ИЗВЕСТИЯ РАН. ЭНЕРГЕТИКА 2022, № 2, с. 73–78

УДК 536.24

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ В ЗАДАЧЕ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ НЕОДНОРОДНОГО ПЛОСКОГО ТЕЛА

© 2022 г. Ю. В. Видин[1], В. С. Злобин[1, *]

[1]*Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования "Сибирский федеральный университет", Красноярск, Россия*

**e-mail: zlobinsfu@mail.ru*

Поступила в редакцию 15.09.2021 г.
После доработки 10.12.2021 г.
Принята к публикации 16.12.2021 г.

В статье получены аналитические расчетные зависимости для определения собственных значений многопараметрического характеристического уравнения, справедливого для неоднородной плоской системы тел. При этом числовые величины одного из параметров поставленной задачи разделены на два основных интервала от 0 до 1 и от 1 до бесконечности.

Ключевые слова: теория теплопроводности, многослойные системы, характеристическое уравнение, собственные значения, число Био

DOI: 10.31857/S0002331022020078

К основным методам изучения динамики распространения тепла в твердых телах относится аналитическая теория теплопроводности [1, 4]. При этом главной задачей при проведении таких исследований следует считать нахождение температурного поля внутри объема при заданных краевых условиях. Во многих случаях практики элементы конструкций, подвергнутые тепловому воздействию, являются многослойными [1–3]. Причем каждый из слоев, как правило, обладает своими свойствами, в том числе и теплофизическими. Необходимо отметить, что неоднородность составных тел приводит к существенному математическому усложнению при определении неустановившихся температурных полей. Однако в ряде случаев эти затруднения могут быть преодолены, если составное тело имеет ограниченное число слоев.

Проиллюстрируем рекомендуемый подход на примере трехслойной пластины, рассмотренном в работе [3]. Аналитическая постановка задачи, исследованной в [3], включает в себя следующие уравнения

$$\frac{\partial^2 t_i}{\partial x^2} = \frac{1}{a_i}\frac{\partial t_i}{\partial \tau} \quad (i = 1, 2, 3), \tag{1}$$

при дополнительных условиях

$$t_1 = t_2, \quad \lambda_1 \frac{\partial t_1}{\partial x} = \lambda_2 \frac{\partial t_2}{\partial x} \quad \text{при} \quad x = h, \tag{2}$$

$$\frac{\partial t_1}{\partial x} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \tag{3}$$

$$\lambda_2 \frac{\partial t_2}{\partial x} = \alpha (t_c - t_2) \quad \text{при} \quad x = h + \delta, \tag{4}$$

$$t_1 = t_2 = t_0 \quad \text{при} \quad \tau = 0. \tag{5}$$

Здесь использованы общепринятые обозначения, которые указаны в [3]. Применяя метод Лапласа, авторы данной статьи получили аналитическое решение поставленной задачи для искомых температурных полей в следующем безразмерном виде в форме бесконечных рядов

$$\vartheta_1 = \frac{t_1 - t_c}{t_0 - t_c} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(\mu_n X) \exp\left(-\mu_n^2 \mathrm{Fo}\right), \tag{6}$$

$$\vartheta_2 = \frac{t_2 - t_c}{t_0 - t_c} = \frac{1}{k} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left[(1 - k)\cos(\mu_n) + (1 + k)\cos(\mu_n)\right] \exp\left(-\mu_n^2 \mathrm{Fo}\right). \tag{7}$$

Здесь параметр k равен

$$k = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \sqrt{\frac{a_2}{a_1}}, \tag{8}$$

а собственные числа задачи μ_n являются корнями характеристического уравнения

$$1 - k \mathrm{tg} \mu \mathrm{tg}(r\mu) = \frac{\mu}{\mathrm{Bi}} \left[k \mathrm{tg} \mu + \mathrm{tg}(r\mu)\right], \tag{9}$$

где коэффициент r равен

$$r = \frac{\delta}{h} \sqrt{\frac{a_1}{a_2}}. \tag{10}$$

Основная математическая сложность при использовании в инженерных расчетах формул (6) и (7) заключается в определении собственных чисел уравнения (9). Особенно это важно при изучении начальной стадии теплового процесса в рассматриваемой конструкции, для которой безразмерное число Фурье Fo будет небольшим. Затабулировать зависимость (9) довольно затруднительно, что обусловлено наличием в ней нескольких параметров (k, r, Bi).

