

УДК 536.228

**ПРЕДЕЛЬНЫЕ И БИНАРНЫЕ СХЕМЫ РОСТА ПАРОВОГО ПУЗЫРЬКА  
В НЕОГРАНИЧЕННОМ ОБЪЕМЕ ЖИДКОСТИ**© 2023 г. Ю. Б. Зудин<sup>1</sup>, \*, Д. С. Уренов<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Федеральное государственное бюджетное учреждение  
“Национальный исследовательский центр “Курчатовский институт”, Москва, Россия  
\*e-mail: yzudin@gmail.com

Поступила в редакцию 01.02.2023 г.

После доработки 16.06.2023 г.

Принята к публикации 23.06.2023 г.

Рассмотрена задача сферически-симметричного роста парового пузырька в неограниченном объеме равномерно перегретой жидкости. Изложена концепция предельных схем роста, каждая из которых определяется воздействием одного физического фактора. Предложена аналитическая аппроксимация интеграла Скрайвена и проведен анализ ее асимптотик. Получены аналитические решения для бинарных схем роста, в рамках которых учитывается воздействие на рост пузырька двух физических факторов.

*Ключевые слова:* паровой пузырек, предельные схемы роста, физический фактор, асимптотики, бинарные схемы роста

DOI: 10.31857/S0002331023050072, EDN: WZNIWS

**ВВЕДЕНИЕ**

**Пузырьки в жидкости.** Феномен пузырьков в жидкости, несмотря на флуктуационный характер зарождения и краткое время существования, имеет богатый спектр проявлений. К ним относятся: подводная акустика, сонолюминисценция, ультразвуковая диагностика, снижение трения поверхностными нанопузырьками, пузырьковое кипение [1]. Такие специфические проявления поведения пузырьков, как микропоршневая инъекция капель при струйной печати и спиральная траектория гравитационного всплывания пузырька в жидкости (“парадокс Леонардо да Винчи”), позволили автору [2] говорить о “пузырьковых пазлах”.

В 1859 г. Безант (Besant) [3] поставил задачу о заполнении идеальной несжимаемой жидкостью пустой сферической полости радиуса  $R$ . Выражение для времени заполнения полости (в отсутствие поверхностного натяжения на ее границе) было записано в виде интеграла, который в 1917 г. был вычислен Рэлеем (Rayleigh) [4]. Обширную библиографию исследований проблемы динамики паровых (газовых) пузырьков за последние полвека можно найти, в частности, в детальных обзорах [5, 6].

Знание динамики парового пузырька важно для понимания механизма кипения жидкости, перегретой относительно температуры насыщения. Идеализированным объектом изучения этого явления служит задача сферически-симметричного роста парового пузырька в объеме равномерно перегретой жидкости. Эта задача наиболее полно исследовалась в экспериментах по вскипанию жидкости в условиях микрогравитации [7, 8] (полет самолета по параболической траектории; свободное падение платформы; полет на орбитальной космической станции).

**Численные и аналитические исследования.** В работе [8] изложены результаты численного моделирования задачи роста парового пузырька. Решалась система дифференциальных уравнений сохранения массы, импульса и энергии (как для жидкой, так и для паровой фаз). Однако автор [8] аппроксимировал результаты расчетов функции  $R(t)$  (называемой также “законом роста пузырька” – сокращенно ЗРП) размерной эмпирической формулой. Это исключает возможность ее экстраполяции на другие диапазоны параметров. Важное значение имеют здесь аналитические решения, позволяющие исследовать влияние различных физических факторов на процесс роста парового пузырька. В настоящей статье приводится ряд аналитических решений для ЗРП, каждое из которых описывает отдельную самостоятельную задачу. Проводится исследование асимптотик решений по определяющим параметрам, которые имеют сложный характер и в свою очередь включают в себя “внутренние асимптотики”.

### ПРЕДЕЛЬНЫЕ СХЕМЫ РОСТА ПАРОВОГО ПУЗЫРЬКА

Рассмотрим рост сферического парового пузырька в неограниченном объеме жидкости (рис. 1). Из теплового баланса следует, что тепловой поток  $q$ , подводимый из перегретой жидкости за счет теплопроводности, должен быть равным тепловому потоку, переносимому через межфазную поверхность (МФП) за счет фазового превращения

$$q = \rho_v h_{fv} \dot{R}. \tag{1}$$

**Концепция Лабунцова.** Лабунцов [9] впервые сформулировал концепцию «предельных схем роста» (ПСР), каждая из которых определяется каким-либо одним фактором (в предположении, что влияние остальных факторов отсутствует). Было показано, что при воздействии двух или нескольких факторов скорость роста будет меньше наименьшего из значений, рассчитанных в рамках каждой ПСР. Системный подход Лабунцова позволяет находить относительный вклад каждого физического эффекта, а также выделять фактор, лимитирующий рост пузырька. В работе [9] рассматриваются четыре ПСР (рис. 1): а) динамическая вязкая схема; б) динамическая инерционная схема; в) энергетическая молекулярно-кинетическая схема; г) энергетическая тепловая схема (ЭТС).

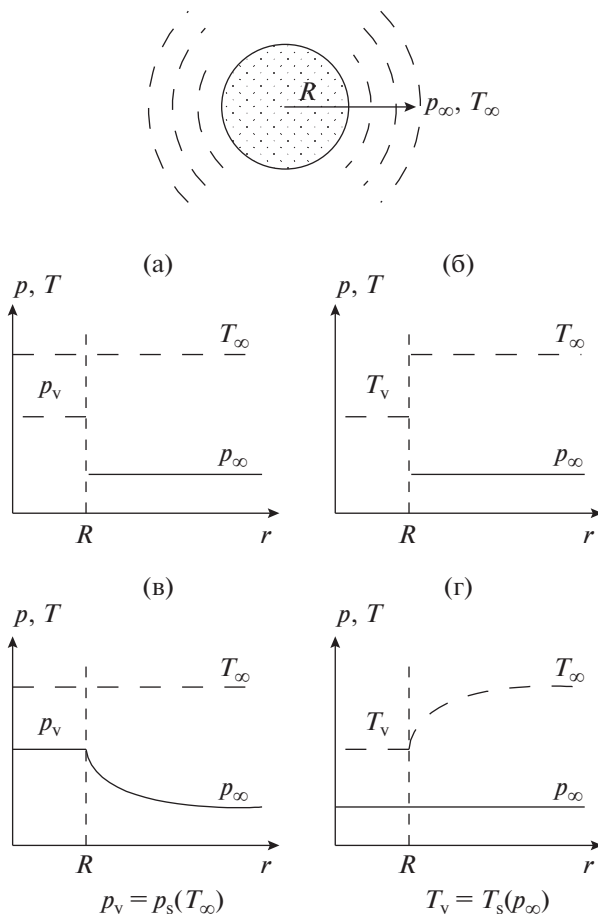
**Динамическая вязкая схема** (рис. 1а). Разность давлений между паром в пузырьке и жидкостью вдали от него ( $\Delta p = p_v - p_\infty$ ) уравнивается нормальной компонентой тензора вязких напряжений на МФП со стороны жидкой фазы. Это приводит к соотношению

$$R = R_0 \exp\left(\frac{1}{4} \frac{\Delta p t}{\mu_f}\right). \tag{2}$$

Отличительной чертой динамической вязкой схемы является то, что она описывает рост пузырька не “из точки” ( $t = 0, R = 0$ ), а от конечного начального радиуса ( $t = 0, R = R_0$ ). Здесь  $\dot{R} = dR/dt$  – скорость роста пузырька.

**Динамическая инерционная схема** (рис. 1б). Обе фазы находятся в изотермических условиях ( $T_\infty = T_v = \text{const}$ ). Движущий перепад давлений возникает как инерционная реакция на рост пузырька. Радиальное расширение жидкости описывается уравнением Рэлея [4]

$$\frac{\Delta p}{\rho_f} = R\ddot{R} + \frac{3}{2} \dot{R}^2, \tag{3}$$



**Рис. 1.** Предельные схемы роста парового пузырька: (а) динамическая вязкая схема; (б) динамическая инерционная схема; (в) энергетическая молекулярно-кинетическая схема; (г) энергетическая тепловая схема.

