

УДК 51-73:535.012.21

МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ОПТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В РДС-КРИСТАЛЛЕ

© 2019 г. А. В. Белинский¹, *, Р. Сингх¹, **

¹Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, физический факультет, Москва, Россия

*E-mail: belinsky@inbox.ru

**E-mail: ranjit.singh@mail.ru

Рассмотрены три невырожденных процесса – параметрический и одновременная генерация суммарных частот в кристаллах с регулярной доменной структурой (РДС). С помощью численного метода изучены поведение среднего числа фотонов взаимодействующих мод и их взаимные корреляции 3, 4 и 5-го порядков. Обнаружен новый эффект инверсии взаимной корреляции мод генерируемого излучения при превышении определенной длины взаимодействия.

DOI: 10.1134/S0367676519010046

ВВЕДЕНИЕ

РДС-кристаллы с квадратичной нелинейностью или, как их иногда называют, фотонные кристаллы вызывают пристальный интерес исследователей в связи с тем, что изучение квантовых статистических характеристик формируемого в них излучения важно не только в чисто теоретических, но и в прикладных задачах квантовой информатики (см., например, [1–3]). В частности, корреляционные характеристики генерируемых световых пучков используются для формирования и компьютерной обработки фантомных изображений [2, 3]. При решении подобных задач обычно применяют приближение заданного поля для линеаризации нелинейных классических и операторных уравнений [1–3]. Такой метод дает возможность получить решения в аналитической форме, что в свою очередь, позволяет проводить анализ взаимодействующих мод в тонких РДС-кристаллах при слабом энергообмене. Однако при усилении энергообмена и заметном истощении накачки точность метода теряется. Лучшее приближение дает теория возмущений [4, 5], что, однако, достигается усложнением расчета за счет увеличения числа слагаемых высших порядков. Более точное квантовое решение можно получить численным алгоритмом диагонализации гамильтониана взаимодействия и нахождения собственных векторов и собственных значений квантовых состояний [6, 7]. Следует также отметить, что существует еще один метод решения задач квантовой нелинейной оптики, который основан на полиномиальной алгебре [8]. Впервые в работе [7] была решена задача квантового описания взаи-

модействия плоских монохроматических мод в РДС-кристалле с помощью метода диагонализации при полном учете квантовомеханического взаимодействия всех 5 плоских монохроматических мод и истощения накачки. В [7] изучено поведение среднего числа фотонов взаимодействующих мод и их взаимных корреляций 2-го порядка.

В настоящей работе исследованы корреляций 3, 4 и 5-го порядков. Полученные результаты отличаются от приближенного метода заданного поля [1] в случае сильного энергообмена, когда происходит заметное истощение накачки. Показана динамика эволюции среднего числа фотонов в модах и их взаимная корреляция, что особенно важно для компьютерной обработки информации в условиях зашумления, поскольку известные корреляционные зависимости позволяют эффективно выделять полезные сигналы на фоне шума, например, при работе с квантовыми фантомными изображениями, их мультиплицирования и компьютерной обработки с целью повышения соотношения сигнал/шум [2, 3].

НЕВЫРОЖДЕННЫЕ ПРОЦЕССЫ И УСЛОВИЯ ИХ КВАЗИСИНХРОНИЗМА

Пусть 5 плоских монохроматических мод обычных поляризаций, характеризуемых операторами уничтожения фотона $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{a}_3, \hat{a}_4,$ и \hat{a}_5 на оптических частотах $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ и ω_5 , коллинеарно распространяются внутри РДС-кристалла с квадратичной нелинейностью. Происхо-

дят 3 процесса: параметрическая генерация субгармоник и преобразование частоты вверх:

$$\begin{aligned} \omega_3 &= \omega_1 + \omega_2, \\ \delta k_3 &= k_3 - k_1 - k_2 + m_3 G_3 = \Delta k_3 + m_3 G_3, \end{aligned} \quad (1a)$$

$$\begin{aligned} \omega_1 + \omega_3 &= \omega_4, \\ \delta k_4 &= k_4 - k_1 - k_3 + m_4 G_4 = \Delta k_4 + m_4 G_4, \end{aligned} \quad (1b)$$

$$\begin{aligned} \omega_2 + \omega_4 &= \omega_5, \\ \delta k_5 &= k_5 - k_2 - k_3 + m_5 G_5 = \Delta k_5 + m_5 G_5. \end{aligned} \quad (1b)$$

