\mu \rightarrow \infty}$  будем иметь:

$$f_d|_{\mu \rightarrow \infty} = \frac{\mu_0 i^2}{2\pi d} \left[ 1 + \frac{d^2}{d^2 + 4h_1 h_2} \right] = \frac{\mu_0 i^2}{\pi d} \frac{2h_1 h_2 + d^2}{4h_1 h_2 + d^2}. \quad (17)$$

В полном соответствии с (7) и (6)

При  $h_1 = h_2 = h$

$$f_d|_{\gamma \rightarrow \infty, \mu \rightarrow \infty} = \frac{\mu_0 i^2}{2\pi d} \left[ 1 \mp \frac{d^2}{d^2 + 4h^2} \right]. \quad (18)$$

Перейдем к вопросу о средней во времени силы взаимодействия между трехфазной трехпроводной линией и массивом ( $\gamma \rightarrow \infty$ ) с плоской границей (рис. 4) в направлении оси  $x$ , когда  $i_A + i_B + i_C = 0$ . Общее выражение для электродинамической силы  $f_x|_{\gamma \rightarrow \infty}$  может быть записано в виде.

$$\begin{aligned} f_x|_{\gamma \rightarrow \infty} &= -\frac{\mu_0}{2\pi \times 2h} \left[ i_A^2 + i_B^2 + i_C^2 + 2(i_A i_B + i_B i_C + i_A i_C) \right] + \\ &+ \frac{\mu_0 (2i_A i_B + 2i_B i_C)}{2\pi \times 2h} \frac{1}{1 + \left( \frac{2h}{d} \right)^2} + \frac{\mu_0 \times 2i_A i_C}{2\pi \times 2h} \frac{1}{1 + \left( \frac{h}{d} \right)^2}. \end{aligned} \quad (19)$$

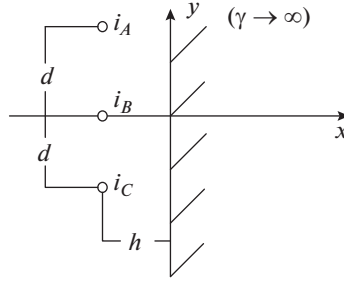


Рис. 4. Трехфазная линия вблизи плоской граничной поверхности.

Можно убедиться в том, что при выполнении условия, когда  $i_C = -i_A - i_B$ , квадратная скобка обращается в нуль, и остаются два последних члена

$$\begin{aligned} & -\frac{\mu_0 \times 2i_B^2}{2\pi \times 2h} \frac{1}{1 + \left(\frac{2h}{d}\right)^2} - \frac{\mu_0 \times 2(i_A^2 + i_A i_B)}{2\pi \times 2h} \frac{1}{1 + \left(\frac{h}{d}\right)^2} = \\ & = -\frac{\mu_0 \times 2i_B^2}{2\pi \times 2h} \frac{1}{1 + \left(\frac{2h}{d}\right)^2} + \frac{\mu_0 \times 2i_A i_C}{2\pi \times 2h} \frac{1}{1 + \left(\frac{h}{d}\right)^2}. \end{aligned} \quad (20)$$

Полагая теперь, что токи изменяются по синусоидальному закону и  $i_A = I_m \sin \omega t$ ,  $i_B = I_m \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right)$ ,  $i_C = I_m \sin\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right)$ , записываем выражения для  $i_B^2$  и  $i_A i_C$ :

$$\begin{aligned} i_B^2 &= I^2 \left[ 1 - \cos\left(2\omega t - \frac{4\pi}{3}\right) \right], \\ i_A i_C &= I_m^2 \sin \omega t \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) = I^2 \left[ \cos \frac{2\pi}{3} - \cos\left(2\omega t + \frac{2\pi}{3}\right) \right]. \end{aligned}$$

Тогда в среднем за период будем иметь следующее выражение для электродинамической силы

$$F_x|_{\gamma \rightarrow \infty} = -\frac{\mu_0 I^2}{2\pi 2h} \left[ \frac{2}{1 + \left(\frac{2h}{d}\right)^2} + \frac{1}{2 + \frac{1}{2} \left(\frac{2h}{d}\right)^2} \right]. \quad (21)$$

При этом обнаруживается расхождение во втором члене выражения (П-25) в [3], которое следует исправить путем замены в числителе второго члена (П-25) 2 на 1, а в знаменателе 1/8 на 1/2.