где  $\ddot{R} = d^2R/dt^2$ . При  $\Delta p = \text{const}$  отсюда следует известная формула Рэлея<sup>1</sup>

$$R = \sqrt{\frac{2 \Delta p}{3 \rho_f} t}. \quad (4)$$

Условие изотермичности предполагает, что градиент температуры в жидкости тождественно равен нулю. Тогда из закона Фурье  $q = -\lambda_f \text{grad} T$  следует, что выполнение уравнения теплового баланса (1) возможно лишь в предельном случае  $\lambda_f \rightarrow \infty$ .

**Энергетическая молекулярно-кинетическая схема** (рис. 1в). На МФП со стороны паровой фазы доминируют неравновесные эффекты. Обе фазы находятся в изобарических условиях ( $p_v = p_\infty = \text{const}$ ) в условиях постоянной разности температур

<sup>1</sup> Формула (4) справедлива для всей области давлений, за исключением узкой области в окрестности термодинамической критической точки, где плотности фаз становятся соизмеримыми.

( $\Delta T = T_\infty - T_v = \text{const}$ ). В работе [10] на основе линейной кинетической теории испарения было получено выражение

$$\dot{R} = \frac{\beta}{1 - 0.4\beta} \frac{h_{fv}\Delta T}{T_\infty \sqrt{2\pi R_g T_\infty}}. \quad (5)$$

Здесь  $\beta$  – коэффициент испарения-конденсации, который может изменяться в диапазоне  $0 < \beta \leq 1$ . При  $\beta \approx 1$  расчет по формуле (5) дает чрезвычайно большую скорость роста. Поэтому энергетическая молекулярно-кинетическая схема может реально проявляться лишь при  $\beta \ll 1$ .

**Энергетическая тепловая схема** (рис. 1г). Обе фазы находятся в изобарических условиях ( $p_v = p_\infty = \text{const}$ ). Температура пара в пузырьке равна температуре насыщения при давлении в системе:  $T_v = T_s(p_\infty)$ . ЗРП описывается автомодельным законом тепловой диффузии

$$R = m\sqrt{a_f t}, \quad (6)$$

где  $m$  – “модуль роста” (МР). Отсюда с учетом уравнения теплового баланса (1) следует выражение для подводимого к МФП теплового потока

$$q = \frac{1}{2} m h_{fv} \rho_v \sqrt{\frac{a_f}{t}}. \quad (7)$$

Как показывают оценки, динамическая вязкая схема и энергетическая молекулярно-кинетическая схема могут определять ЗРП лишь в специальных случаях. В реальном процессе начальную стадию роста описывает динамическая инерционная схема. С течением времени скорость роста пузырька и давление пара в нем быстро падают, и ЗРП все более приближается к условиям ЭТС.

### РЕШЕНИЕ СКРАЙВЕНА

Аналитическое решение для ЗРП в рамках ЭТС впервые получил Скрайвен (Scriven) [11] в виде интеграла, результаты вычисления которого были представлены в табличном виде. Однако итоговая таблица Скрайвена весьма неудобна для проведения инженерных расчетов. По-видимому, по этой причине пионерские результаты [11] до настоящего времени практически не используются. Представленная в работе [12] полуэмпирическая аппроксимация интеграла Скрайвена (ИС) имеет значительную погрешность и поэтому также малопригодна для практики. Ниже предлагается аппроксимация ИС, имеющая высокую точность для всех значений определяющих параметров. Для этой цели в метод работы [12] вносятся радикальные изменения.

**Интеграл Скрайвена.** Рассматривается уравнение энергии для жидкости

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{a_f}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right),$$

удовлетворяющее граничным условиям  $T = T_v$  при  $r = R(t)$ ;  $T \rightarrow T_\infty$  при  $r \rightarrow \infty$ . Радиальная скорость  $u$  определяется уравнением неразрывности  $r^2 u = R^2 \dot{R}$ . Зная распределение температур, можно с помощью закона Фурье  $q = -\lambda_f \partial T / \partial r$  найти тепловой поток на МФП, а затем из уравнения теплового баланса (1) – ЗРП.

Интегрирование уравнение энергии дает следующее выражение для ИС

$$\text{Ja} = \frac{m^2}{2} \int_0^\infty \frac{1}{(1 + \xi)^2} \exp \left[ -\frac{m^2 (2\varepsilon + 3\xi + \xi^2) \xi}{4(1 + \xi)} \right] d\xi. \quad (8)$$

Здесь введены параметры: отношение плотностей жидкой и паровой фаз

$$\varepsilon = \frac{\rho_v}{\rho_f} \quad (9)$$

и “число Якоба”

$$\text{Ja} = \frac{\rho_f c_{pf} \Delta T}{\rho_v h_{fv}}. \quad (10)$$

**Анализ асимптотик интеграла Скрайвена.** Асимптотика “медленного роста” ( $\text{Ja} \rightarrow 0$ ) соответствует стационарной проблеме теплопроводности. Записывая тепловой поток в виде  $q = \lambda_f \Delta T / R$ , с учетом автомодельного закона (6) получаем

$$m = \sqrt{2\text{Ja}}. \quad (11)$$

Асимптотика “быстрого роста” ( $\text{Ja} \rightarrow \infty$ ) имеет вид

$$S = \sqrt{\pi} m_* \exp(m_*^2) \text{erfc}(m_*), \quad (12)$$

где  $m_* = \varepsilon m / \sqrt{12}$  – модифицированный МР;  $\text{erfc}(m_*)$  – дополнительный интеграл вероятности. В левой части уравнения (12) стоит ключевой параметр ЭТС – “число Стефана”

$$S = \frac{c_{pf} \Delta T}{h_{fv}}. \quad (13)$$

Таким образом МР определяется тремя безразмерными параметрами: отношением плотностей фаз (9), числом Якоба (10) и числом Стефана (13). Эти величины связаны между собой соотношением

$$\text{Ja} \varepsilon = S, \quad (14)$$

с учетом которого число определяющих параметров сокращается до двух. Вопрос выделения главных параметров задачи Скрайвена, составляющий основную интригу анализа ИС, обсуждается ниже.

Асимптотика (12), в свою очередь, включает в себя две внутренние асимптотики. Средняя асимптотика получается в результате раскрытия неопределенности вида  $m \rightarrow \infty$ ,  $\varepsilon \rightarrow 0 \Rightarrow m_* \rightarrow 0$ , и мы будем иметь

$$m = 2\sqrt{\frac{3}{\pi}} \text{Ja}. \quad (15)$$

Формула (15) была получена в работе Плессета–Цвика (Plesset–Zwick) [13] с помощью весьма сложной математической процедуры. Авторы [14] пришли к той же формуле на основе гипотезы о тонком тепловом пограничном слое на МФП.

Покажем, что существует еще один вывод средней асимптотики. Полагая в подынтегральном выражении в правой части уравнения (8)  $\varepsilon = 0$  и выполняя в нем линейризацию по переменной  $\xi \ll 1$ , приходим к табличному интегралу

$$\int \frac{1}{(1+\xi)^2} \exp\left[-\frac{m^2}{4} \frac{(2\varepsilon + 3\xi + \xi^2)\xi}{1+\xi}\right] d\xi \Rightarrow \sqrt{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{m} \text{erf}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} m \xi\right).$$

Переходя к определенному интегралу с пределами  $\xi = 0$ ,  $\xi = \infty$  и подставляя результат в формулу (8), получаем формулу (15).

Соотношения (14), (15) позволяют преобразовать асимптотику быстрого роста (12) к более удобному виду

$$m = 2\sqrt{\frac{3}{\pi}}\psi Ja. \tag{16}$$

Формулу (7) для подводимого к МФП теплового потока также можно переписать в виде

$$q = \sqrt{\frac{3}{\pi}}\frac{a_f}{t}\psi Ja h_{fv}\rho_v. \tag{17}$$

Соотношение (16) обобщает формулу Плессета—Цвика на весь диапазон изменения числа Стефана. Здесь  $\psi$  – “фактор интенсификации”, описывающий зависимость “нестационарного” теплового потока от числа Стефана.