Здесь k_j – абсолютные значения волновых векторов соответствующих мод с частотами ω_j ; $j = 1, 2, 3, 4, 5$; Δk_q – волновые расстройки соответствующего процесса для однородного кристалла; $q = 3, 4, 5$; $m_q = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots$ – порядки квазисинхронизма; $G_q = 2\pi/\Lambda q$ – волновое число (модуль “псевдовектора” решетки доменной структуры с периодом Λq). Условие выполнения квазисинхронизма процессов (1a–1b) были найдены в работе [7] для кристалла LiNbO₃.

Гамильтониан взаимодействия рассматриваемых процессов представляется в следующем виде [1]:

$$\hat{H}_I = h(\beta \hat{a}_1 \hat{a}_2 \hat{a}_3^+ + \gamma_1 \hat{a}_1 \hat{a}_3 \hat{a}_4^+ + \gamma_2 \hat{a}_2 \hat{a}_3 \hat{a}_5^+) + H.c., \quad (2)$$

где h – постоянная Планка, β и $\gamma_{1,2}$ – коэффициенты нелинейного взаимодействия, $H.c.$ – эрмитово сопряжение.

Операторные уравнения движения по длине взаимодействия z внутри РДС-кристалла в представлении Гейзенберга описываются уравнением

$$\frac{d\hat{a}_j}{dz} = -\frac{i}{h} [\hat{a}_j, \hat{H}_I]. \quad (3)$$

Квантовую задачу с помощью метода диагонализации можно решить следующим образом. Запишем матричные элементы оператора уничтожения в энергетическом представлении:

$$\hat{a}_{j,n',n} = \langle n' | \hat{a}_j | n \rangle = \delta_{n',n-1} \sqrt{n}. \quad (4)$$

Аналогичным образом выражаются матричные элементы оператора рождения \hat{a}_j^+ . Введем безразмерные нелинейные коэффициенты связи $\xi_{1,2} = \frac{\gamma_{1,2}}{\beta}$. Тогда гамильтониан взаимодействия (2) принимает следующий вид:

$$\hat{H}'_I = h(\hat{a}_1 \hat{a}_2 \hat{a}_3^+ + \xi_1 \hat{a}_1 \hat{a}_3 \hat{a}_4^+ + \xi_2 \hat{a}_2 \hat{a}_3 \hat{a}_5^+) + H.c., \quad (2.a)$$

где

$$\begin{aligned} \hat{a}'_1 &= (\hat{a}_{1,n_1,n_1}) \otimes \hat{E}_2 \otimes \hat{E}_3 \otimes \hat{E}_4 \otimes \hat{E}_5, \\ \hat{a}'_2 &= \hat{E}_1 \otimes (\hat{a}_{2,n_2,n_2}) \otimes \hat{E}_3 \otimes \hat{E}_4 \otimes \hat{E}_5, \\ \hat{a}'_3 &= \hat{E}_1 \otimes \hat{E}_2 \otimes (\hat{a}_{3,n_3,n_3}) \otimes \hat{E}_4 \otimes \hat{E}_5, \\ \hat{a}'_4 &= \hat{E}_1 \otimes \hat{E}_2 \otimes \hat{E}_3 \otimes (\hat{a}_{4,n_4,n_4}) \otimes \hat{E}_5, \\ \hat{a}'_5 &= \hat{E}_1 \otimes \hat{E}_2 \otimes \hat{E}_3 \otimes \hat{E}_4 \otimes (\hat{a}_{5,n_5,n_5}), \end{aligned}$$

\hat{E}_j – единичные матрицы соответствующих мод, матрица $(\hat{a}_{j,n',n})$ состоит из матричных элементов $\hat{a}_{j,n',n}$, \otimes обозначает тензорное произведение и $j = 1, 5$.

