УДК 536.24

РАСЧЕТ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ В ПЛОСКОМ ЛАМИНАРНОМ ПОТОКЕ ЖИДКОСТИ, ОБОГРЕВАЕМОМ С ОДНОЙ СТОРОНЫ

© 2022 г. Ю. В. Видин[1], Р. В. Казаков[1, *]

[1]*ФГАОУ ВО "Сибирский федеральный университет", Красноярск, Россия*

**e-mail: roman.v.kazakov@gmail.com*

Поступила в редакцию 25.01.2022 г.
После доработки 14.06.2022 г.
Принята к публикации 16.06.2022 г.

В статье предложен аналитический метод расчета температурного поля в ламинарном потоке жидкости в плоском канале, обогреваемом с одной стороны. Рекомендуемый способ основан на использовании разработанной авторами специальной функции, удовлетворяющей краевым условиям рассматриваемой задачи к исходному дифференциальному уравнению на упорядоченной стадии течения.

Ключевые слова: температурное поле, ламинарный поток, поток жидкости в канале, плоский канал

DOI: 10.31857/S0002331022050089

В статье рассматривается задача о теплообмене при вязкостном течении жидкости в плоском канале, одна стенка которой теплоизолирована, а на противоположной действует граничное условие третьего рода. Подобная проблема была сформулирована в работе [1], некоторые частные числовые результаты которой позднее были приведены в монографии [2]. По нашему мнению, представляет теоретический и практический интерес более детальное математическое изучение сформулированного в [1] процесса, на основании чего может быть существенно расширен данный класс теплофизических задач.

В теоретическом отношении поставленная проблема формулируется следующим образом

$$\frac{\partial^2 \vartheta(\psi, X)}{\partial \psi^2} = 6(\psi - \psi^2)\frac{\partial(\psi, X)}{\partial X}, \tag{1}$$

$$0 \le \psi \le 1, \quad 0 \le x < \infty,$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \psi} = 0 \text{ при } \psi = 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \psi} = -\mathrm{Bi}\vartheta \text{ при } \psi = 1, \tag{3}$$

$$\vartheta = 1 \text{ при } X = 0. \tag{4}$$

Здесь принята безразмерная форма записи уравнения, в которой

$$\vartheta = \frac{t_c - t}{t_c - t_0}, \quad X = \frac{1}{\mathrm{Pe}}\frac{x}{\delta},$$

$$\psi = \frac{y}{\delta}, \quad \mathrm{Pe} = \frac{\varpi\delta}{a},$$

$$\mathrm{Bi} = \frac{\alpha\delta}{\lambda},$$

где для определения числа Пекле (Pe) используется усредненная скорость потока жидкости по сечению канала ϖ.

Аналитическое решение задачи, записанной в виде комплекса уравнений (1)–(4), может быть представлено как бесконечный ряд

$$\vartheta(\psi, X) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n K_n(\psi)\exp\left(-\frac{1}{6}\mu_n^2 X\right), \tag{5}$$

где $K_n(\psi)$ и μ_n соответственно собственные функции и собственные значения данной задачи.

Для нахождения $K_n(\psi)$ и μ_n необходимо решить следующую задачу Штурма-Лиувилля

$$K'' + \frac{\mu^2}{6}(\psi - \psi^2)K = 0, \tag{6}$$

$$K' = 0 \text{ при } \psi = 0, \tag{7}$$

$$K' = -\mathrm{Bi}K \text{ при } \psi = 1. \tag{8}$$

Интеграл дифференциального уравнения (6), относящегося к классу обыкновенных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами, не может быть выражен через известные элементарный функции [3]–[7]. В данном конкретном случае, по-видимому, целесообразно использовать специальные функции [8]–[9]. Однако математической особенностью исследуемого процесса является геометрическое несовпадение экстремумов формирующегося в потоке жидкости поля скорости и поля температуры. В тех случаях, когда имеет место их совмещение, успешное математическое решение достигается с помощью применения Конфлюэнтных гипергеометрических функций [3]–[7]. Однако, как показано в монографии [4], применение названных функций приводят в итоге к слишком сложным и весьма громоздким расчетным соотношениям.

В связи с этим в рассматриваемой статье предлагается некоторый особый вид специальной функции, вытекающей из характера дифференциального уравнения (6). В основу рекомендуемого аналитического метода положена оценка максимальной величины собственной функции $K_n = 1$. Основываясь на этом исходном значении и осуществляя последовательный ряд процедур интегрирования на базе дифференциального уравнения (6) с учетом условия (7), удается получить следующий тип функции

$$\begin{aligned} K(\psi) = {} & 1 - \frac{\mu^2}{6}\left(\psi^3 - \frac{\psi^2}{2}\right) + \frac{\mu^4}{6}\left(\frac{\psi^6}{30} - \frac{\psi^7}{28} - \frac{\psi^8}{112}\right) \\ & - \frac{\mu^6}{6}\left(\frac{\psi^9}{9\times 240} - \frac{29\psi^{10}}{9\times 14\times 300} + \frac{5\psi^{11}}{11\times 1120} - \frac{\psi^{12}}{11\times 12\times 112}\right) + \\ & + \frac{\mu^8}{6}\left(\frac{\psi^{12}}{9\times 11\times 12\times 240} - \frac{31\psi^{13}}{9\times 12\times 13\times 2800} + \frac{1951\psi^{14}}{13\times 14\times 44\times 135\times 280} - \right. \\ & \left. - \frac{\psi^{15}}{6\times 14\times 15\times 16\times 22} + \frac{\psi^{16}}{11\times 12\times 15\times 16\times 112}\right). \end{aligned} \tag{9}$$

Естественно, используя полином (9), можно и дальше его расширить. Однако для проведения инженерных практических расчетных операций, как правило, вполне достаточным является решение (9).