Для преодоления этого затруднения целесообразно исследовать зависимость (9) для ряда фиксированных величин от наиболее важного в данном случае параметра k. В самом общем варианте он теоретически может меняться от 0 до бесконечности. Поэтому за первое предельное значение принимаем $k = 0$. Тогда (9) можно представить в существенно более простом виде

$$\mathrm{ctg} \beta = \frac{\beta}{\mathrm{Bi}^*}, \tag{11}$$

где $\beta = r\mu$, $\mathrm{Bi}^* = r\mathrm{Bi}$.

Хорошо известно, что выражение типа (11) подробно изучено, например, в [4]. Так в монографии академика А.В. Лыкова [4] приведена весьма подробная таблица для первых шести корней уравнения (11), вычисленных с высокой точностью. Кроме этого, как показано в работе [2], первый корень выражения (11) может быть определен с необходимой точностью для любой величины Bi* по сравнительно простой аналитической формуле

$$\beta_1^2 = -\frac{15(3 + \mathrm{Bi}^*)}{2\mathrm{Bi}^*} + \sqrt{\frac{225(3 + \mathrm{Bi}^*)^2}{4(\mathrm{Bi}^*)^2} + 45}. \tag{12}$$

В качестве примера возьмем случай $\mathrm{Bi}^* = 1$. Тогда на основе (12) получим $\beta_1^2 = 0.7408523$, т.е. $\beta_1 = 0.8607$. Согласно табличным данным, приведенным в монографии [4], при $\mathrm{Bi}^* = 1$ первое собственное число $\beta_1 = 0.8603$, т.е. расхождение составляет менее 0.05%.

Далее берем реперную величину коэффициента $k = 1$. При такой величине k выражение (9) можно записать также в форме (11), но при этом следует понимать под β и Bi^* величины

$$\beta = (1+k)\mu \quad \text{и} \quad \mathrm{Bi}^* = (1+r)\,\mathrm{Bi} \tag{13}$$

и тогда, очевидно, методика вычисления корней β будет подобна вышеизложенной. Важно отметить, что если заданный по условию параметр k находится в интервале

$$0 < k < 1, \tag{14}$$

то рекомендуемые расчеты β_n для вариантов $k = 0$ и $k = 1$ будут являться оценочными "сверху" и "снизу" для искомых корней при условиях соответствующих ограничениям (14).

В завершение предлагаемого способа нахождения корней β_n примем, что параметр k велик и с математической точки зрения его можно принять как $k \to \infty$. Для такого предельного случая исходное уравнение (9) может быть записано в виде

$$\mathrm{tg}\beta = -\frac{\beta}{\mathrm{Bi}^*}, \tag{15}$$

где обозначения β и Bi^* те же самые, что и в соотношении (11). Для определения первых шести чисел β_n, удовлетворяющих формуле (15), могут быть использованы табличные данные, приведенные в классической монографии [4] и соответствующие характеристическому уравнению

$$\mathrm{tg}\beta = -\frac{\beta}{\mathrm{Bi}^{**} - 1}. \tag{16}$$

Для применения зависимости (16) вместо (15) необходимо принять, что

$$\mathrm{Bi}^{**} = \mathrm{Bi}^* + 1. \tag{17}$$

Таким образом, если исходная величина параметра k уравнения (9) находится в интервале

$$1 < k < \infty, \tag{18}$$

то вычисленные реперные величины β_n по $k = 1$ и $k \to \infty$ будут являться оценочными для действительного параметра k, находящегося в указанных пределах (18).

В таблице 1 приведены результаты вычислений первых двух корней уравнения (9) для ряда значений параметра k. При этом для всех вариантов были приняты $\mathrm{Bi} = 1$ и $r = 2$. Следует отметить, что для $k = 0$, $k = 1$ и $k \to \infty$ собственные значения были определены разработанным аналитическим методом.

Рассмотрим подробнее следующее характеристическое уравнение

$$\mathrm{tg}\mu = -\frac{\mu}{\mathrm{Bi} - 1}. \tag{19}$$

Задача заключается в нахождении аналитическим путем первых шести корней данного уравнения. Единое решение такого уравнения, наверное, получить сложно. Поэтому целесообразно искать решение зависимости (1) поэтапно. Первый этап заключается в получении зависимостей для начального интервала безразмерного числа Био. Наиболее подходящим таким интервалом является

$$0 \le \mathrm{Bi} \le 1. \tag{20}$$

Таблица 1. Значения первых двух корней уравнения (9)

k	β_1	β_2
0	0.53843	1.82180
0.1	0.51797	1.47261
0.3	0.48262	1.38206
0.5	0.45321	1.33295
0.8	0.41731	1.28895
1	0.39749	1.26959
1.5	0.35791	1.23823
2	0.32806	1.21945
3	0.28544	1.19799
∞	0.0	1.14446

