ИЗВЕСТИЯ РАН. ЭНЕРГЕТИКА 2022, № 1, с. 26–46

УДК 539.3

АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ И ФУНКЦИИ ГРИНА ПЕРВОЙ И ВТОРОЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ С ГРАНИЦЕЙ, ДВИЖУЩЕЙСЯ ПО КОРНЕВОЙ ЗАВИСИМОСТИ

© 2022 г. Г. С. Кротов*

Образовательное учреждение профсоюзов высшего образования Академия труда и социальных отношений (АТИСО), Москва, Россия

**e-mail: yamaths555@gmail.com*

Поступила в редакцию 28.06.2021 г.
После доработки 03.08.2021 г.
Принята к публикации 11.08.2021 г.

Развит метод функций Грина для уравнения нестационарной теплопроводности в ограниченной области с границей, движущейся по закону $\beta\sqrt{t}$. Метод приводит к точным аналитическим решениям краевых задач в условиях температурного и теплового нагрева. Получен явный вид функций Грина для первой и второй краевых задач в описанной выше области. Показана эквивалентность результатов, полученных с помощью метода функции Грина и другими методами.

Ключевые слова: функция Грина, нестационарная теплопроводность, уравнение теплопроводности, задача Дирихле, задача Неймана, первая краевая задача, вторая краевая задача, движущаяся граница, интегральное преобразование, корневая зависимость, корень из “времени”, функция параболического цилиндра, корни функции параболического цилиндра при фиксированном значении аргумента, согласованность результатов

DOI: 10.31857/S0002331021040063

ВВЕДЕНИЕ

Нахождение решений задач нестационарной теплопроводности имеет как практический, так и сугубо научный интерес. Например, это касается различных вопросов термоупругости, гидромеханики, фазовых превращений, процессов диффузии, абляции, горения [1, 2]. Несмотря на хорошо развитую аналитическую теорию нестационарного тепломассопереноса и близких направлений, достигнутые за последнее время успехи в нахождении точных аналитических решений весьма незначительны. Среди них можно отметить, например, статьи [3–5], в которых получены функции Грина и точные аналитические решения задачи нестационарной теплопроводности в различных областях.

В настоящей работе получена функция Грина второй краевой задачи в ограниченной области, граница которой движется по закону $\beta\sqrt{t}$. Текущая статья является продолжением работы [5], в которой получена функция Грина первой краевой задачи в этой области. Несмотря на верность полученных в [5] результатов, в ней есть ряд неточностей, которые устранены в настоящей работе.

Попытка получить функции Грина второй краевой задачи нестационарной теплопроводности в областях $0 \le x \le \beta\sqrt{t}$ и $x \ge \beta\sqrt{t}$ была предпринята в работе Антимирова М.Я. [4]. Однако в ней были неверно выписаны граничные условия, что привело к неверным результатам. В работе [3] эта ошибка была устранена и получена верная функция Грина для области $x \ge \beta\sqrt{t}$. В текущей работе впервые получена функция Грина второй краевой задачи нестационарной теплопроводности в области $0 \le x \le \beta\sqrt{t}$. Верность ее аналитического вида подтверждается согласованностью данного результата с результатами, полученными методом рядов, развитым Э.М. Карташовым и Б.Я. Любовым в работе [8]. Вопросу согласованности с необходимыми для этого выводами посвящен 6-й раздел текущей работы.

Найденная функция Грина в свою очередь позволяет выписать точное аналитическое решение в ограниченной области $0 \le x \le \beta\sqrt{t}$ для произвольных условий теплового нагрева, которое приведено в текущей статье.

1. МЕТОД ФУНКЦИИ ГРИНА ДЛЯ ОБЛАСТИ $\Omega_t = \{(x,t); 0 \le x \le y(t), t \ge 0\}$

Для начала напомним метод функции Грина для ограниченной области с подвижной границей. Пусть $\Omega_t = \{(x,t); 0 \le x \le y(t), t \ge 0\}$, где $y(t)$ – непрерывно дифференцируемая функция. Тогда температурное поле $T(x,t)$ может быть найдено в области Ω_t как результат решения задачи

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + f(x,t), \quad 0 < x < y(t), \quad t > 0; \tag{1}$$

$$T(x,t)\big|_{t=0} = \varphi_0(x), \quad 0 \le x \le y(0), \quad y(0) \ge 0; \tag{2}$$

$$\left.\left(\beta_{11}\frac{\partial T(x,t)}{\partial x} + \beta_{12}T(x,t)\right)\right|_{x=0} = \beta_{13}\varphi_1(t), \quad t \ge 0; \tag{3}$$

$$\left.\left(\beta_{21}\frac{\partial T(x,t)}{\partial x} + \beta_{22}T(x,t)\right)\right|_{x=y(t)} = \beta_{23}\varphi_2(t), \quad t \ge 0. \tag{4}$$

В рамках такой постановки могут быть рассмотрены 1-я, 2-я и 3-я краевые задачи. Тогда (3)–(4) примут вид:

для первой краевой задачи при $\beta_{11} = \beta_{21} = 0$, $\beta_{12} = \beta_{13} = \beta_{22} = \beta_{23} = 1$

$$T(x,t)\big|_{x=0} = \varphi_1(t), \quad t \ge 0, \tag{5}$$

$$T(x,t)\big|_{x=y(t)} = \varphi_2(t), \quad t \ge 0; \tag{6}$$

для второй краевой задачи при $\beta_{11} = \beta_{21} = \beta_{13} = \beta_{23} = 1$, $\beta_{12} = \beta_{22} = 0$

$$\left.\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0} = \varphi_1(t), \quad t \ge 0, \tag{7}$$

$$\left.\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}\right|_{x=y(t)} = \varphi_2(t), \quad t \ge 0; \tag{8}$$

для третьей краевой задачи при $\beta_{11} = \beta_{21} = 1$, $\beta_{12} = \beta_{13} = -h_1$, $\beta_{22} = \beta_{23} = h_2$, где h_1, h_2 – относительные коэффициенты теплообмена

$$\left.\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0} = h_1\left(T(x,t) - \varphi_1(t)\right), \quad t \ge 0, \tag{9}$$

$$\left.\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}\right|_{x=y(t)} = -h_2\left(T(x,t)-\varphi_2(t)\right), \quad t \geq 0. \tag{10}$$

Функция Грина $G\left(x,t,x',\tau\right)$ для задачи (1)–(4) является решением

$$\frac{\partial G}{\partial t} = a\frac{\partial^2 G}{\partial x}, \quad 0 < x < y(t), \quad t > \tau, \tag{11}$$

$$G\left(x,t,x',\tau\right)\big|_{t=\tau} = \delta\left(x-x'\right), \quad 0 < \left(x',x\right) < y(\tau), \tag{12}$$

$$\left.\left(\beta_{11}\frac{\partial G}{\partial x}+\beta_{12}G\right)\right|_{x=0} = 0, \quad t > \tau, \tag{13}$$

$$\left.\left(\beta_{21}\frac{\partial G}{\partial x}+\beta_{22}G\right)\right|_{x=y(t)} = 0, \quad t > \tau. \tag{14}$$

В случае первой краевой задачи при $\beta_{11}=\beta_{21}=0$, $\beta_{12}=\beta_{22}=1$

$$G\left(x,t,x',\tau\right)\big|_{x=0} = 0, \quad t > \tau, \tag{15}$$

$$G\left(x,t,x',\tau\right)\big|_{x=y(t)} = 0, \quad t > \tau; \tag{16}$$

для второй краевой задачи при $\beta_{11}=\beta_{21}=1$, $\beta_{12}=\beta_{22}=0$

$$\left.\frac{\partial G\left(x,t,x',\tau\right)}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad t > \tau, \tag{17}$$

$$\left.\frac{\partial G\left(x,t,x',\tau\right)}{\partial x}\right|_{x=y(t)} = 0, \quad t > \tau; \tag{18}$$

для третьей краевой задачи при $\beta_{11}=\beta_{21}=1$, $\beta_{12}=-h_1$, $\beta_{22}=h_2$, где h_1, h_2 – относительные коэффициенты теплоообмена

$$\left.\frac{\partial G\left(x,t,x',\tau\right)}{\partial x}\right|_{x=0} = h_1\, G\left(x,t,x',\tau\right)\big|_{x=0}, \quad t > \tau, \tag{19}$$

$$\left.\frac{\partial G\left(x,t,x',\tau\right)}{\partial x}\right|_{x=y(t)} = -h_2\, G\left(x,t,x',\tau\right)\big|_{x=y(t)}, \quad t > \tau. \tag{20}$$

Здесь $\delta(z)$ – дельта-функция Дирака.

Интегральное представление (1)(4) будет иметь вид

$$\begin{gathered} T(x,t) = \int_0^{y(0)} T\left(x',\tau\right)G\left(x,t,x',\tau\right)\big|_{\tau=0}\,dx' + \int_0^t\int_0^{y(\tau)} f\left(x',\tau\right)G\left(x,t,x',\tau\right)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}x' + \\ + a\int_0^t\left\{\left[\alpha_{11}\frac{\partial T\left(x',\tau\right)}{\partial x'}+\alpha_{12}T\left(x',\tau\right)\right]\times\left[\gamma_{11}\frac{\partial G\left(x,t,x',\tau\right)}{\partial x'}+\gamma_{12}G\left(x,t,x',\tau\right)\right]\right\}_{x'=0} d\tau + \\ + a\int_0^t\left\{\left[\alpha_{21}\frac{\partial T\left(x',\tau\right)}{\partial x'}+\alpha_{22}T\left(x',\tau\right)\right]\left[\gamma_{21}\frac{\partial G\left(x,t,x',\tau\right)}{\partial x'}+\gamma_{22}G\left(x,t,x',\tau\right)\right]\right\}_{x'=y(\tau)} d\tau, \end{gathered} \tag{21}$$

где

$$\alpha_{i1} = \gamma_{i2} = 0; \quad \alpha_{i2} = (-1)^{i-1}, \quad \gamma_{i1} = 1 \quad \text{в случае первой краевой задачи;}$$

$$\alpha_{i2} = \gamma_{i1} = 0; \quad \alpha_{i1} = (-1)^{i}, \quad \gamma_{i2} = 1 \quad \text{в случае второй краевой задачи;}$$

$$\alpha_{i1} = (-1)^{i}, \quad \alpha_{i2} = h_i, \quad \gamma_{i1} = 0, \quad \gamma_{i2} = 1 \quad \text{в случае третьей краевой задачи.}$$

2. ПЕРВАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА В ОБЛАСТИ $\Omega_t = \{(x,t); 0 \le x \le \beta\sqrt{t}, t \ge 0\}$

Температурное поле может быть найдено в результате решения задачи

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + f(x,t), \quad 0 < x < \beta\sqrt{t}, \quad t > 0, \tag{22}$$

$$T(x,t)\big|_{x=0} = \varphi_1(t), \quad t \ge 0, \tag{23}$$

$$T(x,t)\big|_{x=\beta\sqrt{t}} = \varphi_2(t), \quad t \ge 0. \tag{24}$$

Начальное условие (2) в этом случае не задается, так как при $t = 0$ область вырождается в точку. Функция Грина $G(x,t,x',\tau)$ для задачи (22)–(24) будет являться решением задачи

$$\frac{\partial G}{\partial t} = a\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \beta\sqrt{t}, \quad t > \tau, \tag{25}$$

$$G(x,t,x',\tau)\big|_{t=\tau} = \delta(x - x'), \quad 0 < x < \beta\sqrt{\tau}, \tag{26}$$

$$G(x,t,x',\tau)\big|_{x=0} = 0, \quad t > \tau, \tag{27}$$

$$G(x,t,x',\tau)\big|_{x=\beta\sqrt{t}} = 0, \quad t > \tau. \tag{28}$$

Интегральное представление будет иметь вид

$$T(x,t) = a\int_0^t \left[T(x',\tau)\frac{\partial G}{\partial x'}\bigg|_{x'=0} - T(x',\tau)\frac{\partial G}{\partial x'}\bigg|_{x'=\beta\sqrt{\tau}} \right] d\tau + \int_0^t d\tau \int_0^{\beta\sqrt{\tau}} f(x',\tau)\, G(x,t,x',\tau)\, dx'. \tag{29}$$