Вторая внутренняя асимптотика уравнения (12) получается из разложения его правой части в ряд при  $m_* \rightarrow \infty$ . Ограничиваясь первыми двумя членами, будем иметь

$$m = \sqrt{\frac{6}{1 - S\varepsilon}}. \tag{18}$$

Как следует из формулы (18), при  $S = 1$  энтальпия перегрева единицы массы жидкости  $c_p\Delta T$  становится равной теплоте фазового перехода  $h_{fv}$ . Физические ограничения на скорость фазовых превращений при этом исчезают, и каждая частица жидкости вблизи МФП мгновенно превращается в пар. Поэтому при  $S \rightarrow 1$  соотношение (18) дает *асимптотику теплового взрыва*  $m \rightarrow \infty$ .

Отметим, однако, что в действительности скорость роста пузырька при  $S = 1$  ограничена физическими факторами, не учитываемыми в рамках ЭТС.

- Радиальное расширение жидкости за счет роста пузырька вызовет ее инерционную реакцию. Это приведет к повышению давления на МФП, а значит, и в объеме пузырька. Как следствие, температура насыщенного пара  $T_v$  возрастет, а перепад температур  $\Delta T = T_\infty - T_v$  уменьшится. Это, в свою очередь, приведет к снижению подводимого к МФП теплового потока, а с учетом (1) – также и скорости роста пузырька  $\dot{R}$ .

- Согласно концепции ПСР неограниченному возрастанию интенсивности испарения препятствуют молекулярно-кинетические эффекты на МФП со стороны паровой фазы. Как следует из уравнения (5), энергетическая молекулярно-кинетическая схема предписывает конечную скорость роста.

При  $\varepsilon = 1$  будем иметь *асимптотику однородной среды*

$$S = \frac{m^2}{2} \left[ 1 - \frac{\sqrt{\pi}}{2} m \exp\left(\frac{m^2}{4}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{m}{2}\right) \right], \tag{19}$$

соответствующую условиям термодинамической критической точки ( $\rho_f = \rho_v$ ). При этом, согласно формуле (14), число Якоба становится равным числу Стефана. Функция  $S(m)$  при  $m \rightarrow 0$  имеет вид  $S = 1/2m^2$ , а при  $m \rightarrow \infty$  стремится к единице (рис. 2). Важно отметить, что в отличие от асимптотик (11), (12), (15), (18) уравнение (19) представляет собой точное решение задачи, описывающее частный случай ИС.

### АППРОКСИМАЦИЯ ИНТЕГРАЛА СКРАЙВЕНА

**Метод аппроксимации.** Изложим кратко метод аппроксимации ИС, разработанный в работе [12] с участием одного из авторов настоящей статьи. В основе метода лежит

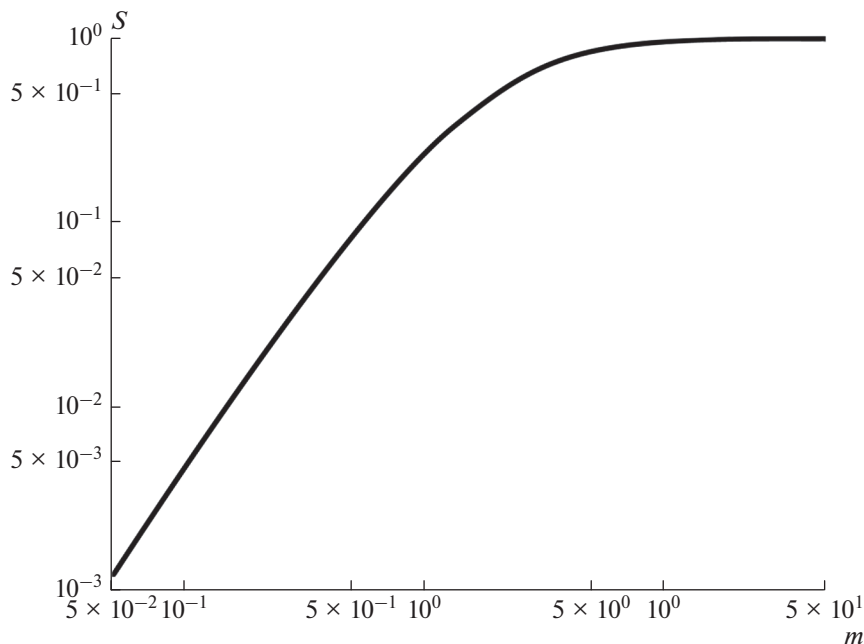


Рис. 2. Зависимость числа Стефана от модуля роста для случая однородной среды.

задача нестационарной теплопроводности о скачке температур на поверхности сферы. Из ее решения [15] следует “правило суперпозиции” тепловых потоков

$$q = q_0 + q_\infty. \quad (20)$$

При  $t \rightarrow 0$  превалирует “нестационарная” составляющая  $q_0 = \lambda \Delta T / \sqrt{\pi a t}$ ; при  $t \rightarrow \infty$  тепловой поток стремится к своему предельному “стационарному” значению  $q_\infty = \lambda \Delta T / R$ .

При переходе от неподвижной сферы к растущему пузырьку используется выражение (17) для “нестационарного” теплового потока с фактором интенсификации, равным

$$\psi(S) = 1 + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{1}{\sqrt{1-S}} - 1 \right). \quad (21)$$

Тогда из (20) получаем итоговую расчетную формулу работы [12]

$$m = \sqrt{3/\pi} \text{Ja} \psi + \sqrt{3/\pi (\text{Ja} \psi)^2 + 2\text{Ja}}. \quad (22)$$

**Погрешность аппроксимации.** Для валидации уравнения (22) использовалось решение (19) для случая однородной среды. Было получено, что при  $S \approx 0.75$ ,  $m \approx 3.9$  относительная погрешность (22) превышает 12%. Выборочное сопоставление формулы (22) с таблицей Скрайвена показало, что в области  $S \rightarrow 1$  она также имеет значительную погрешность.

В этой связи актуальность приобретает проблема построения наиболее точной аппроксимации ИС. При этом будем исходить из сформулированных Карташовым [16] фундаментальных условий, которым должно удовлетворять приближенное решение:

- минимально возможная расчетная погрешность;

- обеспечение сходимости процесса (настолько хорошо, чтобы можно было сделать заключения о свойствах полученного решения);
- наличие всех операций, допускаемых в процессе преобразований;
- достаточно простая реализация в практических приложениях.

### УТОЧНЕННАЯ АППРОКСИМАЦИЯ

**Фактор интенсификации.** Как показывают оценки, даже небольшая погрешность формулы (21) может приводить к заметной погрешности итогового уравнения для МР. Поэтому ниже вместо (21) используется выражение для фактора интенсификации, имеющее максимальную относительную погрешность 0.01%

$$\psi = \left[ 1 + (\sqrt{\pi/2} - 1)S \right] \left( 1 + \sum_{i=1}^7 \beta_i S^i \right)^{-1/2}, \quad i = 1, 2, \dots, 7. \quad (23)$$

Здесь  $\beta_1 = -0.7604$ ,  $\beta_2 = -0.4452$ ,  $\beta_3 = 0.6153$ ,  $\beta_4 = -1.5366$ ,  $\beta_5 = 2.3369$ ,  $\beta_6 = -1.7361$ ,  $\beta_7 = 0.5261$ .

**Эквивалентные формы аппроксимации.** Будем искать такую конструкцию аппроксимации ИС, которая хорошо описывает как случай “пустого пузырька”  $\epsilon \rightarrow 0$ , так и вариант “гомогенной среды”  $\epsilon = 1$ . После проведения и анализа многочисленных вариантов расчетов было получено полуэмпирическое соотношение для функции  $m(Ja, \epsilon)$

$$m = \sqrt{3/\pi} \psi Ja + \left[ (\sqrt{3/\pi} \psi Ja)^n + (2Ja)^{n/2} \right]^{1/n}, \quad (24)$$

где  $n = 2.315 - 0.575\epsilon$ . Переходя с помощью формулы (14) от числа Якоба к числу Стефана, перепишем уравнение (24) в виде функции  $m(S, \epsilon)$

$$m = \sqrt{3/\pi} S \psi / \epsilon + \left[ (\sqrt{3/\pi} S \psi / \epsilon)^n + (2S/\epsilon)^{n/2} \right]^{1/n}. \quad (25)$$

Уравнения (24), (25) представляют собой эквивалентные формы аппроксимации ИС. Они имеют погрешность менее 1.3% и удовлетворяют условиям Карташова [16] для приближенных аналитических решений. Следующим необходимым шагом является анализ асимптотик полученного решения.