Таблица 1. Значения первого собственного числа μ_1 характеристического уравнения (10)

Bi	μ_1	Bi	μ_1
0	0	2.0	2.5991
0.1	0.7606	5.0	3.1691
0.2	1.0567	10.0	3.4536
0.3	1.2722	20.0	3.6242
0.4	1.4447	50.0	3.7378
0.5	1.5886	100.0	3.7777
1.0	2.0837	∞	3.8187

Подставляя зависимость (9) в граничное условие (8), получим характеристическое уравнение вида

$$\begin{gathered}\mu^2(1-0.02142857\mu^2+0.000147306\mu^4-0.000000496\mu^6)=\\ =\mathrm{Bi}\left(6-\frac{\mu^2}{2}+0.0065476\mu^4-0.000034\mu^6+0.000000094\mu^8\right).\end{gathered} \tag{10}$$

Из соотношения (10) следует, что при $\mathrm{Bi}\to\infty$ (что соответствует граничному условию первого рода) оно упрощается

$$6-\frac{\mu^2}{2}+0.0065476\mu^4-0.000034\mu^6+0.000000094\mu^8=0. \tag{11}$$

По приведенным в монографии [2] данным значение первого собственного числа при $\mathrm{Bi}\to\infty$ равно $\mu_1 = 3.818667$. Аналогичную величину можно определить на основе алгебраического уравнения (11).

Таким образом уравнение (10) дает возможность рассчитать первое собственное число μ_1 с высокой точностью при любой величине Bi. Следует отметить, что при умеренных значения Bi зависимость (10) может быть сведена к биквадратному алгебраическому уравнению, и тогда для нахождения μ_1^2 удается составить сравнительно простое замкнутое расчетное решение

$$\mu_1^2=\frac{\mathrm{Bi}+2}{4(0.02142857+0.0065476\mathrm{Bi})}\left(1-\sqrt{1-\frac{96\mathrm{Bi}(0.02142857+0.0065476\mathrm{Bi})}{(\mathrm{Bi}+2)^2}}\right). \tag{12}$$

В этом случае, когда безразмерное число $\mathrm{Bi} = 0$, характеристическое уравнение также упрощается

$$\mu^2(1-0.02142857\mu^2+0.000147306\mu^4-0.000000496\mu^6)=0, \tag{13}$$

и тогда нахождение на его основе второго корня μ_2 сводится к решению кубического алгебраического уравнения, которое нетрудно получить $\mu_2 = 8.751$.

В табл. 1 приведены значения первого собственного числа μ_1 в зависимости от величины Bi. При составлении таблицы были применены расчетные выражения (10)–(12).

Для определения коэффициентов A_n ряда (5) нужно использовать условие (4), которое описывает распределение температуры по сечению потока жидкости на входе в канал ($X = 0$). Исходя из него, вычисление коэффициентов A_n осуществляется с помощью выражения

$$\sum_{n=1}^{\infty}A_nK_n(\psi)=1. \tag{13}$$

Отсюда получим [5]

$$A_n = \frac{\int_0^1 (\psi - \psi^2) K_n d\psi}{\int_0^1 (\psi - \psi^2) K_n^2 d\psi}, \quad (14)$$

где собственные функции K_n описываются формулами родственными (9).

В заключение нужно отметить, что при проведении технических расчетов особо важными являются величины μ_1 и $K_1(\psi)$. Это обусловлено тем, что бесконечный ряд в решении (5) оказывается быстросходящимся. Начиная со сравнительно небольших значений осевой координаты X (обычно при $X \geq 0.03$), все слагаемые в формуле (5) становятся пренебрежимо малыми по сравнению с первым числом ряда.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Schenk I.* A problem of heat transfer in laminar flow between parallel plates, Appe. Scient Res., 1955, A5, N. 2–3, p. 241–244.
2. *Петухов Б.С.* Теплообмен и сопротивление при ламинарном течении жидкости в трубах. М.: Энергия, 1967. С. 411.
3. *Видин Ю.В., Иванов В.В., Медведев Г.Г.* Расчет теплообмена при ламинарном течении жидкости в каналах. Красноярск, КрПИ, 1971. С. 144.
4. *Видин Ю.В., Иванов В.В., Казаков Р.В.* Инженерные методы расчета задач теплообмена. Красноярск, СФУ, 2014. С. 164.
5. *Видин Ю.В., Казаков Р.В.* Расчет теплообмена при ламинарном течении жидкости в цилиндрическом канале при наличии аксиальной теплопроводности. Теплофизика высоких температур. 2019. Т. 57. № 2. С. 308–311.
6. *Маделунг Э.* Математический аппарат физики. М.: Наука, 1968. С. 618.
7. *Абрамовиц М., Стиган Л.* Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979. С. 830.

Calculation of the Temperature Field in a Flat Laminar Fluid Flow Heated from One Side

U. V. Vidin[a] and R. V. Kazakov[a, *]

[a]*Siberian Federal University, Krasnoyarsk, Russia*
**e-mail: roman.v.kazakov@gmail.com*

The article proposes an analytical method for calculating the temperature field in a laminar fluid flow in a flat channel heated from one side. The recommended method is based on the use of a special function developed by the authors that satisfies the boundary conditions of the problem under consideration to the original differential equation at the ordered stage of the flow.

Keywords: temperature field, laminar flow, fluid flow in a channel, flat channel