3. ФУНКЦИЯ ГРИНА ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ В ОБЛАСТИ $\Omega_t = \{(x,t); 0 \le x \le \beta\sqrt{t}, t \ge 0\}$

Найдем аналитический вид функции Грина $G(x,t,x',\tau)$ задачи (25)–(28). Эту задачу можно переписать в эквивалентной форме

$$\frac{\partial G}{\partial t} = a\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \delta(t-\tau)\,\delta(x - x'), \quad 0 < x < \beta\sqrt{t}, \quad t > \tau, \tag{30}$$

$$G(x,t,x',\tau)\big|_{t=0} = 0, \quad x \ge 0, \tag{31}$$

$$G(x,t,x',\tau)\big|_{x=0} = 0, \quad t > \tau, \tag{32}$$

$$G(x,t,x',\tau)\big|_{x=\beta\sqrt{t}} = 0, \quad t > \tau. \tag{33}$$

Введем переменные

$$x_1 = \frac{x}{\sqrt{2at}}, \quad \theta = \frac{1}{2}\ln t \ (t = e^{2\theta}). \tag{34}$$

Тогда задача (30)–(33) примет вид

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x_1^2}+x_1\frac{\partial G}{\partial x_1}=\frac{\partial G}{\partial\theta}-2\mathrm{e}^{2\theta}\delta\left(x_1\sqrt{2a}\mathrm{e}^{\theta}-x'\right)\delta\left(e^{2\theta}-\tau\right),\quad 0<x_1<\frac{\beta}{\sqrt{2a}},\quad -\infty<\theta<+\infty. \quad (35)$$

$$G\big|_{x_1=0}=0,\quad G\big|_{x_1=\frac{\beta}{\sqrt{2a}}}=0,\quad \lim_{\theta\to-\infty}G=0. \quad (36)$$

Перейдем в пространство изображений Фурье

$$\bar{G}\left(x,i\lambda,x',\tau\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}G\left(x_1,\theta,x',\tau\right)\mathrm{e}^{-i\lambda\theta}d\theta. \quad (37)$$

Предварительно вычислим интеграл

$$I=2\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{2\theta}\delta\left(x_1\sqrt{2a}e^{\theta}-x'\right)\delta\left(e^{\theta}-\tau\right)e^{-i\lambda\theta}d\theta=\delta\left(x_1\sqrt{2a\tau}-x'\right)\tau^{-\frac{i\lambda}{2}}. \quad (38)$$

Вычисление интеграла (38) можно найти, например, в [3], [5].

Применим теперь интегральное преобразование (37) к уравнению (35), считая $G\to 0$ при $\theta\to\infty$ и вводя обозначения $\beta_0=\frac{\beta}{\sqrt{2a}}$, $\xi_0=\frac{x'}{\sqrt{2a\tau}}$, получим

$$\frac{d^2\bar{G}}{dx_1^2}+x_1\frac{d\bar{G}}{dx_1}-i\lambda\bar{G}=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\delta\left(x_1\sqrt{2a\tau}-x'\right)\tau^{-\frac{i\lambda}{2}}, \quad (39)$$

$$\bar{G}\big|_{x_1=0}=0,\quad \bar{G}\big|_{x_1=\beta_0}=0. \quad (40)$$

Задача (39)–(40) эквивалентна следующей:

$$\bar{G}''+x_1\bar{G}'-i\lambda\bar{G}=0, \quad (41)$$

$$\bar{G}\big|_{x_1=0}=0, \quad (42)$$

$$\bar{G}\big|_{x_1=\beta_0}=0, \quad (43)$$

$$\bar{G}\big|_{x_1=\xi_0-0}=\bar{G}\big|_{x_1=\xi_0+0}, \quad (44)$$

$$\left.\frac{d\bar{G}}{dx_1}\right|_{x_1=\xi_0-0}-\left.\frac{d\bar{G}}{dx_1}\right|_{x_1=\xi_0+0}=\frac{1}{2\sqrt{a\pi}}\tau^{-\frac{1}{2}(i\lambda+1)}. \quad (45)$$

Вопрос эквивалентности задач (39)–(40) и (41)–(45) подробно рассмотрен в [3].

Уравнение (41) является уравнением Вебера, частным решение которого являются функции

$$\begin{cases} e^{-\frac{x_1^2}{4}}D_{-1-i\lambda}\left(x_1\right),\quad e^{-\frac{x_1^2}{4}}D_{-1-i\lambda}\left(x_1\right),\\ e^{-\frac{x_1^2}{4}}D_{i\lambda}\left(ix_1\right),\quad e^{-\frac{x_1^2}{4}}D_{i\lambda}\left(-ix_1\right),\end{cases} \quad (46)$$

где $D_\nu\left(z\right)$ – функция параболического цилиндра. Функции $D_\nu\left(z\right)$ и $D_\nu\left(-z\right)$ – линейно независимы, если ν не является целым числом, а функции $D_{-1-\nu}\left(z\right)$ и $D_\nu\left(\pm iz\right)$ линейно независимы при $\forall\nu$. Каждая функция из (46) может быть выражена линейно через две другие. Поэтому в качестве общего решения уравнения (41) можно взять любую пару линейно независимых функций (46), например, первую и третью. Тогда решение уравнения (41) примет вид:

$$\bar{G} = e^{-\frac{x_1^2}{4}}\left[c_1 D_{-1-i\lambda}(x_1) + c_2 D_{i\lambda}(ix_1)\right], \quad 0 < x_1 < \xi_0, \tag{47}$$

$$\bar{G} = e^{-\frac{x_1^2}{4}}\left[c_3 D_{-1-i\lambda}(x_1) + c_4 D_{i\lambda}(ix_1)\right], \quad \xi_0 < x_1 < \beta_0. \tag{48}$$

Используя граничные условия (44) и (45), получим систему

$$\begin{cases} c_1 D_{-1-i\lambda}(\xi_0) + c_2 D_{i\lambda}(i\xi_0) = c_3 D_{-1-i\lambda}(\xi_0) + c_4 D_{i\lambda}(i\xi_0), \\ c_1\left[-\frac{x_1}{2}D_{-1-i\lambda}(x_1) + \frac{dD_{-1-i\lambda}(x_1)}{dx_1}\right]\Bigg|_{x_1=\xi_0-0} + c_2\left[-\frac{x_1}{2}D_{i\lambda}(ix_1) + \frac{dD_{i\lambda}(ix_1)}{\mathrm{d}x_1}\right]\Bigg|_{x_1=\xi_0-0} = \\ = c_3\left[-\frac{x_1}{2}D_{-1-i\lambda}(x_1) + \frac{dD_{-1-i\lambda}(x_1)}{dx_1}\right]\Bigg|_{x_1=\xi_0+0} + c_4\left[-\frac{x_1}{2}D_{i\lambda}(ix_1) + \frac{dD_{i\lambda}(ix_1)}{dx_1}\right]\Bigg|_{x_1=\xi_0+0} + \\ + \frac{1}{2\sqrt{a\pi}}e^{\frac{\xi_0^2}{4}}\tau^{-\frac{1}{2}(i\lambda+1)}. \end{cases} \tag{49}$$

Найдем выражения постоянных c_1, c_2 через c_3, c_4. Для этого воспользуемся методом Крамера и выражением для вронскиана функции параболического цилиндра [10]

$$D_\nu(z)\frac{d}{dz}D_{-\nu-1}(iz) - D_{-\nu-1}(iz)\frac{d}{dz}D_\nu(z) = -ie^{\frac{-\nu\pi i}{2}}. \tag{50}$$

Получаем $c_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$, $c_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$, где

$$\Delta = \begin{vmatrix} D_{-1-i\lambda}(x_1) & D_{i\lambda}(ix_1) \\ \left[-\frac{x_1}{2}D_{-1-i\lambda}(x_1) + \frac{dD_{-1-i\lambda}(x_1)}{dx_1}\right] & \left[-\frac{x_1}{2}D_{i\lambda}(ix_1) + \frac{dD_{i\lambda}(ix_1)}{dx_1}\right] \end{vmatrix}_{x_1=\xi_0+0} = e^{-\frac{\lambda\pi}{2}}, \tag{51}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \left[c_3 D_{-1-i\lambda}(x_1) + c_4 D_{i\lambda}(ix_1)\right]\Big|_{x_1=\xi_0+0} & D_{i\lambda}(ix_1)\Big|_{x_1=\xi_0-0} \\ \begin{matrix} c_3\left[-\frac{x_1}{2}D_{-1-i\lambda}(x_1) + \frac{dD_{-1-i\lambda}(x_1)}{dx_1}\right]\Bigg|_{x_1=\xi_0+0} + \\ + c_4\left[-\frac{x_1}{2}D_{i\lambda}(ix_1) + \frac{dD_{i\lambda}(ix_1)}{dx_1}\right]\Bigg|_{x_1=\xi_0+0} + \\ + \frac{1}{2\sqrt{a\pi}}e^{\frac{\xi_0^2}{4}}\tau^{-\frac{1}{2}(i\lambda+1)} \end{matrix} & \left[-\frac{x_1}{2}D_{i\lambda}(ix_1) + \frac{dD_{i\lambda}(ix_1)}{dx_1}\right]\Bigg|_{x_1=\xi_0-0} \end{vmatrix}, \tag{52}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} D_{-1-i\lambda}(x_1)\Big|_{x_1=\xi_0-0} & \left[c_3 D_{-1-i\lambda}(x_1) + c_4 D_{i\lambda}(ix_1)\right]\Big|_{x_1=\xi_0+0} \\ \left[-\frac{x_1}{2}D_{-1-i\lambda}(x_1) + \frac{dD_{-1-i\lambda}(x_1)}{dx_1}\right]\Bigg|_{x_1=\xi_0-0} & \begin{matrix} c_3\left[-\frac{x_1}{2}D_{-1-i\lambda}(x_1) + \frac{dD_{-1-i\lambda}(x_1)}{dx_1}\right]\Bigg|_{x_1=\xi_0+0} + \\ + c_4\left[-\frac{x_1}{2}D_{i\lambda}(ix_1) + \frac{dD_{i\lambda}(ix_1)}{dx_1}\right]\Bigg|_{x_1=\xi_0+0} + \\ + \frac{1}{2\sqrt{a\pi}}e^{\frac{\xi_0^2}{4}}\tau^{-\frac{1}{2}(i\lambda+1)} \end{matrix} \end{vmatrix}. \tag{53}$$

Преобразовывая далее (52) и (53), находим

$$\Delta_1 = e^{-\frac{\lambda\pi}{2}} c_3 - D_{i\lambda}(i\xi_0)\frac{e^{\frac{\xi_0^2}{4}}\tau^{-\frac{1}{2}(i\lambda+1)}}{2\sqrt{a\pi}}, \tag{54}$$

$$\Delta_2 = e^{-\frac{\lambda\pi}{2}} c_4 + D_{-1-i\lambda}(\xi_0)\frac{e^{\frac{\xi_0^2}{4}}\tau^{-\frac{1}{2}(i\lambda+1)}}{2\sqrt{a\pi}}. \tag{55}$$