**Асимптотический анализ.** Для предельного случая «пустого пузырька» имеем:  $\epsilon = S = 0$ ,  $\psi = 1$ ,  $n = 2.315$ . Здесь предпочтительной является форма записи (24)

$$m = \sqrt{3/\pi} Ja + \left[ (\sqrt{3/\pi} Ja)^n + (2Ja)^{n/2} \right]^{1/n}. \quad (26)$$

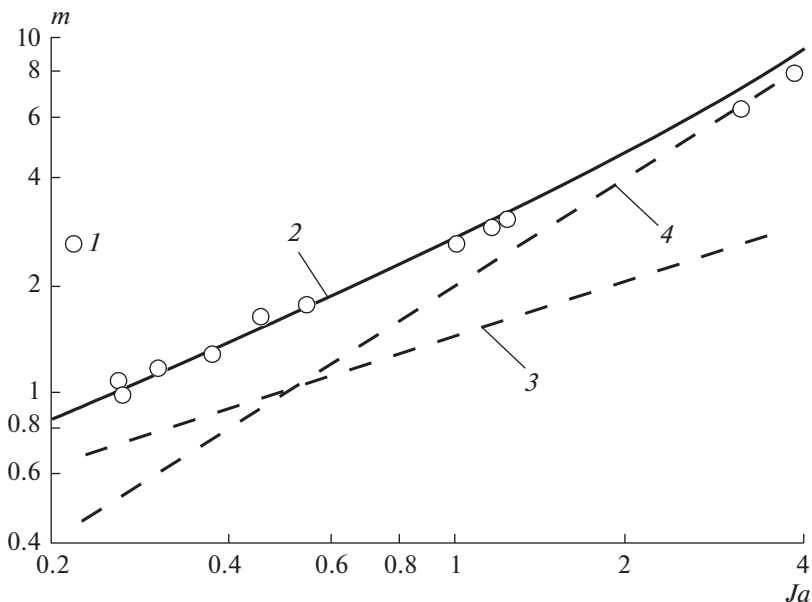
Асимптотика (26) содержит две внутренние асимптотики по числу Якоба: при  $Ja \rightarrow 0$  – формулу (11); при  $Ja \rightarrow \infty$  – формулу (15). Формула (26) хорошо описывает экспериментальные данные, полученные в работе [17] при исследовании вскипания жидкости в условиях микрогравитации при  $\epsilon \approx 3.3 \times 10^{-3}$  (рис. 3).

Для предельного случая гомогенной среды ( $\epsilon = 1$ ,  $n = 1.74$ ) следует использовать форму записи (25)

$$m = \sqrt{3/\pi} S \psi + \left[ (\sqrt{3/\pi} S \psi)^n + (2S)^{n/2} \right]^{1/n}. \quad (27)$$

Уравнение (27) описывает решение (19) с погрешностью 1.3%. При  $S \rightarrow 1$  фактор интенсификации (23) неограниченно возрастает. Это приводит к неограниченному росту МР, и мы приходим к асимптотике теплового взрыва.





**Рис. 3.** Энергетическая тепловая схема при  $\varepsilon \ll 1$ . Зависимость модуля роста от числа Якоба. 1 – экспериментальные данные [17]; 2 – расчет по формуле (23); 3 – расчет по “стационарной” формуле (11); 4 – расчет по “нестационарной” формуле (15).

**Результаты расчета.** На рис. 4 представлена расчетная зависимость МР от числа Стефана с параметром  $\varepsilon$ . Как видно из рисунка, при увеличении  $\varepsilon$  кривые  $m(S)$  смещаются вниз, причем верхняя кривая соответствует случаю “пустого пузырька”  $\varepsilon \ll 1$ , а нижняя – случаю гомогенной среды  $\varepsilon = 1$ . Для всех кривых характерен монотонный рост МР при увеличении числа Стефана и “взрывной” рост при  $S \rightarrow 1$ .

Рис. 5 иллюстрирует зависимость МР от отношения плотностей фаз с числом Стефана в качестве параметра. Из рисунка следует, что увеличение  $\varepsilon$  приводит к монотонному падению МР. При увеличении  $S$  кривые  $m(\varepsilon)$  смещаются вверх, причем нижняя кривая соответствует случаю  $S \ll 1$ , а верхняя –  $S = 1$ .

Отметим, что в подавляющем большинстве приложений, связанных с кипением жидкостей, ЗРП рассчитывается по формуле Плессета–Цвика (15). Тем самым не учитываются два существенных эффекта: а) в области малых значений  $S$  – “стационарную” составляющую теплоподвода к границе пузырька (последний член в квадратных скобках в правой части уравнений (24), (25)), б) в области  $S \sim 1$  – фактор интенсификации, определяемый формулой (23).

Поэтому формула Плессета–Цвика занижает реальную скорость роста, что наглядно иллюстрирует рис. 6. Как видно из рисунка, при очень малых  $\varepsilon$  существует некоторая промежуточная область чисел Стефана, в которой кривые Скрайвена и Плессета–Цвика практически совпадают. При увеличении  $\varepsilon$  расслоение кривых усиливается. Так, при  $\varepsilon = 8 \times 10^{-3}$  обе кривые фактически имеют лишь одну общую точку:  $S \approx 0.066$ ;  $m \approx 17.5$ . В предельном случае  $\varepsilon = 1$  кривая Скрайвена всегда лежит значительно ниже кривой Плессета–Цвика. Наконец, последняя по определению не может

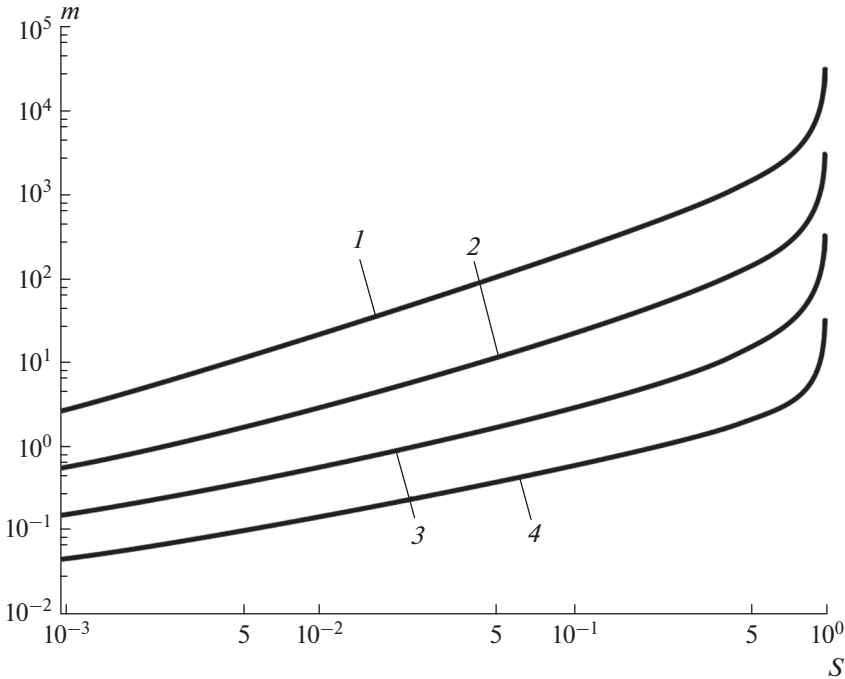


Рис. 4. Зависимость модуля роста от числа Стефана:  $1 - \epsilon = 10^{-3}$ ;  $2 - \epsilon = 10^{-2}$ ;  $3 - \epsilon = 10^{-1}$ ;  $4 - \epsilon = 10^0$ .

предсказать эффект “теплового взрыва”, когда при  $S = 1$  кривые Скрайвена уходят на бесконечность при любых значениях отношения плотностей  $\epsilon$ .

Рис. 7 демонстрирует описанные выше тенденции в координатах  $m(\text{Ja})$ . Здесь наглядно иллюстрируется связь диапазона изменения числа Якоба с параметром  $\epsilon$ . При  $S = 1$  из формулы (14) получаем предельное максимальное значение числа Якоба  $\text{Ja} = 1/\epsilon$ .