Диагонализируем гамильтониан взаимодействия (2.a) и найдем его собственные векторы и собственные значения. Оператор эволюции в матричном представлении вычисляется как

$$\hat{U}(\zeta) = \sum_{m=0}^M e^{-i\lambda_m \zeta} |m\rangle \langle m|, \quad (5)$$

где $\zeta = \beta z$ – приведенная длина взаимодействия; $M = (n_1 + 1)(n_2 + 1)(n_3 + 1)(n_4 + 1)(n_5 + 1)$; n_j – числа фотонов в модах; $|m\rangle$ – собственный вектор с числом фотонов m при собственном значении λ_m гамильтониана взаимодействия (2.a)

$$\hat{H}'_I |m\rangle = \lambda_m |m\rangle.$$

Матрица плотности вычисляется как

$$\hat{\rho}(\zeta) = \hat{U}(\zeta) \hat{\rho}(0) \hat{U}^\dagger(\zeta). \quad (6)$$

Здесь $\hat{\rho}(0) = |\psi_0\rangle \langle \psi_0|$ – матрица плотности начального состояния для всех пяти мод на входе РДС-кристалла. В тензорном представлении эта матрица плотности принимает следующий вид:

$$\hat{\rho}(0) = \hat{\rho}_1(0) \otimes \hat{\rho}_2(0) \otimes \hat{\rho}_3(0) \otimes \hat{\rho}_4(0) \otimes \hat{\rho}_5(0). \quad (7)$$

КВАНТОВЫЕ СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Вычислим средние значения чисел фотонов и коэффициентов корреляции 3, 4 и 5-го порядков или фактора $g^{(3,4,5)}$ в модах по формулам:

$$N_j(\zeta) = \langle \hat{a}_j^{\dagger+}(\zeta) \hat{a}_j(\zeta) \rangle, \quad (8)$$

$$\begin{pmatrix} g_{jkl}^{(3)}(\zeta) \\ g_{jklm}^{(4)}(\zeta) \\ g_{12345}^{(5)}(\zeta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\langle \hat{a}_j^+(\zeta) \hat{a}_j'(\zeta) \hat{a}_k^+(\zeta) \hat{a}_k'(\zeta) \hat{a}_l^+(\zeta) \hat{a}_l'(\zeta) \rangle}{N_j(\zeta) N_k(\zeta) N_l(\zeta)} \\ \frac{\langle \hat{a}_j^+(\zeta) \hat{a}_j'(\zeta) \hat{a}_k^+(\zeta) \hat{a}_k'(\zeta) \hat{a}_l^+(\zeta) \hat{a}_l'(\zeta) \hat{a}_m^+(\zeta) \hat{a}_m'(\zeta) \rangle}{N_j(\zeta) N_k(\zeta) N_l(\zeta) N_m(\zeta)} \\ \frac{\langle \hat{a}_1^+(\zeta) \hat{a}_1'(\zeta) \hat{a}_2^+(\zeta) \hat{a}_2'(\zeta) \hat{a}_3^+(\zeta) \hat{a}_3'(\zeta) \hat{a}_4^+(\zeta) \hat{a}_4'(\zeta) \hat{a}_5^+(\zeta) \hat{a}_5'(\zeta) \rangle}{N_1(\zeta) N_2(\zeta) N_3(\zeta) N_4(\zeta) N_5(\zeta)} \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Здесь нижние индексы при $g^{(3,4,5)}$ обозначают номера мод, между которыми вычисляется коэффициент корреляции, и $j, k, l, m = \overline{1, 5}$.

Нами проводились расчеты для случая $\xi_1 = 0.6$, $\xi_2 = 0.4$, когда моды находились в состоянии $|\Psi_0\rangle = |n_{10}\rangle |n_{20}\rangle |\alpha_{30}\rangle |n_{40}\rangle |n_{50}\rangle$ на входе $\zeta = 0$ РДС-кристалла, причем моды 1, 2, 4, 5 полагались в вакуумном состоянии $|0\rangle$, а накачка – в когерентном состоянии со средним числом фотонов $|\alpha_{30}|^2 = 3$ фазой $\phi_{30} = \pi/3$. Постоянная начальная фаза накачки влияет на результаты расчета, потому что ею определяются условия вхождения излучения в нелинейный кристалл. Правильность вычислений проверялась контролем коммутационных соотношений $[\hat{a}_j^+(\zeta), \hat{a}_j^+(\zeta)] = 1$.

ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

На рис. 1 кривые N_1, N_2, N_3, N_4, N_5 демонстрирует почти периодические осцилляции среднего числа фотонов. На начальном этапе взаимодействия идет невырожденный параметрический процесс распада фотона моды 3 на два фотона мод 1 и 2 $\omega_3 \rightarrow \omega_1 + \omega_2$ и затем генерации суммарной частоты с $\omega_1 + \omega_3 \rightarrow \omega_4, \omega_2 + \omega_3 \rightarrow \omega_5$.

В дальнейшем идет обратный процесс, причем они конкурируют между собой, что хорошо видно из осциллирующего характера кривых N_1, N_2, N_3, N_4, N_5 на больших длинах взаимодействия ζ . На

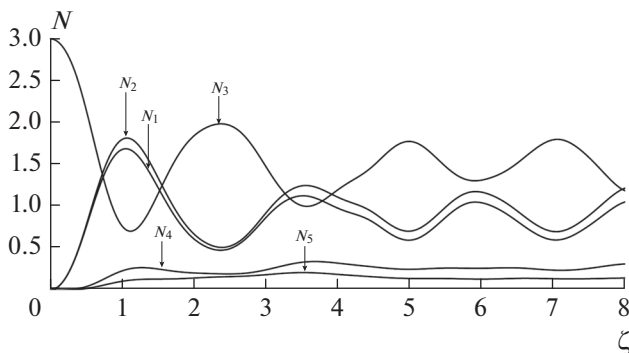


Рис. 1. Эволюция среднего числа фотонов в модах.

рис. 2 корреляционные кривые ведут себя почти как периодические функции. При значениях $g^{(3,4,5)} > 1$ преобладают более парные коррелированные в 3, 4 и 5 модах фотоны, а при $g^{(3,4,5)} < 1$ – одиночные некоррелированные, аналогично тому, как в одиночной моде $g^{(2)} > 1$ соответствует группировке и суперпуассоновской статистике фотонов, а $g^{(2)} < 1$ – антигруппировке и субпуассоновской статистике [9, 10].

На рис. 2а также видно, что сначала реализуется процесс (1а), затем (1б) и (1в). На больших длинах взаимодействия все 3 процесса начинают

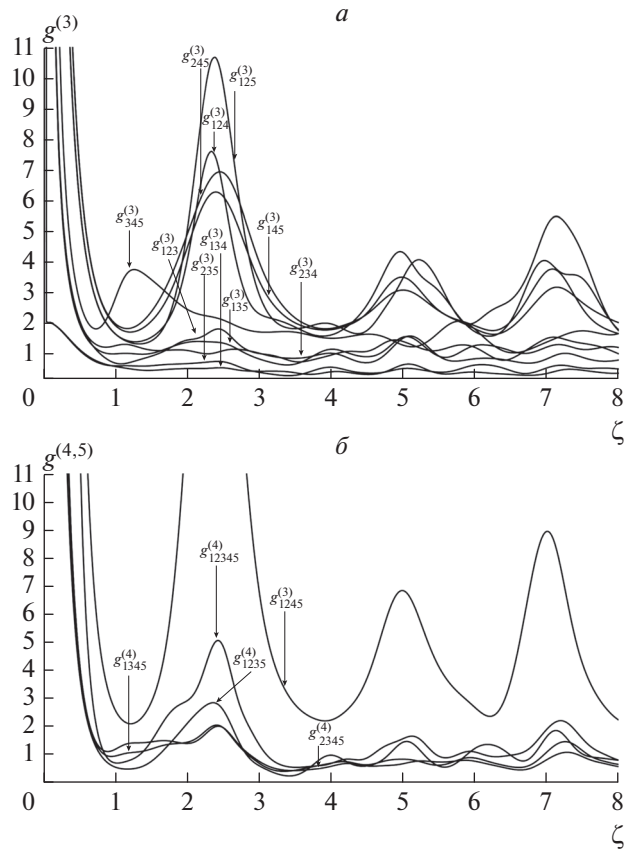


Рис. 2. а – коэффициенты корреляции или фактор $g_{jkl}^{(3)}$ 3-го порядка; б – коэффициенты корреляции или фактор $g_{jklm}^{(4)}, g_{12345}^{(5)}$ 4-го и 5-го порядков.