Рассмотрим теперь случай, когда двухпроводная линия проложена вдоль магнитных стенок с плоскими границами в соответствии с рис. 5.

Индуктивность линии на единицу длины равна:

$$L = \frac{\mu_0}{\pi} \ln(d/r + 1/4),$$

где  $r$  – радиус проводника, а вносимая индуктивность определяется выражением (11.31) в [1]

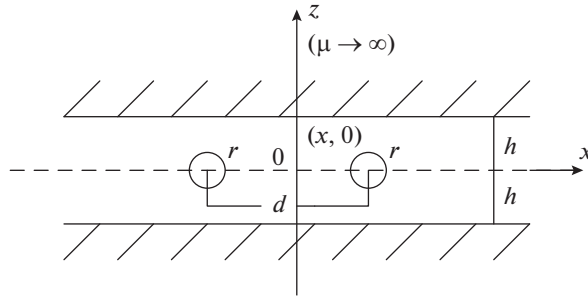


Рис. 5. Двухпроводная линия вдоль магнитной обшивки с расстоянием по  $x$  равным  $d$ .

$$\Delta L = \frac{\mu_0}{\pi} \ln \left( \frac{h}{\pi x} \operatorname{sh} \frac{\pi x}{h} \right), \quad (22)$$

где  $x = \frac{d}{2}$ .

Тогда сила электродинамического взаимодействия равна:

$$\begin{aligned} f &= \frac{1}{2} i^2 \frac{\partial (L + \Delta L)}{\partial d} = \frac{\mu_0 i^2}{2\pi d} + \frac{1}{2} i^2 \frac{\mu_0}{\pi} \frac{\partial}{\partial d} \ln \left( \frac{2h}{\pi d} \operatorname{sh} \frac{\pi d}{2h} \right) = \frac{\mu_0 i^2}{2\pi d} + \frac{1}{2} \frac{\mu_0 i^2}{\pi} \frac{\partial}{\partial d} \times \\ &\times \left[ \ln \frac{2h}{\pi d} + \ln \left( \operatorname{sh} \frac{\pi d}{2h} \right) \right] = \frac{\mu_0 i^2}{2\pi d} - \frac{\mu_0 i^2}{2\pi d} + \frac{1}{2} \frac{\mu_0 i^2}{\pi} \frac{\operatorname{ch} \left( \frac{\pi d}{2h} \right) \left( \frac{\pi}{2h} \right)}{\operatorname{sh} \left( \frac{\pi d}{2h} \right)} = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 i^2}{\pi d} \frac{\pi d}{2h} \operatorname{cth} \left( \frac{\pi d}{2h} \right). \end{aligned} \quad (23)$$

Полагая теперь  $\left( \frac{\pi d}{2h} \right)^2 < \pi^2$  или  $\left( \frac{d}{2h} \right)^2 < 1.0$ , будем иметь для этого случая

$$f \cong \frac{1}{2} \frac{\mu_0 i^2}{\pi d} \frac{\pi d}{2h} \left( \frac{2h}{\pi d} + \frac{\pi d}{2h \times 3} \right) = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 i^2}{\pi d} \left( 1 + \frac{\pi^2 d^2}{4h^2 \times 3} \right). \quad (24)$$

При  $h^2 \gg d^2$  результат сводится к силе взаимодействия двухпроводной линии без учета влияния плоского магнитного экрана, что и следовало ожидать.

Под конец рассмотрим еще одну ситуацию, когда двухпроводная линия проложена вдоль оси  $z$  внутри металлической обшивки с плоскими границами и с высокой магнитной проницаемостью материала ( $\mu \rightarrow \infty$ ) (рис. 6).