**Определяющие параметры.** Неотъемлемым параметром, определяющем ТЭС, является отношение плотностей фаз (9), изменяющееся в диапазоне  $0 < \epsilon \leq 1$ . В качестве основного теплового параметра выступает число Стефана (13), имеющее тот же диапазон изменения:  $0 < S \leq 1$ . Эти два главных параметра связаны между собой соотношением (14), что определяет пределы изменения числа Якоба (10):  $0 < \text{Ja} < 1/\epsilon$ . Поэтому из двух эквивалентных форм аппроксимации ИС соотношение (25) является первичным, а соотношение (24) – вторичным.

Для области  $S \ll 1$ , представляющей интерес для большинства приложений, более удобно использовать “нестрогое” соотношение (24). Однако в общем случае использование числа Якоба в качестве независимого параметра может привести к нефизическому результату:  $\text{Ja} > 1/\epsilon$ ,  $S = \epsilon \text{Ja} > 1$ . Такой “заход в запрещенную область” может иметь место, в частности, для случая кипения органических жидкостей [18].

### БИНАРНЫЕ СХЕМЫ РОСТА

Рассмотренные выше ПСР (рост пузырька лимитируется одним фактором) представляют собой первый этап системного анализа задачи. В действительности ЗРП, как

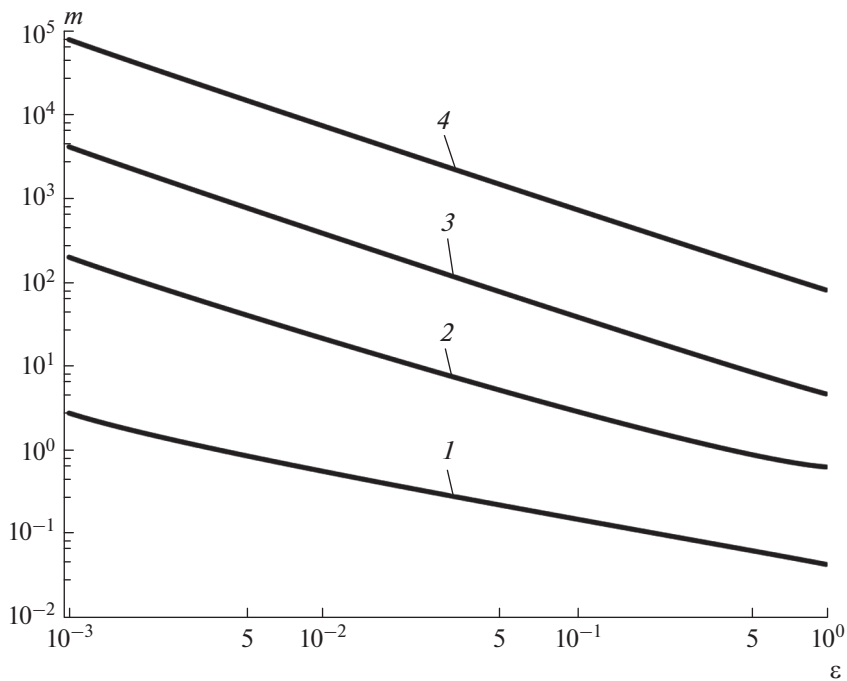


Рис. 5. Зависимость модуля роста от отношения плотностей фаз: 1 –  $S = 10^{-3}$ ; 2 –  $S = 10^{-1}$ ; 3 –  $S = 8 \times 10^{-1}$ ; 4 –  $S = 10^0$ .

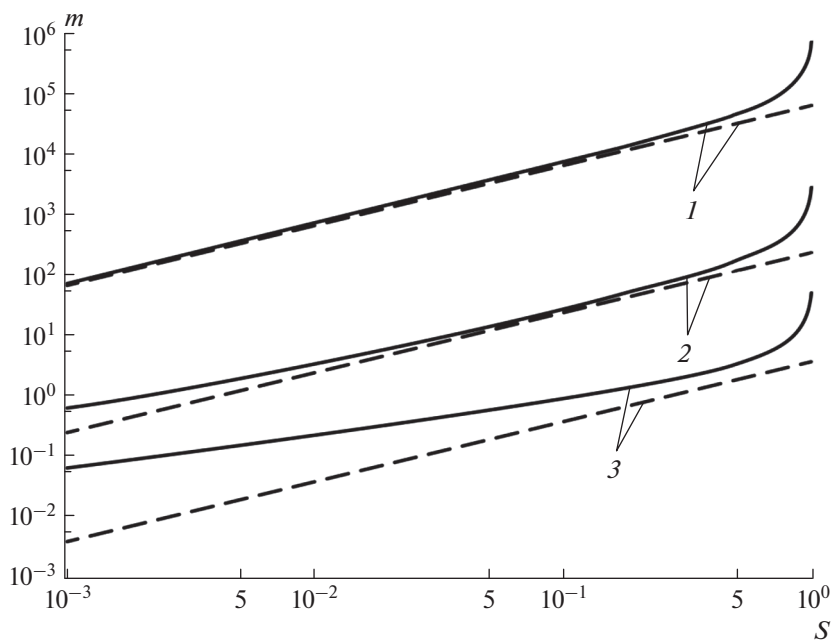


Рис. 6. Зависимость модуля роста от числа Стефана: 1 –  $S = 3 \times 10^{-5}$ ; 2 –  $S = 8 \times 10^{-3}$ ; 3 –  $S = 5 \times 10^{-1}$ ; — — расчет по формуле (25); - - - - расчет по формуле (15).

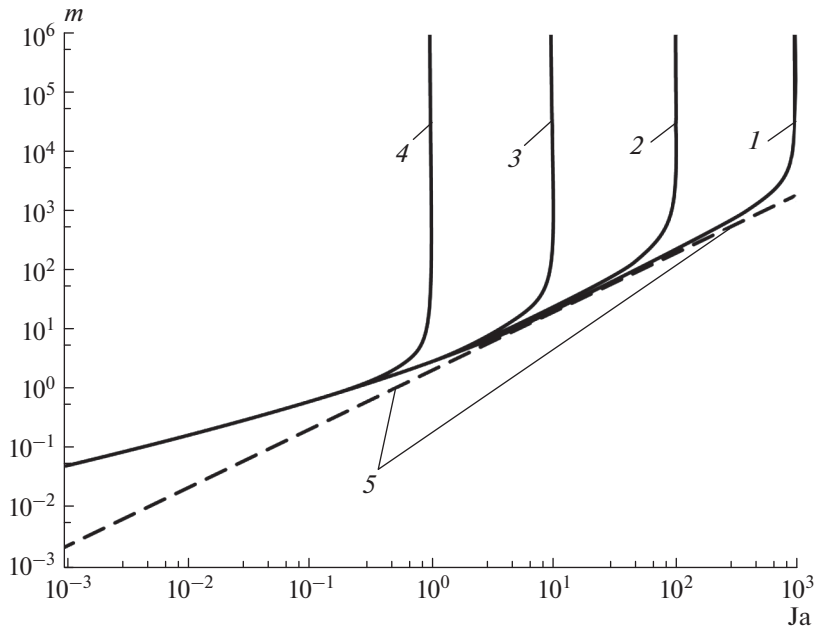


Рис. 7. Зависимость модуля роста от числа Якоба: 1 –  $S = 10^{-3}$ ; 2 –  $S = 10^{-2}$ ; 3 –  $S = 10^{-1}$ ; — — расчет по формуле (24); - - - - расчет по формуле (15).

правило, определяется сразу несколькими параметрами. Это могут быть как постоянные внешние воздействия, так и факторы, включающиеся на различных стадиях роста пузырька. Поэтому следующим естественным этапом анализа является рассмотрение “бинарных схем роста” [19] (рост пузырька лимитируется двумя факторами).