Откуда получаем

$$c_1 = c_3 - D_{i\lambda}(i\xi_0)\frac{e^{\frac{\xi_0^2}{4}+\frac{\lambda\pi}{2}}\tau^{-\frac{1}{2}(i\lambda+1)}}{2\sqrt{a\pi}}, \tag{56}$$

$$c_2 = c_4 + D_{-1-i\lambda}(\xi_0)\frac{e^{\frac{\xi_0^2}{4}+\frac{\lambda\pi}{2}}\tau^{-\frac{1}{2}(i\lambda+1)}}{2\sqrt{a\pi}}. \tag{57}$$

Используя условия (42) $\bar{G}\big|_{x_1=0} = 0$ и (43) $\bar{G}\big|_{x_1=\beta_o} = 0$, получаем систему на c_3 и c_4:

$$\begin{cases} \left[c_3 - D_{i\lambda}(\mathrm{i}\xi_0)\dfrac{e^{\frac{\xi_0^2}{4}+\frac{\lambda\pi}{2}}\tau^{-\frac{1}{2}(i\lambda+1)}}{2\sqrt{a\pi}}\right]D_{-1-i\lambda}(0) + \left[c_4 + D_{-1-i\lambda}(\xi_0)\dfrac{e^{\frac{\xi_0^2}{4}+\frac{\lambda\pi}{2}}\tau^{-\frac{1}{2}(i\lambda+1)}}{2\sqrt{a\pi}}\right]D_{i\lambda}(0) = 0, \\ c_3 D_{-1-i\lambda}(\beta_0) + c_4 D_{i\lambda}(\mathrm{i}\beta_0) = 0. \end{cases} \tag{58}$$

Следовательно,

$$c_3 = D_{i\lambda}(i\beta_0)\frac{e^{\frac{\xi_0^2}{4}+\frac{\lambda\pi}{2}}\tau^{-\frac{1}{2}(i\lambda+1)}}{2\sqrt{a\pi}}\frac{D_{i\lambda}(i\xi_0)D_{-1-i\lambda}(0) - D_{-1-i\lambda}(\xi_0)D_{i\lambda}(0)}{D_{i\lambda}(i\beta_0)D_{-1-i\lambda}(0) - D_{-1-i\lambda}(\beta_0)D_{i\lambda}(0)} \tag{59}$$

или

$$c_3 = \frac{e^{\frac{\xi_0^2}{4}+\frac{\lambda\pi}{2}}\tau^{-\frac{1}{2}(i\lambda+1)}D_{i\lambda}(i\beta_0)}{2\sqrt{a\pi}[D_{i\lambda}(i\beta_0)D_{-1-i\lambda}(0) - D_{-1-i\lambda}(\beta_0)D_{i\lambda}(0)]}[D_{-1-i\lambda}(0)D_{i\lambda}(i\xi_0) - D_{i\lambda}(0)D_{-1-i\lambda}(\xi_0)]. \tag{60}$$

Так как $c_4 = -c_3\dfrac{D_{-1-i\lambda}(\beta_0)}{D_{i\lambda}(i\beta_0)}$, то

$$c_4 = -\frac{e^{\frac{\xi_0^2}{4}+\frac{\lambda\pi}{2}}\tau^{-\frac{1}{2}(i\lambda+1)}D_{-1-i\lambda}(i\beta_0)}{2\sqrt{a\pi}[D_{i\lambda}(i\beta_0)D_{-1-i\lambda}(0) - D_{-1-i\lambda}(\beta_0)D_{i\lambda}(0)]}[D_{-1-i\lambda}(0)D_{i\lambda}(i\xi_0) - D_{i\lambda}(0)D_{-1-i\lambda}(\xi_0)]. \tag{61}$$

Подставляя (60) и (61) в (56) и (57), находим c_1, c_2:

$$c_1 = \frac{e^{\frac{\xi_0^2}{4}+\frac{\lambda\pi}{2}}\tau^{-\frac{1}{2}(i\lambda+1)}}{2\sqrt{a\pi}}\frac{D_{i\lambda}(0)[D_{-1-i\lambda}(\beta_0)D_{i\lambda}(i\xi_0) - D_{i\lambda}(i\beta_0)D_{-1-i\lambda}(\xi_0)]}{D_{i\lambda}(i\beta_0)D_{-1-i\lambda}(0) - D_{-1-i\lambda}(\beta_0)D_{i\lambda}(0)}, \tag{62}$$

$$c_2 = \frac{e^{\frac{\xi_0^2}{4}+\frac{\lambda\pi}{2}}\tau^{-\frac{1}{2}(i\lambda+1)}}{2\sqrt{a\pi}}\frac{D_{-1-i\lambda}(0)[-D_{-1-i\lambda}(\beta_0)D_{i\lambda}(i\xi_0) + D_{i\lambda}(i\beta_0)D_{-1-i\lambda}(\xi_0)]}{D_{i\lambda}(i\beta_0)D_{-1-i\lambda}(0) - D_{-1-i\lambda}(\beta_0)D_{i\lambda}(0)}. \tag{63}$$

Тогда решение задачи (41)–(45) примет вид

$$\bar{G} = \begin{cases} \dfrac{e^{\frac{\xi_0^2}{4}+\frac{\lambda\pi}{2}-\frac{x_1^2}{4}}\tau^{-\frac{1}{2}(i\lambda+1)}}{2\sqrt{a\pi}} \dfrac{D_{-1-i\lambda}(\beta_0)\,D_{i\lambda}(i\xi_0) - D_{i\lambda}(i\beta_0)\,D_{-1-i\lambda}(\xi_0)}{D_{i\lambda}(i\beta_0)\,D_{-1-i\lambda}(0) - D_{-1-i\lambda}(\beta_0)\,D_{i\lambda}(0)} [D_{-1-i\lambda}(x_1)D_{i\lambda}(i\xi_0) - \\ \qquad - D_{i\lambda}(ix_1)D_{-1-i\lambda}(0)], \quad 0 < x_1 < \xi_0, \\ \dfrac{e^{\frac{\xi_0^2}{4}+\frac{\lambda\pi}{2}-\frac{x_1^2}{4}}\tau^{-\frac{1}{2}(i\lambda+1)}}{2\sqrt{a\pi}} \dfrac{D_{-1-i\lambda}(0)\,D_{i\lambda}(i\xi_0) - D_{i\lambda}(0)\,D_{-1-i\lambda}(\xi_0)}{D_{i\lambda}(i\beta_0)\,D_{-1-i\lambda}(0) - D_{-1-i\lambda}(\beta_0)\,D_{i\lambda}(0)} [D_{-1-i\lambda}(x_1)D_{i\lambda}(i\beta_0) - \\ \qquad - D_{i\lambda}(ix_1)D_{-1-i\lambda}(\beta_0)], \quad \xi_0 < x_1 < \beta_0. \end{cases} \tag{64}$$

Используя замену (34) и применяя обратное преобразование Фурье

$$\begin{gathered} G(x_1, t, x', \tau) = G(x_1, \theta, x', \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{G}(x_1, i\lambda, x', \tau)\, e^{i\lambda\theta} d\lambda = -\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \bar{G} \times \\ \times (x_1, i\lambda, x', \tau)\, e^{i\lambda\theta} d(i\lambda) = -\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \bar{G}(x_1, p, x', \tau)\, e^{p\theta} dp = -\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \bar{G}(x_1, p, x', \tau) \times \\ \times e^{\frac{p}{2}\ln t} dp = -\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \bar{G}(x_1, p, x', \tau)\, t^{p/2} dp \end{gathered} \tag{65}$$

к решению (64), получаем

$$\begin{gathered} G(x_1, t, \xi_0, \tau) = \frac{e^{\frac{\xi_0^2}{4}-\frac{x_1^2}{4}}}{2\pi i\sqrt{2a\tau}} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{D_p(i\xi_0)D_{-p-1}(\beta_0) - D_p(i\beta_0)D_{-p-1}(\xi_0)}{D_p(i\beta_0)D_{-p-1}(0) - D_p(0)D_{-p-1}(\beta_0)} [D_p(0)D_{-p-1}(x_1) - \\ - D_{-p-1}(0)D_p(ix_1)]\, e^{-\frac{\pi}{2}pi} \left(\frac{t}{\tau}\right)^{\frac{p}{2}} dp. \end{gathered} \tag{66}$$

В переменных x, x', t, τ функция Грина (66) будет записана в виде

$$\begin{gathered} G(x, t, x', \tau) = \frac{e^{\frac{1}{8a}\left[\frac{x'^2}{\tau}-\frac{x^2}{t}\right]}}{2\pi i\sqrt{2a\tau}} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{D_p\left(\frac{ix'}{\sqrt{2a\tau}}\right) D_{-p-1}\left(\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right) - D_{-p-1}\left(\frac{x'}{\sqrt{2a\tau}}\right) D_p\left(i\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right)}{D_{-p-1}\left(i\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right) D_{-p-1}(0) - D_p(0)\, D_{-p-1}\left(\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right)} \times \\ \times \left[D_p(0)\, D_{-p-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2at}}\right) - D_{-p-1}(0)\, D_p\left(i\frac{x}{\sqrt{2at}}\right)\right] e^{-\frac{\pi}{2}pi} \left(\frac{t}{\tau}\right)^{\frac{p}{2}} dp. \end{gathered} \tag{67}$$

Целью дальнейших преобразований будет получение аналитического вида функции Грина задачи (41)–(45) в виде ряда. Для этого, используя согласно [9]

$$D_p(iz) = \frac{\Gamma(p+1)}{\sqrt{2\pi}} \left[e^{-\frac{\pi}{2}pi} D_{-p-1}(z) + e^{\frac{\pi}{2}pi} D_{-p-1}(-z)\right], \tag{68}$$

получаем

$$\begin{gathered} G(x_1, t, \xi_0, \tau) = \frac{e^{\frac{\xi_0^2}{4}-\frac{x_1^2}{4}}}{4\pi i\sqrt{a\pi\tau}} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \Gamma(p+1) \frac{D_{-p-1}(-\xi_0)\, D_{-p-1}(\beta_0) - D_{-p-1}(\xi_0)\, D_{-p-1}(-\beta_0)}{D_{-p-1}(-\beta_0) - D_{-p-1}(\beta_0)} \times \\ \times [D_{-p-1}(x_1) - D_{-p-1}(-x_1)] \left(\frac{t}{\tau}\right)^{\frac{p}{2}} dp. \end{gathered} \tag{69}$$

В переменных x, x', t, τ (69) примет вид

$$G(x,t,x',\tau)=\frac{e^{\frac{1}{8a}\left[\frac{x'^2}{\tau}-\frac{x^2}{t}\right]}}{4\pi i\sqrt{a\pi\tau}}\int\limits_{-i\infty}^{+i\infty}\Gamma(p+1)\frac{D_{-p-1}\left(-\frac{x'}{\sqrt{2a\tau}}\right)D_{-p-1}\left(\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right)-D_{-p-1}\left(\frac{x'}{\sqrt{2a\tau}}\right)D_{-p-1}\left(-\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right)}{D_{-p-1}\left(-\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right)-D_{-p-1}\left(\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right)}\times$$

$$\times\left[D_{-p-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2at}}\right)-D_{-p-1}\left(-\frac{x}{\sqrt{2at}}\right)\right]\left(\frac{t}{\tau}\right)^{\frac{p}{2}}dp. \tag{70}$$

Пусть

$$F(p)=\Gamma(p+1)\frac{D_{-p-1}(-\xi_0)\,D_{-p-1}(\beta_0)-D_{-p-1}(\xi_0)\,D_{-p-1}(-\beta_0)}{D_{-p-1}(-\beta_0)-D_{-p-1}(\beta_0)}\times$$

$$\times\left[D_{-p-1}(x_1)-D_{-p-1}(-x_1)\right]\left(\frac{t}{\tau}\right)^{\frac{p}{2}}.$$