Тогда первый корень μ_1 соотношения (19), наиболее важный, может быть определен с высокой степенью точности по формуле

$$\mu_1 = (\mathrm{Bi} + 5)\sqrt{\frac{21\mathrm{Bi}(\mathrm{Bi} + 5)}{7(2\mathrm{Bi} + 5)(\mathrm{Bi} + 5)^2 + (\mathrm{Bi} + 2)\mathrm{Bi}^2}}. \tag{21}$$

Из выражения (21) следует, что при $\mathrm{Bi} = 0$ корень $\mu_1 = 0$, а при $\mathrm{Bi} = 1$

$$\mu_1 = 6\sqrt{\frac{21\times1\times6}{7\times7\times6^2 + 25\times1\times3}} = 1.57053,$$

т.е. данное выражение дает практически точные значения μ_1 на участке $0 \le \mathrm{Bi} \le 1$. Последующие корни зависимости (1) на том же интервале Bi ($0 \le \mathrm{Bi} \le 1$) $n = 2, 3, 4, 5, 6$ могут быть вычислены также по сравнительно простому соотношению

$$\mu_n = \frac{2n-1}{2}\pi\left[1 - \frac{3}{2(2+\mathrm{Bi})}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{16(1-\mathrm{Bi})(2+\mathrm{Bi})}{3(2n-1)^2\pi^2}}\right)\right], \tag{22}$$

где $n = 2, 3, 4, 5, 6$ и т.д.

Согласно (22), получим при $\mathrm{Bi} = 0$ и $n = 2$ $\mu_2 = 4.4934$. Эта величина полностью соответствует табличному значению [4]. Аналогичные результаты дают расчеты по (22) и для последующих корней μ_n ($n = 3, 4, 5, 6$ и т.д.).

Таким образом, предлагаемые расчетные зависимости (21) и (22) полностью охватывают область $0 \le \mathrm{Bi} \le 1$.

Далее исследуем вторую важную область значений Bi, а конкретно $1 \le \mathrm{Bi} \le 2$. В этом случае приемлемо следующее исходное выражение для искомых корней μ_n.

$$\mu_n = \frac{2n-1}{2}\pi + \alpha_n, \tag{23}$$

где порядковый номер n проходит все значения от 1. Дополнительное слагаемое α_n в соотношении (23) находится по несложной зависимости, если использовать выражение [5]

$$\mathrm{tg}\left(\frac{2n-1}{2}\pi + \alpha_n\right) = \mathrm{ctg}\alpha_n. \tag{24}$$

Следовательно, уравнение (19) можно преобразовать к виду

$$\operatorname{ctg}\alpha_n = \frac{\frac{2n-1}{2}\pi + \alpha}{\mathrm{Bi}-1}. \tag{25}$$

Отсюда удается получить приближенное аналитическое выражение

$$\alpha_n = \frac{3(2n-1)\pi}{16(\mathrm{Bi}-1)}\left(\sqrt{1+\frac{64(\mathrm{Bi}-1)^2}{3(2n-1)^2\pi^2}}-1\right). \tag{26}$$

Подставляя (26) в (23), получим следующее окончательное расчетное соотношение для нахождения корней μ_n на участке $1 \le \mathrm{Bi} \le 2$

$$\mu_n = \frac{2n-1}{2}\pi\left[1+\frac{3}{8(\mathrm{Bi}-1)}\left(\sqrt{1+\frac{64(\mathrm{Bi}-1)^2}{3(2n-1)^2\pi^2}}-1\right)\right]. \tag{27}$$

В качестве примера на основе (27) вычислим μ_1 для $\mathrm{Bi} = 2$.

$$\mu_1 = \frac{2\times 1-1}{2}\pi\left[1+\frac{3}{8(2-1)}\left(\sqrt{1+\frac{64(2-1)^2}{3(2\times 1-1)^2\pi^2}}-1\right)\right] = 2.0291,$$

табличное значение $\mu_1 = 2.0288$, т.е. имеет место хорошее согласование. Рассчитаем по (27) μ_6 для того же числа $\mathrm{Bi} = 2$

$$\mu_6 = \frac{2\times 6-1}{2}\pi\left[1+\frac{3}{8(2-1)}\left(\sqrt{1+\frac{64(2-1)^2}{3(2\times 6-1)^2\pi^2}}-1\right)\right] = 17.33642.$$

Табличное значение μ_6 полностью совпадает с вычисленной величиной. Наверное, рекомендуемые расчетные выражения (26) и (27) можно применить и в тех случаях, когда число Био превышает названный предел 2.