**Бинарная динамическая схема.** ЗРП при одновременном воздействии обоих динамических эффектов – сил вязкости и инерции – описывается уравнением Рэлея–Плессета (Rayleigh–Plesset) [4]

$$\frac{\Delta p}{\rho_f} = 4 \frac{v_f \dot{R}}{R} + \frac{3}{2} \dot{R}^2. \tag{28}$$

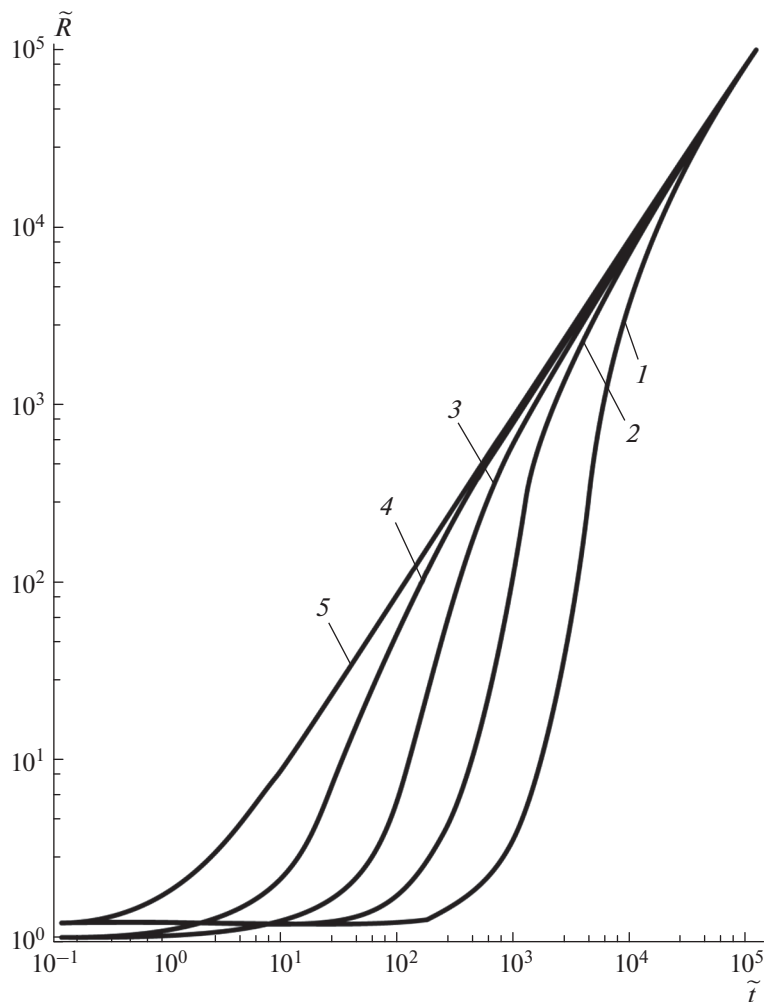
Уравнение (28) получается уравнения (3), если в его правой части заменить член  $R\ddot{R}$  на член  $4 \frac{v_f \dot{R}}{R}$ . При  $\Delta p = \text{const}$  уравнение (28) имеет аналитическое решение, которое записывается в неявном виде

$$\tilde{t} = \frac{1}{\text{Re}} 2 \ln [(F_1 - 4)(F_2 - 4)] - 12 \ln \text{Re} + \frac{1}{2} ((F_1 - F_2)). \tag{29}$$

Здесь  $F_1 = \sqrt{16 + 6(\text{Re} \tilde{R})^2}$ ;  $F_2 = \sqrt{16 + 6\text{Re}^2}$ ;  $\tilde{R} = \frac{R}{R_0}$  – безразмерный радиус пузырька;

$\tilde{t} = \frac{R_0 u_\infty}{v_f}$  – безразмерное время;  $R_0$  – начальный радиус пузырька;  $u_\infty = \sqrt{\frac{2 \Delta p}{3 \rho_f}}$  – рэле-

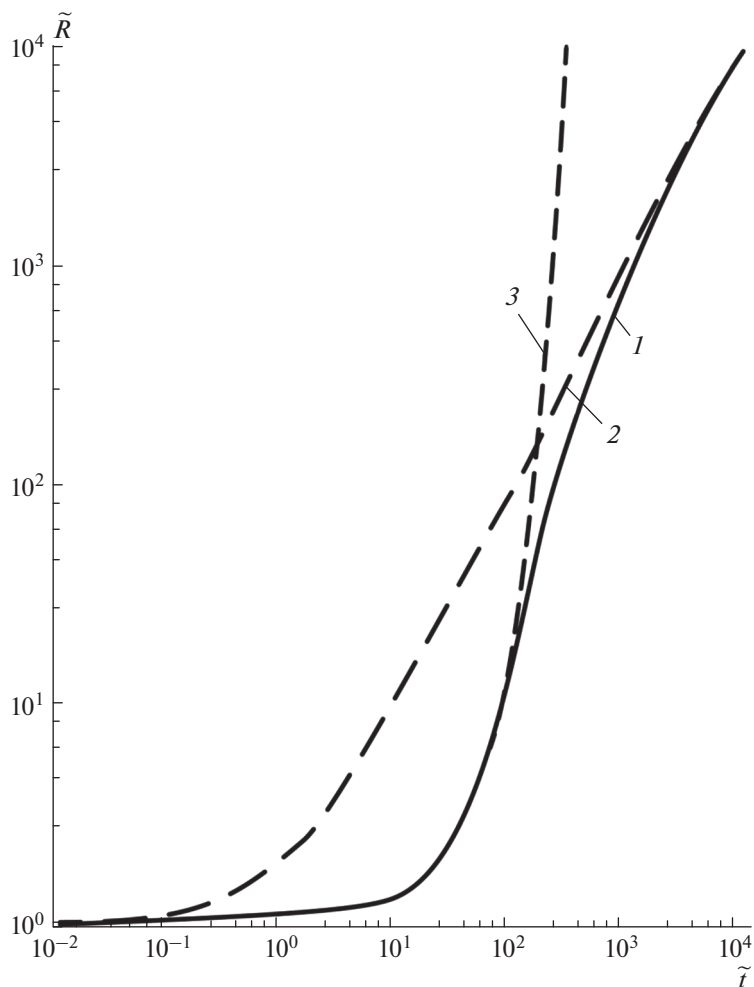
евская скорость, следующая из формулы (4);  $\text{Re} = \frac{R_0 u_\infty}{v_f}$  – число Рейнольдса.



**Рис. 8.** Бинарная динамическая схема роста парового пузырька. Расчет по формуле (29): 1 –  $Re = 5 \times 10^{-3}$ ; 2 –  $Re = 2 \times 10^{-2}$ ; 3 –  $Re = 7 \times 10^{-2}$ ; 4 –  $Re = 3 \times 10^{-1}$ ; 5 –  $Re = 10^1$ .

На рис. 8 представлены результаты расчета ЗРП по уравнению (29). В начальный период роста, когда радиус пузырька мал, реализуется динамическая вязкая схема. С течением времени все более доминирует динамическая инерционная схема. При увеличении  $Re$  начальная “вязкая кривая” (2) располагается все ближе к асимптотической “инерционной кривой” (4). Здесь проявляется стабилизирующая обратная связь: чем больше начальный размер пузырька и внешний перепад давлений и чем меньше вязкость жидкости, тем раньше включается механизм демпфирования экспоненциального роста за счет инерционной реакции жидкости.

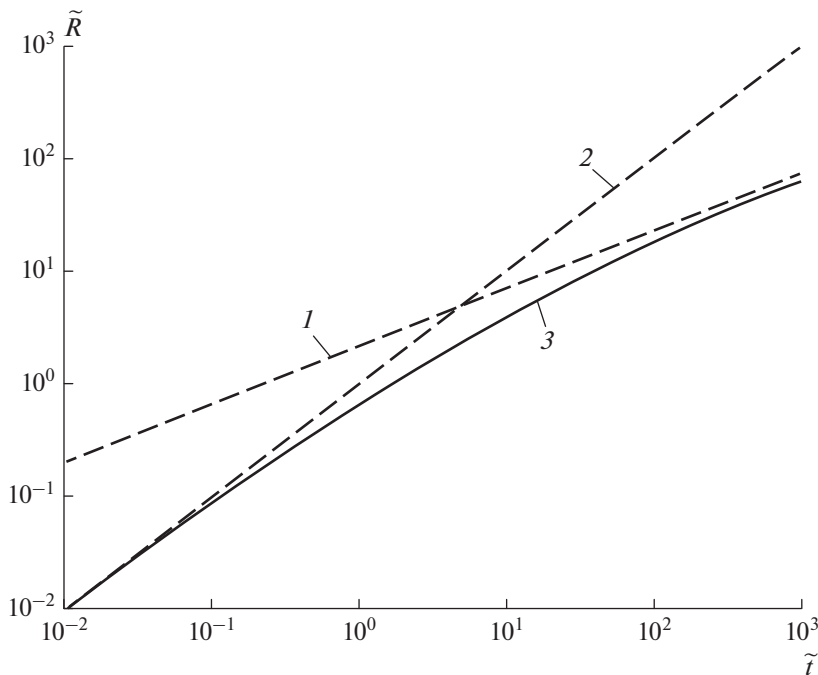
Аналитическое решение (29) позволяет прояснить характер перехода начальной вязкой стадии роста парового пузырька в асимптотическую инерционную. Приравни-



**Рис. 9.** Сопряжение вязкой и инерционной стадий роста парового пузырька при  $Re = 10^{-1}$ : 1 – бинарная схема, расчет по формуле (29); 2 – вязкая стадия, расчет по формуле (2); 3 – инерционная стадия, расчет по формуле (4).