Так как функция $D_p(z)$ является целой функцией переменного z и параметра p, то подынтегральная функция $F(p)$ является аналитической во всей комплексной плоскости p, за исключением простых полюсов в точках $p=-n$ $(n=1,2,3,\ldots)$ и в точках $p=p_n$, где p_n – нецелые корни уравнения

$$D_{-p-1}(-\beta_0)-D_{-p-1}(\beta_0)=0. \tag{71}$$

Решение уравнений типа (71) представляет собой самостоятельную задачу. Насколько известно автору, работы [6] и [7] являются первыми, рассматривающими этот вопрос. Далее по теореме о вычетах

$$G(x_1,t,\xi_0,\tau)=\frac{e^{\frac{\xi_0^2}{4}-\frac{x_1^2}{4}}}{4\pi i\sqrt{a\pi\tau}}\left(2\pi i\left[\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname*{res}_{p=-n}F(p)+\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname*{res}_{p=p_n}F(p)\right]\right). \tag{72}$$

Используя свойства гамма-функции, функции параболического цилиндра при целых p, а также пользуясь соотношениями для функции Эрмита [9]

$$D_n(z)=e^{-\frac{z^2}{4}}2^{-\frac{n}{2}}H_n\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right),\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(x)\,H_n(y)}{2^n n!}t^n=\left(1-t^2\right)^{-\frac{1}{2}}\exp\left(\frac{2xyt-\left(x^2+y^2\right)t^2}{1-t^2}\right),$$

$$|t|<1,\quad H_n(-z)=(-1)^n H_n(z);\quad D_n(-z)=(-1)^n D_n(z); \tag{73}$$

$$\lim_{p\to -n}(p+n)\Gamma(p+1)=\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!},\quad n=1,2\ldots,$$

получаем, что первая сумма в (72) равна нулю. Это означает, что функция Грина имеет следующий вид

$$G(x_1,t,\xi_0,\tau)=\frac{e^{\frac{\xi_0^2}{4}-\frac{x_1^2}{4}}}{2\sqrt{a\pi\tau}}\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname*{res}_{p=p_n}F(p)=\frac{e^{\frac{\xi_0^2}{4}-\frac{x_1^2}{4}}}{2\sqrt{a\pi\tau}}\sum_{n=1}^{\infty}\Gamma(p_n+1)\times$$

$$\times\frac{D_{-p_n-1}(-\xi_0)\,D_{-p_n-1}(\beta_0)-D_{-p_n-1}(\xi_0)\,D_{-p_n-1}(-\beta_0)}{\frac{\partial}{\partial p}\left[D_{-p-1}(-\beta_0)-D_{-p-1}(\beta_0)\right]\Big|_{p=p_n}}\left[D_{-p_n-1}(x_1)-D_{-p_n-1}(-x_1)\right]\left(\frac{t}{\tau}\right)^{\frac{p_n}{2}}, \tag{74}$$

где p_n – действительные отрицательные нецелые корни уравнения (71).

Переходя к переменным x, x', t, τ в (74), получаем функцию Грина в виде ряда

$$G(x,t,x',\tau) = \frac{e^{\frac{1}{8a}\left(\frac{x'^2}{\tau}-\frac{x^2}{t}\right)}}{2\sqrt{a\pi\tau}} \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma(p_n+1) \times$$
$$\times \frac{D_{-p_n-1}\left(-\frac{x'}{\sqrt{2a\tau}}\right) D_{-p_n-1}\left(\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right) - D_{-p_n-1}\left(-\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right) D_{-p_n-1}\left(\frac{x'}{\sqrt{2a\tau}}\right)}{\frac{\partial}{\partial p}\left[D_{-p-1}\left(-\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right) - D_{-p-1}\left(\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right)\right]\Big|_{p=p_n}} \times \tag{75}$$
$$\times \left[D_{-p_n-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2at}}\right) - D_{-p_n-1}\left(-\frac{x}{\sqrt{2at}}\right)\right]\left(\frac{t}{\tau}\right)^{\frac{p_n}{2}},$$

где p_n – действительные отрицательные нецелые корни уравнения (71).

Подведем итог этой части работы. Формулы (67) и (70) – явный вид функции Грина первой краевой задачи в области $\Omega_t = \left\{(x,t); 0 \le x \le \beta\sqrt{t}, t \ge 0\right\}$ *в интегральной форме*, а формула (75) – *в виде ряда*.

4. ВТОРАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА В ОБЛАСТИ $\Omega_t = \left\{(x,t); 0 \le x \le \beta\sqrt{t}, t \ge 0\right\}$

Температурное поле может быть найдено в результате решения задачи

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + f(x,t), \quad 0 < x < \beta\sqrt{t}, \quad t > 0, \tag{76}$$

$$\left.\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0} = \varphi_1(t), \quad t \ge 0, \tag{77}$$

$$\left.\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}\right|_{x=\beta\sqrt{t}} = \varphi_2(t), \quad t \ge 0. \tag{78}$$

Начальное условие (2), как и в случае первой краевой задачи, не задается, так как при $t = 0$ область вырождается в точку. Функция Грина $G(x,t,x',\tau)$ для задачи (76)–(78) будет являться решением задачи

$$\frac{\partial G}{\partial t} = a\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \beta\sqrt{t}, \quad t > \tau, \tag{79}$$

$$G(x,t,x',\tau')\big|_{t=\tau} = \delta(x-x'), \quad 0 < x < \beta\sqrt{\tau}, \tag{80}$$

$$\left.\frac{\partial G(x,t,x',\tau)}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad t > \tau, \tag{81}$$

$$\left.\frac{\partial G(x,t,x',\tau)}{\partial x}\right|_{x=\beta\sqrt{t}} = 0, \quad t > \tau. \tag{82}$$

Интегральное представление будет иметь вид

$$T(x,t) = a\int_0^t \left[\frac{\partial T(x',\tau)}{\partial x'} G\right]\Big|_{x'=\beta\sqrt{\tau}} d\tau - a\int_0^t \left[\frac{\partial T(x',\tau)}{\partial x'} G\right]\Big|_{x'=0} d\tau + \int_0^t d\tau \int_0^{\beta\sqrt{\tau}} f(x',\tau) \times$$
$$\times G(x,t,x',\tau)\,dx'. \tag{83}$$

5. ФУНКЦИЯ ГРИНА ВТОРОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ В ОБЛАСТИ $\Omega_t = \left\{(x,t); 0 \le x \le \beta\sqrt{t}, t \ge 0\right\}$

Найдем аналитический вид функции Грина $G\left(x,t,x',\tau\right)$ задачи (79)–(82). Эту задачу можно переписать в эквивалентной форме

$$\frac{\partial G}{\partial t} = a\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} + \delta(t-\tau)\delta(x-x'), \quad 0 < x < \beta\sqrt{t}, \quad t > \tau, \tag{84}$$

$$G\left(x,t,x',\tau\right)\Big|_{t=0} = 0, \quad x \ge 0, \tag{85}$$

$$\left.\frac{\partial G\left(x,t,x',\tau\right)}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad t > \tau, \tag{86}$$

$$\left.\frac{\partial G\left(x,t,x',\tau\right)}{\partial x}\right|_{x=\beta\sqrt{t}} = 0, \quad t > \tau. \tag{87}$$

В переменных (34) задача (84)–(87) примет вид

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x_1^2} + x_1\frac{\partial G}{\partial x_1} = \frac{\partial G}{\partial \theta} - 2e^{2\theta}\delta\left(\sqrt{2a}x_1e^{\theta} - x'\right)\delta\left(e^{2\theta} - \tau\right), \quad 0 < x_1 < \frac{\beta}{\sqrt{2a}}, \tag{88}$$
$$-\infty < \theta < +\infty,$$

$$\left.\frac{\partial G}{\partial x_1}\right|_{x_1=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial G}{\partial x_1}\right|_{x_1=\frac{\beta}{\sqrt{2a}}} = 0, \quad \lim_{\theta\to-\infty} G = 0. \tag{89}$$

Применяя к уравнению (88) интегральное преобразование Фурье (37), воспользовавшись интегралом (38) и вводя обозначения $\beta_0 = \dfrac{\beta}{\sqrt{2a}}$, $\xi_0 = \dfrac{x'}{\sqrt{2a\tau}}$, получим

$$\frac{d^2\bar{G}}{dx_1^2} + x_1\frac{d\bar{G}}{dx_1} - i\lambda\bar{G} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\delta\left(x_1\sqrt{2a\tau} - x'\right)\tau^{-\frac{i\lambda}{2}}, \tag{90}$$

$$\left.\frac{\partial\bar{G}}{\partial x_1}\right|_{x_1=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial\bar{G}}{\partial x_1}\right|_{x_1=\beta_0} = 0. \tag{91}$$

Задача (90)–(91) эквивалентна следующей:

$$\bar{G}'' + x_1\bar{G}' - i\lambda\bar{G} = 0, \tag{92}$$

$$\left.\frac{d\bar{G}}{dx_1}\right|_{x_1=0} = 0, \tag{93}$$

$$\left.\frac{d\bar{G}}{dx_1}\right|_{x_1=\beta_0} = 0, \tag{94}$$

$$\bar{G}\Big|_{x_1=\xi_0-0} = \bar{G}\Big|_{x_1=\xi_0+0}, \tag{95}$$

$$\left.\frac{d\bar{G}}{dx_1}\right|_{x_1=\xi_0-0} - \left.\frac{d\bar{G}}{dx_1}\right|_{x_1=\xi_0+0} = \frac{1}{2\sqrt{a\pi}}\tau^{-\frac{1}{2}(i\lambda+1)}. \tag{96}$$

Как уже упоминалось выше, вопрос эквивалентности задач (90)–(91) и (92)–(96) подробно рассмотрен в [3]. Используя подход, примененный в случае первой краевой задачи, будем искать решение уравнения (92) в виде:

$$\bar{G} = e^{-\frac{x_1^2}{4}} \left[c_1 D_{-1-i\lambda}(x_1) + c_2 D_{i\lambda}(ix_1) \right], \quad 0 < x_1 < \xi_0, \tag{97}$$

$$\bar{G} = e^{-\frac{x_1^2}{4}} \left[c_3 D_{-1-i\lambda}(x_1) + c_4 D_{i\lambda}(ix_1) \right], \quad \xi_0 < x_1 < \beta_0, \tag{98}$$

где $D_\nu(z)$ – функция параболического цилиндра.

Воспользовавшись граничными условиями (95) и (96), получим систему

$$\begin{cases} c_1 D_{-1-i\lambda}(\xi_0) + c_2 D_{i\lambda}(i\xi_0) = c_3 D_{-1-i\lambda}(\xi_0) + c_4 D_{i\lambda}(i\xi_0), \\ c_1 \left[-\frac{x_1}{2} D_{-1-i\lambda}(x_1) + \frac{dD_{-1-i\lambda}(x_1)}{dx_1} \right]\Bigg|_{x_1=\xi_0-0} + c_2 \left[-\frac{x_1}{2} D_{i\lambda}(ix_1) + \frac{dD_{i\lambda}(ix_1)}{dx_1} \right]\Bigg|_{x_1=\xi_0-0} = \\ = c_3 \left[-\frac{x_1}{2} D_{-1-i\lambda}(x_1) + \frac{dD_{-1-i\lambda}(x_1)}{dx_1} \right]\Bigg|_{x_1=\xi_0+0} + c_4 \left[-\frac{x_1}{2} D_{i\lambda}(ix_1) + \frac{dD_{i\lambda}(ix_1)}{dx_1} \right]\Bigg|_{x_1=\xi_0+0} + \\ \qquad + \frac{1}{2\sqrt{a\pi}} e^{\frac{\xi_0^2}{4}} \tau^{-\frac{1}{2}(i\lambda+1)}. \end{cases} \tag{99}$$

Найдем выражения постоянных c_1, c_2 через c_3, c_4. Для этого воспользуемся методом Крамера и выражением (50) для вронскиана функции параболического цилиндра.