конкурировать между собой, что следует из почти периодического характера этих кривых. Аналогичную ситуацию описывают другие кривые. Коэффициенты корреляции между 3 модами 1, 2 и 5; 1, 2 и 4; 2, 4 и 5; 3, 4 и 5; 1, 4 и 5 больше, чем парные, рассчитанные в [7]. Такие моды могут стать хорошими кандидатами для восстановления изображений методами компьютерной обработки информации по алгоритмам, аналогичным предложенным в [2]. Другие 3 моды 1, 2 и 3; 1, 3 и 5; 2, 3 и 4 не так сильно коррелированы, но проявляется эффект инверсии взаимной корреляции мод. Коэффициенты корреляция между 4 модами 1, 2, 4 и 5 больше, чем между 3 модами, а между модами 1, 2, 3 и 5; 1, 3, 4 и 5; 2, 3, 4 и 5, 1, 4 и 5 наоборот. Корреляция между 5 модами 1, 2, 3, 4 и 5 слабее, чем между 4 модами (1, 2, 4, 5). В обоих случаях наблюдается эффект инверсии взаимной корреляции мод. Отметим, что инверсия взаимной корреляции (или, другими словами, антикорреляция) наблюдается при значениях $g_{Jkl}^{(3)}$, $g_{Jklm}^{(4)}$ и $g_{12345}^{(5)}$ меньше единицы. Для реализации коррелированного и антикоррелированного режимов нужно выбирать соответствующую длину взаимодействия. Этот новый существенный эффект впервые нами выявлен на основании точного квантового расчета взаимодействия всех 5 мод.

ВЫВОДЫ

Получены результаты строгого квантового описания нелинейного интенсивного энергообмена между плоскими монохроматическими мо-

дами в РДС-кристаллах с учетом истощения накачки. Изучено поведение среднего числа фотонов взаимодействующих мод и их взаимных корреляций 3, 4 и 5-го порядков. Получен почти осциллирующий характер коэффициентов корреляции мод. Обнаружен новый эффект инверсии взаимной корреляции мод генерируемого излучения при определенных длинах взаимодействия.

Работа поддержана грантом РФФИ № 18-01-00598.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Chirkin A.S., Saigin M. Yu., Shutov I.V.* // J. Russ. Laser Res. 2008. V. 29. № 4. P. 336.
2. *Балакин Д.А., Белинский А.В., Чиркин А.С.* // ЖЭТФ. 2017. Т. 152. № 2. С. 252.
3. *Balakin D.A., Belinsky A.V., Chirkin A.S.* // J. Russ. Laser Res. 2017. V. 38. № 2. P. 164.
4. *Beskrovnyi V.N., Chirkin A.S.* // In Quantum Comm. and Comp. Eds. Hirota O., Holevo A.S., Caves C.M.. New York: Plenum Press, 1997. 483 p.
5. *Люиселл У.* Излучение и шумы в квантовой электронике. М: Наука, 1972. 403 с.
6. *Nikitin S.P., Masalov A.V.* // Quantum Opt. 1991. V. 3. № 2. P. 105.
7. *Белинский А.В., Сингх Р.* // Квантовая электроника. 2018. Т. 48. № 7. С. 611.
8. *Карасев В.П.* // Теоретическая и математическая физика. 1993. Т. 95. № 1. С. 3.
9. *Смирнов Д.Ф., Трошин А.С.* // УФН. 1987. Т. 153. № 10. С. 233.
10. *Клышко Д.Н., Масалов А.В.* // УФН. 1995. Т. 165. № 11. С. 1249.