вая правые части уравнений (2) и (4), определяем условную точку сопряжения “вязкой” и “инерционной” кривых. Так, при  $Re = 10^{-1}$  координаты точки сопряжения составляют:  $\tilde{R} \approx 168$ ,  $\tilde{t} \approx 205$  (рис. 9).

Сопоставление асимптотических кривых (пунктирные линии) с расчетной кривой (сплошная линия) показывает существование протяженного переходного участка, занимающего по оси  $\tilde{t}$  около одного порядка. При уменьшении числа Рейнольдса точка сопряжения смещается вправо (влияние вязкости нарастает), а при его увеличении – влево (влияние вязкости убывает). В области  $Re \geq 3.265$  вязкая стадия практически не проявляется, и ЗРП с самого начала носит рэлеевский характер.



**Рис. 10.** Бинарная энергетическая схема роста парового пузырька ( $\beta = 1$ ): 1 – тепловая асимптотика; 2 – неравновесная асимптотика; 3 – расчет по соотношению (30).

**Бинарная энергетическая схема.** Рассмотрим теперь ЗРП при воздействии двух энергетических эффектов – нестационарной теплопроводности (6) и неравновесности (5). Входящий в формулу (5) коэффициент испарения-конденсации  $\beta$  зависит от состояния поверхности и физической природы конденсированной фазы и может изменяться в диапазоне  $0 \leq \beta \leq 1$  [20].

Согласно концепции Лабунцова [9] тепловой поток на МФП будет определяться суперпозицией двух термических сопротивлений

$$q = (\mathbb{R}_k + \mathbb{R}_t) \Delta T.$$

Кинетическое термическое сопротивление определяется соотношением

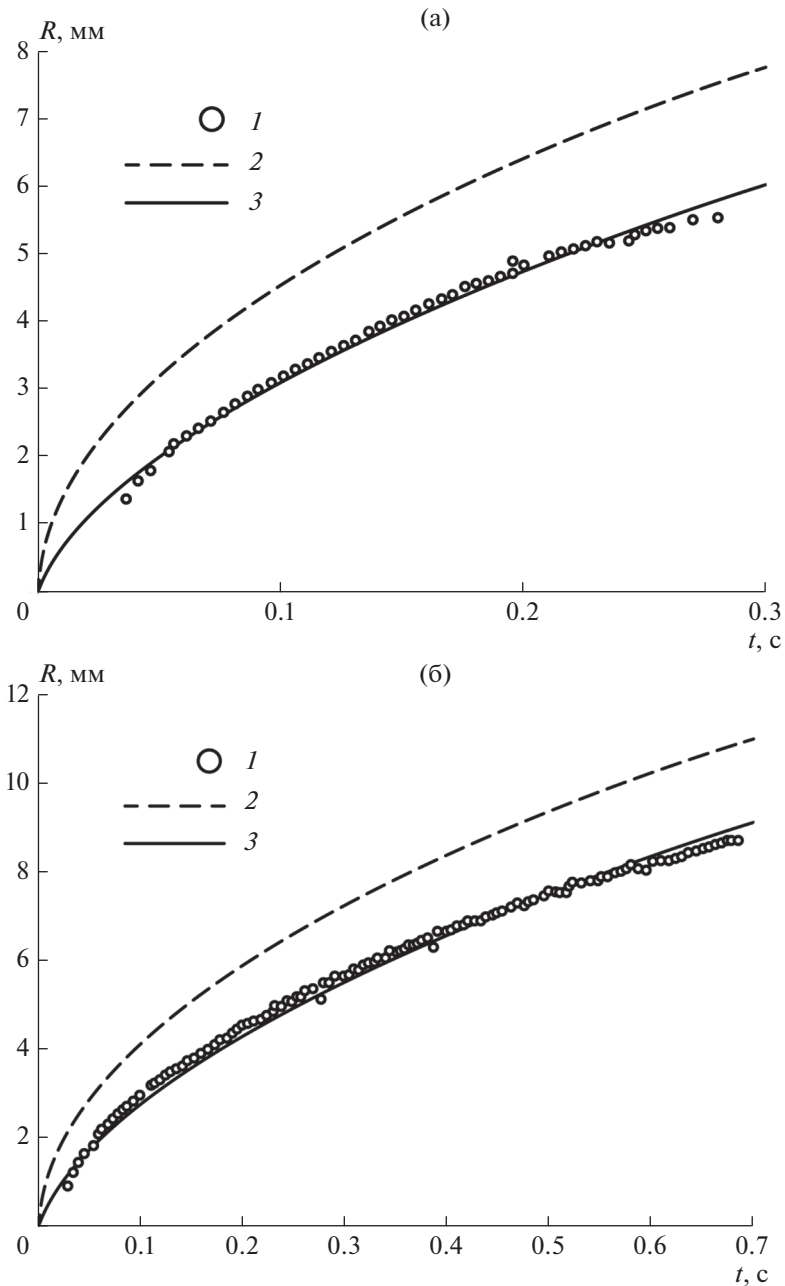
$$\mathbb{R}_k = \frac{\beta}{1 - 0.4\beta} \frac{T_\infty \sqrt{2\pi R_g T_\infty}}{\rho \nu L^2}.$$

Тепловое термическое сопротивление  $\mathbb{R}_t$  лимитируется нестационарной составляющей теплового потока на МФП, определяемой формулой Плессета–Цвика (15)

$$\mathbb{R}_t = \sqrt{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{a_f t}}{\lambda_f}.$$

Отсюда следует выражение для ЗРП в рамках бинарной энергетической схемы

$$\tilde{R} = 2(\sqrt{\tilde{t}} - \ln(1 + \sqrt{\tilde{t}})). \quad (30)$$



**Рис. 11.** Влияние молекулярно-кинетических эффектов на рост парового пузыря: 1 – экспериментальные данные [7, 8]; 2 – расчет по формуле Плессета–Цвика; 3 – расчет по бинарной энергетической схеме; а) – хладон 113,  $Ja = 30.8$ ,  $\beta = 4.27 \times 10^{-3}$ ; б) – хладон 113,  $Ja = 30.1$ ,  $\beta = 4.29 \times 10^{-3}$ .



Здесь  $\tilde{R} = R/R_0$  – безразмерный радиус пузырька;  $\tilde{t} = t/t_0$  – безразмерное время. Масштабы длины  $R_0$  и времени  $t_0$  определяются соотношениями

$$R_0 = \sqrt{\frac{18}{\pi}} \frac{\beta}{1 - 0.4\beta} \frac{\lambda_f c_{pf} \rho_f \Delta T T_\infty \sqrt{R_g T_\infty}}{\rho_v^2 h_{fv}^3}, \quad t_0 = 6 \left( \frac{\beta}{1 - 0.4\beta} \right)^2 \frac{\lambda_f c_{pf} \rho_f R_g T_\infty^3}{\rho_v^2 h_{fv}^4}.$$

Как видно из рис. 10, решение (30) при  $\tilde{t} \ll 1$  переходит в “*неравновесную асимптотику*”  $\tilde{R} = \tilde{t}$ , а при  $\tilde{t} \gg 1$  – в “*тепловую асимптотику*”  $\tilde{R} = 2\sqrt{\tilde{t}}$ .