Далее проведем подобное исследование для варианта, когда заданная величина параметра Bi является большой, например $\mathrm{Bi} \ge 10$. Тогда используя изложенный прием, можно принять, что искомые корни μ_n подчиняются зависимости

$$\mu_n = n\pi - \alpha_n. \tag{28}$$

Следовательно, будет справедливо соотношение [5]

$$\operatorname{tg}(n\pi - \alpha_n) = -\operatorname{tg}\alpha_n. \tag{29}$$

Это означает, что уравнение (19) в этом случае можно записать

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{n\pi - \alpha}{\mathrm{Bi}-1}. \tag{30}$$

В приближенном виде равенство (30) допустимо представить

$$\mathrm{Bi} - 1 = (n\pi - \alpha)\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{\alpha}{3}\right). \tag{31}$$

На основе (31) получаем квадратное алгебраическое уравнение

$$\alpha^2 + \frac{3\mathrm{Bi}}{n\pi}\alpha - 3 = 0, \tag{32}$$

решение которого имеет вид

$$\alpha_n = -\frac{3\mathrm{Bi}}{2n\pi} + \sqrt{\frac{9\mathrm{Bi}^2}{4n^2\pi^2} + 3} = \frac{3\mathrm{Bi}}{2n\pi}\left(\sqrt{1 + \frac{4n^2\pi^2}{3\mathrm{Bi}^2}} - 1\right). \quad (33)$$

Следовательно, с учетом (28) окончательно имеем

$$\mu_n = n\pi\left[1 - \frac{3\mathrm{Bi}}{2n^2\pi^2}\left(\sqrt{1 + \frac{4n^2\pi^2}{3\mathrm{Bi}^2}} - 1\right)\right]. \quad (34)$$

Рассмотрим некоторые частные случаи. Пусть $n = 1$ и $\mathrm{Bi} = 11$. Тогда, согласно (34), получим

$$\mu_1 = \pi\left[1 - \frac{3\times 11}{2\pi^2}\left(\sqrt{1 + \frac{4\pi^2}{3\times 11^2}} - 1\right)\right] = 2.8634,$$

табличное значение [4] равно $\mu_1 = 2.8628$, невязка составляет всего $\delta = 0.02\%$, а теперь $n = 6$ и $\mathrm{Bi} = 11$, тогда

$$\mu_6 = 6\times\pi\left[1 - \frac{3\times 11}{2\times 6^2\pi^2}\left(\sqrt{1 + \frac{4\times 6^2\pi^2}{3\times 11^2}} - 1\right)\right] = 17.7843.$$

Табличное значение равно $\mu_6 = 17.7908$ и, следовательно, расхождение тоже оказывается весьма малым.

Анализ предлагаемого решения (34) показывает, что оно может быть эффективно применено в более широком интервале величин Bi, а именно, начиная с $\mathrm{Bi} \geq 5$. Таким образом, выведены аналитические формулы, позволяющие вычислять корни трансцендентного характеристического уравнения типа (19) с высокой точностью для любых величин параметра Био ($0 \leq \mathrm{Bi} < \infty$) и для всех нужных порядковых номеров n. Следует заметить, что предложенный метод исследования характеристических уравнений может быть успешно распространен и на многие другие подобные задачи нестационарного теплообмена.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Видин Ю.В.* Исследование теплопроводности многослойных тел при нелинейных граничных условиях. Дис. д.т.н. М.: МИСиС, 1970. 254 с.
2. *Видин Ю.В., Злобин В.С., Иванов Д.И.* Нестационарный теплоперенос в неоднородных конструкциях криволинейной конфигурации. Красноярск: Сиб. федер. ун-т, 2016. 168 с.
3. *Мотовилец И.А., Киричок И.Ф.* О температурном поле трехслойной пластины. Сб. Тепловые напряжения в элементах конструкций, вып. 4. Киев: Изд-во АН УССР, 1964. С. 15–19.
4. *Лыков А.В.* Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967. 600 с.
5. *Бронштейн И.Н., Семендяев К.А.* Справочник по математике. М.: Гос. изд-во физико-математической литературы, 1962. 610 с.

Determination of Eigenvalues in the Problem of Nonstationary Thermal Conductivity of an Inhomogeneous Flat Body

Yu. V. Vidin[a] and V. S. Zlobin[a, *]

[a] *Siberian Federal University, Krasnoyarsk, Russia*

**e-mail: zlobinsfu@mail.ru*

In the article, analytical computational dependencies are obtained for determining the eigenvalues of a multiparametric characteristic equation that is valid for an inhomogeneous planar system of bodies. In this case, the numerical values of one of the parameters of the task are divided into two main intervals from 0 to 1 and from 1 to infinity.

Keywords: theory of thermal conductivity, multilayer systems, characteristic equation, eigenvalues, Bio number