Получаем $c_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}$, $c_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}$, где

$$\Delta = \begin{vmatrix} D_{-1-i\lambda}(\xi_0) & D_{i\lambda}(i\xi_0) \\ \left[-\frac{x_1}{2} D_{-1-i\lambda}(x_1) + \frac{dD_{-1-i\lambda}(x_1)}{dx_1} \right]_{x_1=\xi_0-0} & \left[-\frac{x_1}{2} D_{i\lambda}(ix_1) + \frac{dD_{i\lambda}(ix_1)}{dx_1} \right]_{x_1=\xi_0+0} \end{vmatrix} = e^{-\frac{\lambda\pi}{2}}, \tag{100}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} c_3 D_{-1-i\lambda}(\xi_0) + c_4 D_{i\lambda}(i\xi_0) & D_{i\lambda}(i\xi_0) \\ \begin{gathered} c_3 \left[-\frac{x_1}{2} D_{-1-i\lambda}(x_1) + \frac{dD_{-1-i\lambda}(x_1)}{dx_1} \right]\Bigg|_{x_1=\xi_0+0} + \\ + c_4 \left[-\frac{x_1}{2} D_{i\lambda}(ix_1) + \frac{dD_{i\lambda}(ix_1)}{dx_1} \right]\Bigg|_{x_1=\xi_0+0} + \\ + \frac{1}{2\sqrt{a\pi}} e^{\frac{\xi_0^2}{4}} \tau^{-\frac{1}{2}(i\lambda+1)} \end{gathered} & \left[-\frac{x_1}{2} D_{i\lambda}(ix_1) + \frac{dD_{i\lambda}(ix_1)}{dx_1} \right]\Bigg|_{x_1=\xi_0-0} \end{vmatrix}, \tag{101}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} D_{-1-i\lambda}(\xi_0) & c_3 D_{-1-i\lambda}(\xi_0) + c_4 D_{i\lambda}(i\xi_0) \\ \left[-\frac{x_1}{2} D_{-1-i\lambda}(x_1) + \frac{dD_{-1-i\lambda}(x_1)}{dx_1} \right]\Bigg|_{x_1=\xi_0-0} & \begin{gathered} c_3 \left[-\frac{x_1}{2} D_{-1-i\lambda}(x_1) + \frac{dD_{-1-i\lambda}(x_1)}{dx_1} \right]\Bigg|_{x_1=\xi_0+0} + \\ + c_4 \left[-\frac{x_1}{2} D_{i\lambda}(ix_1) + \frac{dD_{i\lambda}(ix_1)}{dx_1} \right]\Bigg|_{x_1=\xi_0+0} + \\ + \frac{1}{2\sqrt{a\pi}} e^{\frac{\xi_0^2}{4}} \tau^{-\frac{1}{2}(i\lambda+1)} \end{gathered} \end{vmatrix}. \tag{102}$$

Преобразовывая далее (101) и (102), находим

$$\Delta_1 = e^{-\frac{\lambda\pi}{2}} c_3 - D_{i\lambda}(i\xi_0) \frac{e^{\frac{\xi_0^2}{4}} \tau^{-\frac{1}{2}(i\lambda+1)}}{2\sqrt{a\pi}}, \tag{103}$$

$$\Delta_2 = \mathrm{e}^{-\frac{\lambda\pi}{2}} c_4 + D_{-1-i\lambda}(\xi_0)\frac{e^{\frac{\xi_0^2}{4}}\tau^{-\frac{1}{2}(i\lambda+1)}}{2\sqrt{a\pi}}. \tag{104}$$

Откуда получаем

$$c_1 = c_3 - D_{i\lambda}(i\xi_0)\frac{e^{\frac{\xi_0^2}{4}+\frac{\lambda\pi}{2}}\tau^{-\frac{1}{2}(i\lambda+1)}}{2\sqrt{a\pi}}, \tag{105}$$

$$c_2 = c_4 + D_{-1-i\lambda}(\xi_0)\frac{e^{\frac{\xi_0^2}{4}+\frac{\lambda\pi}{2}}\tau^{-\frac{1}{2}(i\lambda+1)}}{2\sqrt{a\pi}}. \tag{106}$$

Используя условия (93) $\left.\frac{d\bar{G}}{dx_1}\right|_{x_1=0} = 0$ и (94) $\left.\frac{d\bar{G}}{dx_1}\right|_{x_1=\beta_0} = 0$, получаем систему на c_3 и c_4:

$$\begin{cases} \left[c_3 - D_{i\lambda}(i\xi_0)\dfrac{e^{\frac{\xi_0^2}{4}+\frac{\lambda\pi}{2}}\tau^{-\frac{1}{2}(i\lambda+1)}}{2\sqrt{a\pi}}\right]D_{-i\lambda}(0) + i\left[c_4 + D_{-1-i\lambda}(\xi_0)\dfrac{e^{\frac{\xi_0^2}{4}+\frac{\lambda\pi}{2}}\tau^{-\frac{1}{2}(i\lambda+1)}}{2\sqrt{a\pi}}\right]D_{i\lambda+1}(0) = 0, \\ c_3 D_{-i\lambda}(\beta_0) + c_4\left[\beta_0 D_{i\lambda}(i\beta_0) + iD_{i\lambda+1}(i\beta_0)\right] = 0. \end{cases} \tag{107}$$

Решая систему (107), получаем

$$c_3 = \frac{e^{\frac{\xi_0^2}{4}+\frac{\lambda\pi}{2}}\tau^{-\frac{1}{2}(i\lambda+1)}}{2\sqrt{a\pi}}\frac{\left[D_{i\lambda}(i\xi_0)D_{-i\lambda}(0) - iD_{-1-i\lambda}(\xi_0)D_{i\lambda+1}(0)\right]\left[\beta_0 D_{i\lambda}(i\beta_0) + iD_{i\lambda+1}(i\beta_0)\right]}{\beta_0 D_{i\lambda}(i\beta_0)D_{-i\lambda}(0) + iD_{i\lambda+1}(i\beta_0)D_{-i\lambda}(0) - iD_{i\lambda+1}(0)D_{-i\lambda}(\beta_0)}, \tag{108}$$

$$c_4 = \frac{e^{\frac{\xi_0^2}{4}+\frac{\lambda\pi}{2}}\tau^{-\frac{1}{2}(i\lambda+1)}}{2\sqrt{a\pi}}\frac{D_{-i\lambda}(\beta_0)\left[iD_{-1-i\lambda}(\xi_0)D_{i\lambda+1}(0) - D_{i\lambda}(i\xi_0)D_{-i\lambda}(0)\right]}{\beta_0 D_{i\lambda}(i\beta_0)D_{-i\lambda}(0) + iD_{i\lambda+1}(i\beta_0)D_{-i\lambda}(0) - iD_{i\lambda+1}(0)D_{-i\lambda}(\beta_0)}, \tag{109}$$

Подставляя (108) и (109) в (105) и (106), находим c_1, c_2:

$$\begin{gathered} c_1 = \frac{ie^{\frac{\xi_0^2}{4}+\frac{\lambda\pi}{2}}\tau^{-\frac{1}{2}(i\lambda+1)}}{2\sqrt{a\pi}}\times \\ \times\frac{-\beta_0 D_{-1-i\lambda}(\xi_0)D_{i\lambda}(i\beta_0) - iD_{i\lambda+1}(i\beta_0)D_{-1-i\lambda}(\xi_0) + D_{-i\lambda}(\beta_0)D_{i\lambda}(i\xi_0)}{\beta_0 D_{i\lambda}(i\beta_0)D_{-i\lambda}(0) + iD_{i\lambda+1}(i\beta_0)D_{-i\lambda}(0) - iD_{i\lambda+1}(0)D_{-i\lambda}(\beta_0)}D_{i\lambda+1}(0), \end{gathered} \tag{110}$$

$$\begin{gathered} c_2 = \frac{e^{\frac{\xi_0^2}{4}+\frac{\lambda\pi}{2}}\tau^{-\frac{1}{2}(i\lambda+1)}}{2\sqrt{a\pi}}\times \\ \times\frac{\beta_0 D_{-1-i\lambda}(\xi_0)D_{i\lambda}(i\beta_0) + iD_{i\lambda+1}(i\beta_0)D_{-1-i\lambda}(\xi_0) + D_{-i\lambda}(\beta_0)D_{i\lambda}(i\xi_0)}{\beta_0 D_{i\lambda}(i\beta_0)D_{-i\lambda}(0) + iD_{i\lambda+1}(i\beta_0)D_{-i\lambda}(0) - iD_{i\lambda+1}(0)D_{-i\lambda}(\beta_0)}D_{-i\lambda}(0). \end{gathered} \tag{111}$$

Тогда решение задачи (92)–(96) примет вид

$$\bar{G}=\begin{cases}\dfrac{e^{\frac{\xi_0^2}{4}+\frac{\lambda\pi}{2}-\frac{x_1^2}{4}}\tau^{-\frac{1}{2}(i\lambda+1)}}{2\sqrt{a\pi}}\dfrac{\beta_0 D_{-1-i\lambda}(\xi_0)D_{i\lambda}(i\beta_0)+iD_{i\lambda+1}(i\beta_0)D_{-1-i\lambda}(\xi_0)-D_{-i\lambda}(\beta_0)D_{i\lambda}(i\xi_0)}{\beta_0 D_{i\lambda}(i\beta_0)D_{-i\lambda}(0)+iD_{i\lambda+1}(i\beta_0)D_{-i\lambda}(0)-iD_{i\lambda+1}(0)D_{-i\lambda}(\beta_0)}\times\\ \quad\times\left[D_{i\lambda}(ix_1)D_{-i\lambda}(0)-iD_{i\lambda+1}(0)D_{-1-i\lambda}(x_1)\right],\quad 0<x_1<\xi_0,\\ \dfrac{e^{\frac{\xi_0^2}{4}+\frac{\lambda\pi}{2}-\frac{x_1^2}{4}}\tau^{-\frac{1}{2}(i\lambda+1)}}{2\sqrt{a\pi}}\dfrac{iD_{-1-i\lambda}(\xi_0)D_{i\lambda+1}(0)-D_{i\lambda}(i\xi_0)D_{-i\lambda}(0)}{\beta_0 D_{i\lambda}(i\beta_0)D_{-i\lambda}(0)+iD_{i\lambda+1}(i\beta_0)D_{-i\lambda}(0)-iD_{i\lambda+1}(0)D_{-i\lambda}(\beta_0)}\times\\ \quad\times\left\{D_{i\lambda}(ix_1)D_{-i\lambda}(\beta_0)-\left[\beta_0 D_{i\lambda}(i\beta_0)+iD_{i\lambda+1}(i\beta_0)\right]D_{-1-i\lambda}(x_1)\right\},\quad \xi_0<x_1<\beta_0.\end{cases}\tag{112}$$

Используя замену (34) и применяя обратное преобразование Фурье (65) к решению (112), где $\lambda = pi$, получаем

$$G(x_1,t,\xi_0,\tau)=\frac{e^{\frac{\xi_0^2}{4}-\frac{x_1^2}{4}}}{2\pi i\sqrt{2a\tau}}\int\limits_{-i\infty}^{+i\infty}\frac{\beta_0 D_{-1-p}(\xi_0)D_p(i\beta_0)+iD_{p+1}(i\beta_0)D_{-1-p}(\xi_0)-D_{-p}(\beta_0)D_p(i\xi_0)}{\beta_0 D_p(i\beta_0)D_{-p}(0)+iD_{p+1}(i\beta_0)D_{-p}(0)-iD_{p+1}(0)D_{-p}(\beta_0)}\times$$
$$\times\left[D_p(ix_1)D_{-p}(0)-iD_{p+1}(0)D_{-1-p}(x_1)\right]e^{-\frac{\pi}{2}pi}\left(\frac{t}{\tau}\right)^{\frac{p}{2}}dp.\tag{113}$$