Авторы [7, 8] провели экспериментальное исследование влияния молекулярно-кинетических эффектов на рост пузырька в условиях микрогравитации. В работах [7, 8] приведены результаты опытов по кипению хладонов (R11, R113) на падающей платформе, проведенных на лабораторной вышке высотой 110 м. Важной отличительной чертой экспериментов [7, 8] являлось моделирование сферически-симметричного роста пузырька на одиночном центре парообразования.

Обработка экспериментальных данных [7, 8] выявила значительный диапазон изменения расчетного коэффициента испарения–конденсации:  $10^{-2} \leq \beta \leq 0.7$  – для хладона 11;  $8.1 \times 10^{-3} \leq \beta \leq 1.0$  – для хладона 113. Автор [8] объясняет столь сильный разброс возможным неконтролируемым влиянием примеси масел. Результатом этого влияния могло стать «экранирование» части поверхности раздела примесями и, как следствие, заметное уменьшение  $\dot{R}$  по сравнению с предсказаниями ЭТС. Это, в свою очередь, соответствует сильному снижению  $\beta$ , получаемого обратным расчетом по соотношению (30). Отметим, что экспериментальная реализация в [7, 8] энергетической молекулярно-кинетической схемы роста является уникальной и, по-видимому, не имеет аналогов.

На рис. 11 приведены две опытные кривые для области применимости модели теплового пограничного слоя ( $Ja \gg 1$ ). Как видно из рисунка, оба экспериментальных режима соответствуют значению коэффициента испарения–конденсации  $\beta \approx 4.3 \times 10^{-3}$ .

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрена задача сферически-симметричного роста парового пузырька в неограниченном объеме равномерно перегретой жидкости. Изложена предложенная Лабунцовым концепция предельных схем роста, каждая из которых определяется воздействием одного физического фактора. Основное внимание уделено анализу энергетической тепловой схемы, лимитируемой подводом тепла от перегретой жидкости к межфазной границе механизмом теплопроводности. Рассмотрено теоретическое решения Скрайвена и проведен анализ его асимптотик, каждая из которых имеет сложный характер и содержит внутренние асимптотики. Предложена аналитическая аппроксимация интеграла Скрайвена, имеющая высокую точность для всех областей изменения определяющих параметров. Представлены две эквивалентные формы приближенного решения и указаны области их применимости в зависимости от значений чисел Якоба и Стефана. Получены аналитические решения для “бинарных схем роста”, в рамках которых учитывается воздействие на рост пузырька двух физических факторов. Динамическая схема описывает закон роста пузырька под действием сил инерции и вязкости. В рамках энергетической схемы пузырек растет под воздействием тепловых и молекулярно-кинетических эффектов. Найдены значения определяющих параметров бинарных схем, разделяющие предельные ветви решений.

**Сокращения:**

|     |                               |
|-----|-------------------------------|
| ЗРП | Закон роста пузырька          |
| ИС  | Интеграл Скрайвена            |
| МР  | Модуль роста                  |
| МФП | Межфазная поверхность         |
| ПСР | Пределная схема роста         |
| ЭТС | Энергетическая тепловая схема |

**Обозначения:**  $a$  – температуропроводность;  $c_p$  – изобарная теплоемкость;  $Ja$  – число Якоба;  $j$  – массовый поток;  $h_{fv}$  – теплота фазового перехода;  $m$  – модуль роста;  $m_*$  – модифицированный модуль роста;  $p$  – давление;  $\Delta p$  – перепад давлений;  $R$  – радиус пузырька;  $r$  – радиальная координата;  $S$  – число Стефана;  $T$  – температура;  $\Delta T$  – перепад температур;  $t$  – время;  $u$  – скорость;  $q$  – тепловой поток.

**Греческие символы:**  $\beta$  – коэффициент испарения-конденсации;  $\varepsilon$  – отношение плотностей фаз;  $\Delta p$  – перепад давлений;  $\rho$  – плотность;  $\Delta T$  – перепад температур;  $\lambda$  – теплопроводность;  $\mu$  – динамическая вязкость;  $\nu$  – кинематическая вязкость;  $\psi$  – фактор интенсификации.

**Нижние индексы:**  $f$  – жидкость;  $v$  – пар;  $\infty$  – на бесконечности.

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Prosperetti A. Bubbles. Phys. Fluids. 2004. Vol. 16. Paper 1852.
2. Lohse D. Bubble Puzzles. Nonlinear Phenomena in Complex Systems. 2006. V. 9. № 2. P. 125–132.
3. Besant W.H. Hydrostatics and hydrodynamics. London: Cambridge University Press Art. 1859. Art. 158.
4. Brennen C.E. Cavitation and Bubble Dynamics. Oxford: Oxford University Press. 1995. 282 p.
5. Prosperetti A., Plesset M.S. Vapor-bubble growth in a superheated liquid. Journal of Fluid Mechanics. 1978. V. 85. № 2. P. 349–368.
6. Stojanovic A.D., Belosevic S.V., Crnomarkovic N.D., Tomanovic I.D., Milicevic A.R. Nucleate pool boiling heat transfer: Review of models and bubble dynamics parameters. Thermal Science. 2022. V. 26. № 1. P. 157–174.
7. Straub J. Boiling heat transfer and bubble dynamics in microgravity. Advances in Heat Transfer. 2001. V. 35. P. 57–172.
8. Picker G. Nicht-Gleichgewichts-Effekte beim Wachsen und Kondensieren von Dampfblasen. Dissertation. Technische Universität München. München: 1998.
9. Лабуцков Д.А. Современные представления о механизме пузырькового кипения жидкостей. В кн.: Теплообмен и физическая газодинамика: М.: Изд-во АН СССР. С. 98–115. 1974.
10. Муратова Т.М., Лабуцков Д.А. Кинетический анализ процессов испарения и конденсации. Теплофизика высоких температур. 1969. Т. № 5. С. 959–996.
11. Scriven L.E. On the dynamics of phase growth. Chem. Eng. Sci. 1959. V. 10. № 1/2. P. 1–14.
12. Авдеев А.А., Зудин Ю.Б. Тепловая энергетическая схема роста парового пузырька. Теплофизика высоких температур. 2002. Т. 40. № 2. С. 292–299.
13. Plesset M.S., Zwick S.A. The growth of vapor bubbles in superheated liquids. J. Appl. Phys. 1954. V. 25. P. 493–500.
14. Birkhoff G., Margulis R., Horning W. Spherical bubble growth. Phys. Fluids. 1958. V. 1. P. 201–204.
15. Карташов Э.М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. Учебное пособие. 1985. 480 с.
16. Карташов Э.М. Теплопроводность при переменном относительном коэффициенте теплообмена. Известия РАН. Энергетика. 2015. № 2. С. 138–149.
17. Winter J. Kinetik des Blasenwachstums. Dissertation. Technische Universität München. München: 1997.
18. Shepherd J.E., Sturtevant B. Rapid evaporation at the superheat limit. J. Fluid Mech. 1982. V. 121. P. 379–402.
19. Зудин Ю.Б. Бинарные схемы роста парового пузыря. Инженерно-физический журнал. 2015. Т. 88. № 3. С. 559–569.
20. Зудин Ю.Б., Уртенев Д.С., Устинов В.С. Неравновесные эффекты на межфазной границе. М.: Изд-во “Перо”. 2021.

**Limiting and Binary Schemes of Vapor Bubble Growth  
in an Infinite Volume of Liquid**

**Yu. B. Zudin<sup>a, \*</sup> and D. S. Urtenov<sup>a</sup>**

*<sup>a</sup>National Research Centre “Kurchatov Institute”, Moscow, Russia*

*\*e-mail: yzudin@gmail.com*

The problem of spherically symmetric growth of a vapor bubble in an infinite volume of a uniformly superheated liquid is considered. The concept of limiting growth schemes, each of which is determined by the influence of a single physical factor, is put forward. An analytical approximation of the Scriven integral is proposed, its asymptotics are analyzed. Analytical solutions for binary growth schemes with due account of the influence of two physical factors on bubble growth are obtained.

*Keywords:* vapor bubble, limiting growth schemes, physical factor, asymptotics, binary growth schemes