В соответствие с формулой (11–32) [1] индуктивность такой линии может быть записана в виде:

$$L = L_\Lambda + \Delta L = \frac{\mu_0}{\pi} \ln \left( \frac{d}{r} + \frac{1}{4} \right) + \frac{\mu_0}{\pi} \ln \left( \frac{4h}{\pi d} \operatorname{tg} \frac{\pi d}{4h} \right) = \frac{\mu_0}{\pi} \left[ \ln \left( \frac{d}{r} + \frac{1}{4} \right) + \ln \frac{4h}{\pi d} + \ln \operatorname{tg} \frac{\pi d}{4h} \right]. \quad (25)$$

Тогда

$$f_z = \frac{1}{2} i^2 \frac{\partial L}{\partial d} = \frac{\mu_0 i^2}{2\pi d} - \frac{\mu_0 i^2}{2\pi d} + \frac{\mu_0 i^2}{2\pi d} \frac{\partial}{\partial d} \ln \left( \operatorname{tg} \frac{\pi d}{4h} \right). \quad (26)$$

Производная по  $d$  приводит к выражению

$$f_d = \frac{\mu_0 i^2}{2\pi d} \frac{\frac{\pi d}{2h}}{\sin \left( \frac{\pi d}{2h} \right)} \cong \frac{\mu_0 i^2}{2\pi d} \frac{1}{1 - \left( \frac{\pi d}{h} \right)^2 \frac{1}{3!}}. \quad (27)$$

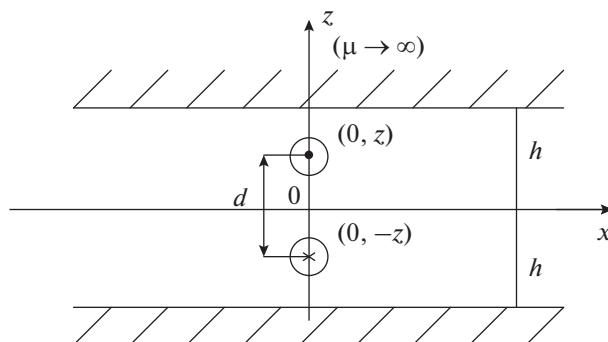


Рис. 6. Двухпроводная линия вдоль магнитной обшивки с  $z = d/2$ .

При  $\frac{d}{h} \ll 1.0$  результат для  $f_d$  вполне предсказуем.

Т.о., рассмотрены два подхода к вопросу о силах, действующих на двухпроводную и трехпроводную линию, проложенную вдоль протяженной листовой конструкции. Проведены необходимые сопоставления и отмечены некоторые расхождения с указанием по их исправлению. Получены выражения для силы взаимодействия в линии, проложенной вдоль магнитных стенок с плоскими границами.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Калантаров П.Л., Цейтлин Л.А. Расчет индуктивностей. Л. Энергоатомиздат. Ленингр. отд-ние. 1986. 488 с.
2. Цицикян Г.Н. Электродинамические силы в токоведущих частях электротехнических комплексов. Издание ФГУП “Крыловский государственный научный центр”. 2016. 93 с.
3. Кузнецов И.Ф., Цицикян Г.Н. Электродинамические усилия в токоведущих частях электрических аппаратов и токопровода. Л.: Энергоатомиздат. Ленингр. отд-ние, 1989. 176 с.
4. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. Под ред. Абрамовица М. и Стиган Н. М. Изд. “Наука”, 1979. 832 с.

#### Electrodynamic Forces Acting on a Line with Current Laid Along Extended Metal Constructions

G. N. Tsitsikyan<sup>a,\*</sup> and A. I. Senchenko<sup>a,\*\*</sup>

<sup>a</sup>TsNII SET branch of the Krylov State Research Centre, SPb, Russia

\*e-mail: george.20021940@mail.ru

\*\*e-mail: spb-1205@mail.ru

Expressions for electrodynamic forces in a system of straight lines with current laid along extended solid metal structures are obtained by two methods using self-induction coefficients introduced, in the limit when either the specific conductivity of the material or its magnetic permeability is very high, and using magnetic induction vectors. Expressions for the electrodynamic forces between a three-wire line and a solid metal structure are obtained for the practically important case of a three-phase current system.

**Keywords:** line with current, metal plating, electrodynamic forces, comparison of determination methods