В переменных x, x', t, τ функция Грина (113) будет записана в виде

$$G(x,t,x',\tau)=\frac{e^{\frac{1}{8a}\left[\frac{x'^2}{\tau}-\frac{x^2}{t}\right]}}{2\pi i\sqrt{2a\tau}}\times$$
$$\times\int\limits_{-i\infty}^{+i\infty}\frac{\frac{\beta}{\sqrt{2a}}D_{-p-1}\left(\frac{x'}{\sqrt{2a\tau}}\right)D_p\left(\frac{i\beta}{\sqrt{2a}}\right)+iD_{p+1}\left(\frac{i\beta}{\sqrt{2a}}\right)D_{-p-1}\left(\frac{x'}{\sqrt{2a\tau}}\right)-D_{-p}\left(\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right)D_p\left(\frac{ix'}{\sqrt{2a\tau}}\right)}{\frac{\beta}{\sqrt{2a}}D_p\left(\frac{i\beta}{\sqrt{2a}}\right)D_{-p}(0)+iD_{p+1}\left(\frac{i\beta}{\sqrt{2a}}\right)D_{-p}(0)-iD_{p+1}(0)D_{-p}\left(\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right)}\times$$
$$\times\left[D_p\left(\frac{ix}{\sqrt{2a\tau}}\right)D_{-p}(0)-iD_{p+1}(0)D_{-p-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2a\tau}}\right)\right]e^{-\frac{\pi}{2}pi}\left(\frac{t}{\tau}\right)^{\frac{p}{2}}dp.\tag{114}$$

Преобразовывая далее и используя (68), получаем (114) в виде

$$G(x,t,x',\tau)=\frac{e^{\frac{1}{8a}\left[\frac{x'^2}{\tau}-\frac{x^2}{t}\right]}}{4\pi i\sqrt{a\pi\tau}}\int\limits_{-i\infty}^{+i\infty}\Gamma(p+1)\frac{D_{-p-1}\left(\frac{x'}{\sqrt{2a\tau}}\right)D_{-p}\left(-\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right)+D_{-p}\left(\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right)D_{-p-1}\left(-\frac{x'}{\sqrt{2a\tau}}\right)}{D_{-p}\left(-\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right)-D_{-p}\left(\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right)}\times$$
$$\times\left[D_{-p-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2at}}\right)+D_{-p-1}\left(-\frac{x}{\sqrt{2at}}\right)\right]\left(\frac{t}{\tau}\right)^{\frac{p}{2}}dp.\tag{115}$$

Целью дальнейших преобразований будет получение аналитического вида функции Грина задачи (92)–(96) в виде ряда. Пусть

$$F(p)=\Gamma(p+1)\frac{D_{-p-1}\left(\frac{x'}{\sqrt{2a\tau}}\right)D_{-p}\left(-\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right)+D_{-p}\left(\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right)D_{-p-1}\left(-\frac{x'}{\sqrt{2a\tau}}\right)}{D_{-p}\left(-\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right)-D_{-p}\left(\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right)}\times$$
$$\times\left[D_{-p-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2at}}\right)+D_{-p-1}\left(-\frac{x}{\sqrt{2at}}\right)\right]\left(\frac{t}{\tau}\right)^{\frac{p}{2}}.$$

Так как функция $D_p(z)$ является целой функцией переменного z и параметра p, то подынтегральная функция $F(p)$ является аналитической во всей комплексной плоскости p, за исключением простых полюсов в точках $p = -n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ и в точках $p = p_n$, где p_n — нецелые корни уравнения

$$D_{-p}\left(-\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right) - D_{-p}\left(\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right) = 0. \tag{116}$$

Как уже упоминалось выше, решение уравнений типа (116), в которых значения аргумента функции параболического цилиндра фиксированы, представляет собой самостоятельную задачу. Далее по теореме о вычетах

$$G(x,t,x',\tau) = \frac{e^{\frac{1}{8a}\left[\frac{x'^2}{\tau}-\frac{x^2}{t}\right]}}{4\pi i\sqrt{a\pi\tau}}\left(2\pi i\left[\sum_{n=1}^{\infty}\underset{p=-n}{res}\,F(p) + \sum_{n=1}^{\infty}\underset{p=p_n}{res}\,F(p)\right]\right). \tag{117}$$

Используя свойства функции параболического цилиндра при целых p, а также пользуясь соотношениями (73), получаем, что первая сумма в (117) равна нулю. Это означает, что функция Грина может быть представлена в виде ряда

$$\begin{gathered}
G(x,t,x',\tau) = \frac{e^{\frac{1}{8a}\left(\frac{x'^2}{\tau}-\frac{x^2}{t}\right)}}{2\sqrt{a\pi\tau}}\sum_{n=1}^{\infty}\Gamma(p_n+1)\times \\
\times\frac{D_{-p_n-1}\left(\frac{x'}{\sqrt{2a\tau}}\right)D_{-p_n}\left(-\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right) + D_{-p_n}\left(\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right)D_{-p_n-1}\left(-\frac{x'}{\sqrt{2a\tau}}\right)}{\frac{\partial}{\partial p}\left[D_{-p}\left(-\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right) - D_{-p}\left(\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right)\right]\Big|_{p=p_n}}\times \\
\times\left[D_{-p_n-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2at}}\right) + D_{-p_n-1}\left(-\frac{x}{\sqrt{2at}}\right)\right]\left(\frac{t}{\tau}\right)^{\frac{p_n}{2}},
\end{gathered} \tag{118}$$

где p_n — действительные отрицательные нецелые корни уравнения (116).

Итог этой части работы. Формулы (114) и (115) — явный вид функции Грина второй краевой задачи в области $\Omega_t = \left\{(x,t); 0 \le x \le \beta\sqrt{t}, t \ge 0\right\}$ *в интегральной форме*, а формула (118) — *в виде ряда*.

6. ПРИЛОЖЕНИЕ. СОГЛАСОВАННОСТЬ РЕЗУЛЬТАТОВ

Вопрос согласованности результатов, полученных разными методами, играет очень важную роль. В связи с этим в качестве приложения найдем с помощью описанного выше метода функции Грина температурную функцию, полученную в известной работе Карташова Э.М. и Любова Б.Я. [8] с помощью метода рядов. Метод рядов является очень мощным инструментом и позволяет решить *первую краевую задачу* (22)—(24) при условии, что функции $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ допускают представление в виде рядов

$$\varphi_1(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} b_{\frac{k}{n}} t^{\frac{k}{n}}, \quad t > 0, \tag{119}$$

$$\varphi_2(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} c_{\frac{k}{m}} t^{\frac{k}{m}}, \quad t > 0. \tag{120}$$

В этом случае, согласно [8], решение в области

$$\Omega_t = \left\{(x,t); 0 \le x \le \gamma\sqrt{2at}, t \ge 0\right\} \tag{121}$$

имеет вид

$$\begin{aligned} T(x,t) = e^{-\frac{x^2}{8at}} \Bigg[& \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} b_{\frac{k}{n}} \frac{D_{-2\frac{k}{n}-1}(\gamma) D_{2\frac{k}{n}}\left(i\frac{x}{\sqrt{2at}}\right) - D_{2\frac{k}{n}}(i\gamma) D_{-2\frac{k}{n}-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2at}}\right)}{D_{-2\frac{k}{n}-1}(\gamma) D_{2\frac{k}{n}}(0) - D_{2\frac{k}{n}}(i\gamma) D_{-2\frac{k}{n}-1}(0)} t^{\frac{k}{n}} + \\ & + e^{\frac{\gamma^2}{4}} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} c_{\frac{k}{m}} \frac{D_{2\frac{k}{m}}(0) D_{-2\frac{k}{m}-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2at}}\right) - D_{-2\frac{k}{m}-1}(0) D_{2\frac{k}{m}}\left(i\frac{x}{\sqrt{2at}}\right)}{D_{-2\frac{k}{m}-1}(\gamma) D_{2\frac{k}{m}}(0) - D_{2\frac{k}{m}}(i\gamma) D_{-2\frac{k}{m}-1}(0)} t^{\frac{k}{m}} \Bigg]. \end{aligned} \tag{122}$$

Используя интегральное представление температурного поля (29), а также явный вид полученной функции Грина (67) покажем, что решение (122) может быть получено и с помощью приведенного выше подхода. Согласно ему температурная функция при граничных условиях (119) и (120) будет представлена в виде

$$T(x,t) = a\int_0^t \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \left[b_{\frac{k}{n}} \tau^{\frac{k}{n}} \left.\frac{\partial G}{\partial x'}\right|_{x'=0} - c_{\frac{k}{m}} \tau^{\frac{k}{m}} \left.\frac{\partial G}{\partial x'}\right|_{x'=\beta\sqrt{\tau}} \right] d\tau. \tag{123}$$

Очевидно, что для ее получения потребуется найти частные производные $\frac{\partial G}{\partial x'}$ на границах области. Для удобства найдем эти частные производные в области $\Omega_t = \left\{(x,t); 0 \le x \le \beta\sqrt{t}, t \ge 0\right\}$. Продифференцировав частным образом (67) и воспользовавшись (68), получаем

$$\left.\frac{\partial G(x,t,x',\tau)}{\partial x'}\right|_{x'=0} = \frac{e^{-\frac{x^2}{8at}}}{2\pi i\sqrt{2a\tau}} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\left[D_{-p-1}\left(\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right) D_p\left(i\frac{x}{\sqrt{2at}}\right) - D_p\left(\frac{i\beta}{\sqrt{2a}}\right) D_p\left(\frac{ix}{\sqrt{2at}}\right)\right]}{D_p(0) D_{-p-1}\left(\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right) - D_p\left(\frac{i\beta}{\sqrt{2a}}\right) D_{-p-1}(0)} \left(\frac{t}{\tau}\right)^{\frac{p}{2}} dp. \tag{124}$$

$$\left.\frac{\partial G(x,t,x',\tau)}{\partial x'}\right|_{x'=\beta\sqrt{\tau}} = \frac{e^{\frac{1}{8a}\left[\beta^2 - \frac{x^2}{t}\right]}}{2\pi i\sqrt{2a\tau}} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\left[D_p(0) D_{-p-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2at}}\right) - D_{-p-1}(0) D_p\left(\frac{ix}{\sqrt{2at}}\right)\right]}{D_p\left(\frac{i\beta}{\sqrt{2a}}\right) D_{-p-1}(0) - D_p(0) D_{-p-1}\left(\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right)} \left(\frac{t}{\tau}\right)^{\frac{p}{2}} dp. \tag{125}$$

Далее, замыкая контур полуокружностью в правую полуплоскость, используя согласно [10] асимптотику поведения $D_\nu(z)$, если $|z|$ ограничен и $|\arg(-\nu)| \le \frac{\pi}{2}$ при $\nu \to \infty$

$$D_\nu(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} \exp\left[\frac{\nu}{2}\ln(-\nu) - \frac{\nu}{2} - z\sqrt{-\nu}\right]\left[1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{|\nu|}}\right)\right], \tag{126}$$

применяя теорему о вычетах и вводя константу c, такую что $p_1 < c < 0$, где p_1 — наименьший по модулю корень уравнения (71), найдем интеграл

$$\int_0^t b_{\frac{k}{n}} \tau^{\frac{k}{n}} \frac{\partial G}{\partial x'}\bigg|_{x'=0} d\tau = \int_0^t \frac{e^{-\frac{x^2}{8at}}}{4\pi i a\tau} b_{\frac{k}{n}} \tau^{\frac{k}{n}} \left[\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{D_{-p-1}\left(\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right) D_p\left(i\frac{x}{\sqrt{2at}}\right) - D_p\left(i\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right) D_{-p-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2at}}\right)}{D_p(0)\, D_{-p-1}\left(\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right) - D_p\left(i\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right) D_{-p-1}(0)} \frac{t^{p/2}}{\tau^{p/2}} dp\right] d\tau =$$

$$= \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \left[\frac{e^{-\frac{x^2}{8at}}}{4\pi i a} \frac{b_{\frac{k}{n}}\left[D_{-p-1}\left(\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right) D_p\left(i\frac{x}{\sqrt{2at}}\right) - D_p\left(i\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right) D_{-p-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2at}}\right)\right] t^{p/2}}{D_p(0)\, D_{-p-1}\left(\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right) - D_p\left(i\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right) D_{-p-1}(0)} \int_0^t \tau^{\frac{k}{n}-\frac{p}{2}-1} d\tau\right] dp =$$

$$= \frac{e^{-\frac{x^2}{8at}}}{4\pi i a} b_{\frac{k}{n}} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\left[D_{-p-1}\left(\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right) D_p\left(i\frac{x}{\sqrt{2at}}\right) - D_p\left(i\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right) D_{-p-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2at}}\right)\right] t^{\frac{p}{2}+\frac{k}{n}-\frac{p}{2}}}{\left[D_p(0)\, D_{-p-1}\left(\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right) - D_p\left(i\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right) D_{-p-1}(0)\right]\left(\frac{k}{n} - \frac{p}{2}\right)} dp =$$

$$= \frac{e^{-\frac{x^2}{8at}}}{2\pi i a} b_{\frac{k}{n}} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\left[D_{-p-1}\left(\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right) D_p\left(i\frac{x}{\sqrt{2at}}\right) - D_p\left(i\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right) D_{-p-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2at}}\right)\right] t^{\frac{k}{n}}}{\left[D_p(0)\, D_{-p-1}\left(\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right) - D_p\left(i\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right) D_{-p-1}(0)\right]\left(2\frac{k}{n} - p\right)} dp =$$

$$= b_{\frac{k}{n}} \frac{e^{-\frac{x^2}{8at}}}{a} \frac{D_{-2\frac{k}{n}-1}\left(\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right) D_{2\frac{k}{n}}\left(i\frac{x}{\sqrt{2at}}\right) - D_{2\frac{k}{n}}\left(i\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right) D_{-2\frac{k}{n}-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2at}}\right)}{D_{2\frac{k}{n}}(0)\, D_{-2\frac{k}{n}-1}\left(\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right) - D_{2\frac{k}{n}}\left(i\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right) D_{-2\frac{k}{n}-1}(0)} t^{\frac{k}{n}}.$$

Контур интегрирования состоит из отрезка прямой $(c - i\infty, c + i\infty)$ и дуги окружности радиуса R. На этой дуге при $R \to \infty$ в силу (126) интеграл обращается в нуль. Константа c введена с целью достижения сходимости внутренних интегралов при $x' = 0$ и $\tau = 0$. Такую постоянную c ввести возможно в силу того, что между прямыми $(c - i\infty, c + i\infty)$ и $(-i\infty, +i\infty)$ нет особых точек подынтегральных функций и на соответствующих дугах применима лемма Жордана.

Итак,

$$\int_0^t b_{\frac{k}{n}} \tau^{\frac{k}{n}} \frac{\partial G}{\partial x'}\bigg|_{x'=0} d\tau = b_{\frac{k}{n}} \frac{e^{-\frac{x^2}{8at}}}{a} \frac{D_{-2\frac{k}{n}-1}\left(\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right) D_{2\frac{k}{n}}\left(i\frac{x}{\sqrt{2at}}\right) - D_{2\frac{k}{n}}\left(i\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right) D_{-2\frac{k}{n}-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2at}}\right)}{D_{2\frac{k}{n}}(0) D_{-2\frac{k}{n}-1}\left(\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right) - D_{2\frac{k}{n}}\left(i\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right) D_{-2\frac{k}{n}-1}(0)} t^{\frac{k}{n}}. \tag{127}$$

Используя аналогичный подход, найдем интеграл

$$\int_0^t c_{\frac{k}{m}} \tau^{\frac{k}{m}} \frac{\partial G}{\partial x'}\bigg|_{x'=\beta\sqrt{\tau}} d\tau = \int_0^t \frac{e^{\frac{1}{8a}\left[\beta^2-\frac{x^2}{t}\right]}}{4\pi i a \tau} c_{\frac{k}{m}} \tau^{\frac{k}{m}} \left[\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{D_p(0)D_{-p-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2at}}\right) - D_{p-1}(0)D_p\left(\frac{ix}{\sqrt{2at}}\right)}{D_p\left(i\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right)D_{-p-1}(0) - D_p(0)D_{-p-1}\left(\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right)} \frac{t^{p/2}}{\tau^{p/2}} dp\right] d\tau =$$

$$= \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \left[\frac{e^{\frac{1}{8a}\left[\beta^2-\frac{x^2}{t}\right]}}{4\pi i a} \frac{c_{\frac{k}{m}}\left[D_p(0)D_{-p-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2at}}\right) - D_{p-1}(0)D_p\left(\frac{ix}{\sqrt{2at}}\right)\right] t^{p/2}}{D_p\left(i\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right)D_{-p-1}(0) - D_p(0)D_{-p-1}\left(\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right)} \int_0^t \tau^{\frac{k}{m}-\frac{p}{2}-1} d\tau \right] dp =$$

$$= \frac{e^{\frac{1}{8a}\left[\beta^2-\frac{x^2}{t}\right]}}{4\pi i a} c_{\frac{k}{m}} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\left[D_p(0)D_{-p-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2at}}\right) - D_{p-1}(0)D_p\left(\frac{ix}{\sqrt{2at}}\right)\right] t^{p/2} t^{\frac{k}{m}-\frac{p}{2}}}{\left[D_p\left(i\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right)D_{-p-1}(0) - D_p(0)D_{-p-1}\left(\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right)\right]\left(\frac{k}{m}-\frac{p}{2}\right)} dp =$$

$$= \frac{e^{\frac{1}{8a}\left[\beta^2-\frac{x^2}{t}\right]}}{2\pi i a} c_{\frac{k}{m}} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\left[D_p(0)D_{-p-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2at}}\right) - D_{p-1}(0)D_p\left(\frac{ix}{\sqrt{2at}}\right)\right] t^{\frac{k}{m}}}{\left[D_p\left(i\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right)D_{-p-1}(0) - D_p(0)D_{-p-1}\left(\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right)\right]\left(2\frac{k}{m}-p\right)} dp =$$

$$= c_{\frac{k}{m}} \frac{e^{\frac{1}{8a}\left[\beta^2-\frac{x^2}{t}\right]}}{a} \frac{\left[D_p(0)D_{-p-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2at}}\right) - D_{p-1}(0)D_p\left(\frac{ix}{\sqrt{2at}}\right)\right]}{D_{2\frac{k}{m}}\left(i\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right)D_{-2\frac{k}{m}-1}(0) - D_{2\frac{k}{m}}(0)D_{-2\frac{k}{m}-1}\left(\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right)} t^{\frac{k}{m}}.$$

Т.е.

$$\int_0^t c_{\frac{k}{m}} \tau^{\frac{k}{m}} \frac{\partial G}{\partial x'}\bigg|_{x'=\beta\sqrt{\tau}} d\tau = c_{\frac{k}{m}} \frac{e^{\frac{1}{8a}\left[\beta^2-\frac{x^2}{t}\right]}}{a} \frac{\left[D_p(0)D_{-p-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2at}}\right) - D_{p-1}(0)D_p\left(\frac{ix}{\sqrt{2at}}\right)\right]}{D_{2\frac{k}{m}}\left(i\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right)D_{-2\frac{k}{m}-1}(0) - D_{2\frac{k}{m}}(0)D_{-2\frac{k}{m}-1}\left(\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right)} t^{\frac{k}{m}}. \qquad (128)$$

Подставляя далее (127) и (128) в (123), а также учитывая, что $\beta = \gamma\sqrt{2a}$, получаем (122).

Метод рядов позволяет также решить *вторую краевую задачу* (76)–(78) при условии, что функции $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ допускают разложение в ряды

$$\varphi_1(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} b_{\frac{k}{n}} t^{\frac{k}{n}}, \quad t > 0, \qquad (129)$$

$$\varphi_2(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} c_{\frac{k}{m}} t^{\frac{k}{m}}, \quad t > 0. \qquad (130)$$

В этом случае, согласно [8], решение второй краевой задачи в области (121) имеет вид

$$\begin{aligned} T(x,t) = \sqrt{2a} e^{-\frac{x^2}{8at}} \Bigg[& \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} b_{\frac{k}{n}} \frac{iD_{-2\frac{k}{n}}(\gamma) D_{2\frac{k}{n}}\left(i\frac{x}{\sqrt{2at}}\right) - 2\frac{k}{n} D_{2\frac{k}{n}-1}(i\gamma) D_{-2\frac{k}{n}-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2at}}\right)}{D_{-2\frac{k}{n}}(\gamma) D_{2\frac{k}{n}+1}(0) + 2\frac{k}{n} D_{2\frac{k}{n}-1}(i\gamma) D_{-2\frac{k}{n}}(0)} t^{\frac{k}{n}} - \\ & - e^{\frac{\gamma^2}{4}} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} c_{\frac{k}{m}} \frac{iD_{-2\frac{k}{m}}(0) D_{2\frac{k}{m}}\left(\frac{ix}{\sqrt{2at}}\right) + D_{2\frac{k}{m}+1}(0) D_{-2\frac{k}{m}-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2at}}\right)}{D_{-2\frac{k}{m}}(\gamma) D_{2\frac{k}{m}+1}(0) + 2\frac{k}{m} D_{2\frac{k}{m}-1}(i\gamma) D_{-2\frac{k}{m}}(0)} t^{\frac{k}{m}} \Bigg]. \end{aligned} \qquad (131)$$

Используя интегральное представление температурного поля (83), а также явный вид полученной функции Грина (114) покажем, что решение (131) может быть получено и с помощью приведенного выше подхода. Согласно ему температурная функция при граничных условиях (129) и (130) будет представлена в виде

$$T(x,t) = a\int_0^t \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty}\left[c_{\frac{k}{m}}\, G\big|_{x'=\beta\sqrt{\tau}}\, \tau^{\frac{k}{m}-\frac{1}{2}} - b_{\frac{k}{n}}\, G\big|_{x'=0}\, \tau^{\frac{k}{n}-\frac{1}{2}}\right] d\tau. \tag{132}$$

Найдем $G(x,t,x',\tau)$ на границах области $\Omega_t = \left\{(x,t); 0 \le x \le \beta\sqrt{t}, t \ge 0\right\}$, воспользовавшись (50). Получаем

$$G(x,t,x',\tau)\big|_{x'=0} = -\frac{e^{-\frac{x^2}{8at}}}{2\pi i\sqrt{2a\tau}}\int_{-i\infty}^{+i\infty}\frac{iD_{-p}\left(\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right)D_p\left(\frac{ix}{\sqrt{2at}}\right) + pD_{p-1}\left(\frac{i\beta}{\sqrt{2a}}\right)D_{-p-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2at}}\right)}{pD_{-p}(0)\,D_{p-1}\left(\frac{i\beta}{\sqrt{2a}}\right) + D_{p+1}(0)\,D_{-p}\left(\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right)}\left(\frac{t}{\tau}\right)^{\frac{p}{2}} dp. \tag{133}$$

$$G(x,t,x',\tau)\big|_{x'=\beta\sqrt{\tau}} = -\frac{e^{\frac{1}{8a}\left[\beta^2-\frac{x^2}{t}\right]}}{2\pi i\sqrt{2a\tau}}\int_{-i\infty}^{+i\infty}\frac{iD_{-p}(0)\,D_p\left(\frac{ix}{\sqrt{2at}}\right) + D_{p+1}(0)\,D_{-p-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2at}}\right)}{pD_{-p}(0)\,D_{p-1}\left(\frac{i\beta}{\sqrt{2a}}\right) + D_{p+1}(0)\,D_{-p}\left(\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right)}\left(\frac{t}{\tau}\right)^{\frac{p}{2}} dp. \tag{134}$$

Далее, как и в случае первой краевой задачи, замыкая контур полуокружностью в правую полуплоскость, используя асимптотику (126), применяя теорему о вычетах и вводя константу c, такую что $p_1 < c < 0$, где p_1 — наименьший по модулю корень уравнения (116), найдем интеграл

$$\int_0^t b_{\frac{k}{n}}\, G\big|_{x'=0}\, \tau^{\frac{k}{n}-\frac{1}{2}} d\tau = -\frac{b_{\frac{k}{n}}e^{-\frac{x^2}{8at}}}{2\pi i\sqrt{2a}}\times$$

$$\times\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\left[\frac{\left[iD_{-p}\left(\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right)D_p\left(\frac{ix}{\sqrt{2at}}\right) + pD_{p-1}\left(\frac{i\beta}{\sqrt{2a}}\right)D_{-p-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2at}}\right)\right]t^{\frac{p}{2}}}{pD_{p-1}\left(\frac{i\beta}{\sqrt{2a}}\right)D_{-p}(0) + D_{p+1}(0)\,D_{-p}\left(\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right)}\int_0^t \tau^{\frac{k}{n}-\frac{p}{2}-1} d\tau\right] dp =$$

$$= -b_{\frac{k}{n}}\sqrt{\frac{2}{a}}\,\frac{e^{-\frac{x^2}{8at}}}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{\left[iD_{-p}\left(\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right)D_p\left(\frac{ix}{\sqrt{2at}}\right) + pD_{p-1}\left(\frac{i\beta}{\sqrt{2a}}\right)D_{-p-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2at}}\right)\right]t^{\frac{k}{n}}}{\left[pD_{p-1}\left(\frac{i\beta}{\sqrt{2a}}\right)D_{-p}(0) + D_{p+1}(0)\,D_{-p}\left(\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right)\right]\left(2\frac{k}{n} - p\right)} dp =$$

$$= -b_{\frac{k}{n}}\frac{\sqrt{2}e^{-\frac{x^2}{8at}}}{\sqrt{a}}\,\frac{iD_{-2\frac{k}{n}}\left(\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right)D_{2\frac{k}{n}}\left(\frac{ix}{\sqrt{2at}}\right) + 2\frac{k}{n}D_{2\frac{k}{n}-1}\left(\frac{i\beta}{\sqrt{2a}}\right)D_{-2\frac{k}{n}-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2at}}\right)}{2\frac{k}{n}D_{2\frac{k}{n}-1}\left(\frac{i\beta}{\sqrt{2a}}\right)D_{-2\frac{k}{n}}(0) + D_{2\frac{k}{n}+1}(0)\,D_{-2\frac{k}{n}}\left(\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right)}\,t^{\frac{k}{n}}.$$

Т.е.

$$\int_0^t b_{\frac{k}{n}} G\big|_{x'=0} \tau^{\frac{k}{n}-\frac{1}{2}} d\tau = -b_{\frac{k}{n}} \frac{\sqrt{2} e^{-\frac{x^2}{8at}}}{\sqrt{a}} \times$$
$$\times \frac{iD_{-2\frac{k}{n}}\left(\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right) D_{2\frac{k}{n}}\left(\frac{ix}{\sqrt{2at}}\right) + 2\frac{k}{n} D_{2\frac{k}{n}-1}\left(\frac{i\beta}{\sqrt{2a}}\right) D_{-2\frac{k}{n}-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2at}}\right)}{2\frac{k}{n} D_{2\frac{k}{n}-1}\left(\frac{i\beta}{\sqrt{2a}}\right) D_{-2\frac{k}{n}}(0) + D_{2\frac{k}{n}+1}(0) D_{-2\frac{k}{n}}\left(\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right)} t^{\frac{k}{n}}. \tag{135}$$

Используя аналогичные преобразования, найдем интеграл

$$\int_0^t c_{\frac{k}{m}} G\big|_{x'=\beta\sqrt{\tau}} \tau^{\frac{k}{m}-\frac{1}{2}} d\tau = -c_{\frac{k}{m}} \frac{e^{\frac{1}{8a}\left[\beta^2-\frac{x^2}{t}\right]}}{2\pi i\sqrt{2a}} \times$$
$$\times \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \left[\frac{iD_p\left(\frac{ix}{\sqrt{2at}}\right) D_{-p}(0) + D_{p+1}(0) D_{-p-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2at}}\right)}{pD_{p-1}\left(\frac{i\beta}{\sqrt{2a}}\right) D_{-p}(0) + D_{p+1}(0) D_{-p}\left(\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right)} \int_0^t t^{\frac{p}{2}} \tau^{\frac{k}{m}-\frac{p}{2}-1} d\tau \right] dp =$$
$$= -c_{\frac{k}{m}} \frac{e^{\frac{1}{8a}\left[\beta^2-\frac{x^2}{t}\right]}}{2\pi i\sqrt{2a}} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\left[iD_p\left(\frac{ix}{\sqrt{2at}}\right) D_{-p}(0) + D_{p+1}(0) D_{-p-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2at}}\right)\right] t^{\frac{k}{m}}}{\left[pD_{p-1}\left(\frac{i\beta}{\sqrt{2a}}\right) D_{-p}(0) + D_{p+1}(0) D_{-p}\left(\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right)\right]\left(\frac{k}{m}-\frac{p}{2}\right)} dp =$$
$$= -c_{\frac{k}{m}} \frac{\sqrt{2} e^{\frac{1}{8a}\left[\beta^2-\frac{x^2}{t}\right]}}{2\pi i\sqrt{a}} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\left[iD_p\left(\frac{ix}{\sqrt{2at}}\right) D_{-p}(0) + D_{p+1}(0) D_{-p-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2at}}\right)\right] t^{\frac{k}{m}}}{\left[pD_{p-1}\left(\frac{i\beta}{\sqrt{2a}}\right) D_{-p}(0) + D_{p+1}(0) D_{-p}\left(\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right)\right]\left(2\frac{k}{m}-p\right)} dp =$$
$$= -c_{\frac{k}{m}} \frac{\sqrt{2} e^{\frac{1}{8a}\left[\beta^2-\frac{x^2}{t}\right]}}{\sqrt{a}} \frac{iD_{2\frac{k}{m}}\left(\frac{ix}{\sqrt{2at}}\right) D_{-2\frac{k}{m}}(0) + D_{2\frac{k}{m}+1}(0) D_{-2\frac{k}{m}-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2at}}\right)}{2\frac{k}{m} D_{2\frac{k}{m}-1}\left(\frac{i\beta}{\sqrt{2a}}\right) D_{-2\frac{k}{m}}(0) + D_{2\frac{k}{m}+1}(0) D_{-2\frac{k}{m}}\left(\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right)} t^{\frac{k}{m}}.$$

Т.е.

$$\int_0^t c_{\frac{k}{m}} G\big|_{x'=\beta\sqrt{\tau}} \tau^{\frac{k}{m}-\frac{1}{2}} d\tau =$$
$$= -c_{\frac{k}{m}} \frac{\sqrt{2} e^{\frac{1}{8a}\left[\beta^2-\frac{x^2}{t}\right]}}{\sqrt{a}} \frac{iD_{2\frac{k}{m}}\left(\frac{ix}{\sqrt{2at}}\right) D_{-2\frac{k}{m}}(0) + D_{2\frac{k}{m}+1}(0) D_{-2\frac{k}{m}-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2at}}\right)}{2\frac{k}{m} D_{2\frac{k}{m}-1}\left(\frac{i\beta}{\sqrt{2a}}\right) D_{-2\frac{k}{m}}(0) + D_{2\frac{k}{m}+1}(0) D_{-2\frac{k}{m}}\left(\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right)} t^{\frac{k}{m}}. \tag{136}$$

Подставляя далее (135) и (136) в (132), а также учитывая, что $\beta = \gamma\sqrt{2a}$, получаем (131).

ВЫВОДЫ

Получен явный вид функций Грина в интегральной форме и в виде ряда первой и второй краевых задач нестационарной теплопроводности в ограниченной области, граница которой движется по закону $\beta\sqrt{t}$. Показана согласованность результатов, полученных с помощью метода функции Грина, и другими авторами с использованием иных подходов. Приведенный в работе метод позволяет получать решения первой и второй задач нестационарной теплопроводности для более широких классов температурного и теплового нагревов, чем в случае метода рядов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Карташов Э.М.* Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. М.: Высш. школа, 2001. С. 540.
2. *Карташов Э.М., Кудинов В.А.* Аналитическая теория теплопроводности и прикладной термоупругости. М.: URSS, 2012. С. 655.
3. *Карташов Э.М., Кротов Г.С.* Функции Грина в задачах нестационарной теплопроводности в области с границей, движущейся по корневой зависимости // Изв. РАН. Энергетика. 2006. № 4. С. 134–149.
4. *Антимиров М.Я.* Функция Грина одномерного уравнения параболического типа при движении границы по закону $\beta\sqrt{t}$ // Латвийский математический ежегодник. Рига. Зинатне. 1973. С. 70–97.
5. *Кротов Г.С.* Аналитическое решение и функция Грина первой краевой задачи нестационарной теплопроводности в ограниченной области с границей, движущейся по корневой зависимости // Изв. РАН. Энергетика. 2021. № 1. С. 149–160.
6. *Кротов Г.С.* Корни трансцендентного уравнения с функцией параболического цилиндра при фиксированном значении аргумента // Тепловые вопросы в технике. 2015. Т. 7. № 7. С. 318–324.
7. *Кротов Г.С.* Корни функции параболического цилиндра при фиксированном значении аргумента // Ученые Записки МИТХТ. М. 2005. Выпуск 14. С. 41–48.
8. *Карташов Э.М., Любов Б.Я.* Метод решения краевых задач теплопроводности для области с границей, движущейся по параболическому закону // Журн. технической физики. 1971. Т. XVI. № 1. С. 3–16.
9. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз., 1962. 1100 с.
10. *Бейтман Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, 1966. Т. II. 330 с.

Analytic Solutions and Green's Functions of Dirichlet and Neumann Problems of Non-Stationary Heat Conduction in a Bounded Domain with a Boundary Moving According to a Root Dependence

G. S. Krotov*

Academy of Labour and Social Relations, Moscow, Russia

**e-mail: yamaths555@gmail.com*

Green's functions method is developed for the equation of non-stationary heat conduction in a bounded domain with a boundary moving according to the $\beta\sqrt{t}$ law. The method leads to exact analytical solutions of boundary value problems during temperature heating (Dirichlet boundary condition) and thermal heating (Neumann boundary condition). An explicit form of the Green's functions was obtained for the first and second-type boundary value problems in the area described above. The equivalence of the obtained results using the Green's function method and other methods is shown.

Keywords: Green's function, Dirichlet problem, Neumann problem, Dirichlet boundary condition, Neumann boundary condition, non-stationary heat conduction, transient heat conduction, heat equation, moving boundary, a boundary moving according to the $\beta\sqrt{t}$ law, integral transform