ИЗВЕСТИЯ РАН. СЕРИЯ ФИЗИЧЕСКАЯ, 2019, том 83, № 1, с. 58–61

УДК 621.385.6

К НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЭЛЕКТРОННЫХ ПОТОКОВ С ВЫСОКОЧАСТОТНЫМИ ПОЛЯМИ В СРЕДАХ С КОМПЛЕКСНОЙ ПРОВОДИМОСТЬЮ

© 2019 г. А. А. Фунтов*

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования "Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского", Саратов, Россия

**E-mail: aafuntov@mail.ru*

Изложена приближенная нелинейная теория взаимодействия электронного потока с высокочастотными полями в средах с комплексной проводимостью с использованием волнового метода Овчарова–Солнцева.

DOI: 10.1134/S0367676519010071

В настоящее время в СВЧ-электронике наблюдается интерес к использованию в электродинамических структурах приборов метаматериалов см., например, доклады [1, 2] на IVEC-2017. В теоретическом плане речь идет о взаимодействии электронных потоков с электромагнитными полями сред с комплексной проводимостью, которую в достаточно общем случае можно представить в виде (см., например, [3])

$$Y = \frac{\sigma}{\omega\varepsilon} + j\varepsilon', \tag{1}$$

где $j = \sqrt{-1}$, ω – рабочая частота, σ – действительная погонная проводимость, $\varepsilon' = \varepsilon/\varepsilon_0$, ε_0 – диэлектрическая проницаемость вакуума, ε – диэлектрическая проницаемость среды; формально индуктивную проводимость можно связать с моделью метаматериала при $\varepsilon < 0$.

Однако, несмотря на то, что метаматериалы можно описывать матаппаратом, развитым для диэлектриков как для сред с комплексной диэлектрической проводимостью, один из истоков такого подхода – теория резистивного усилителя – долгое время был незаслуженно забыт. На фоне вновь вспыхнувшего интереса к этому прибору [1, 4, 5] представляется важным создать нелинейную теорию резистивного усилителя. Следует отметить, что ранее предпринимались некоторые попытки создания такой теории, подобной теории двухрезонаторного клистрона, в работах [6, 7]. Ниже представлены результаты исследования процессов группирования в предварительно промодулированном некоторым входным сигналом электронном потоке, движущемся в среде с комплексной проводимостью, на основе волнового метода Овчарова–Солнцева [8, 9].

Предположим далее, что диэлектрическая проницаемость среды носит комплексный характер и равна $\varepsilon_0\varepsilon'(1 - j\sigma + B_L)$, где $\sigma + jB_L$ – нормированная на $\omega\varepsilon$ комплексная проводимость среды. Опуская выкладки, во многом повторяющие теорию Овчарова–Солнцева, получим:

$$\frac{\partial^2 B}{\partial \xi^2} = -\frac{2p^2\Omega^2 e^{jArg(B)} J_1(|B|)}{(1 + B_L)^2 + \sigma^2} \times \left[(1 + B_L + j\sigma) J_0(|B|) - (1 + B_L - j\sigma) J_2(|B|)\right], \tag{2}$$

где B – возмущение фазы электронов, которое в данной работе считаем комплексным, $p^2 = \left[1 + (2/(\beta_e b))^2\right]^{-1}$, b – поперечный размер пучка, $\beta_e = \omega/\upsilon_0$, υ_0 – средняя скорость потока, $J_n(X)$ – функция Бесселя n-го порядка, $\Omega = \omega_p/(\omega\sqrt{\varepsilon'})$, ω_p – плазменная частота, $\xi = \beta_e x$.

Будем искать решения (2) при следующих начальных условиях:

$$B(0) = 0, \quad \frac{dB}{d\xi}(0) = \chi, \tag{3}$$

где χ – коэффициент начальной модуляции. Безразмерный ток пучка с учетом решения уравнения (2) имеет вид:

$$F = I(x)/I_0 = 2J_1(|B|)\, e^{j\left(Arg(B) - \frac{\pi}{2} - \xi\right)}, \tag{4}$$

где I_0 – постоянная компонента тока пучка.

Если предположить, что возмущение фазы мало (т.е. использовать приближение слабого сигнала) и поток бесконечно широк ($p \to 1$), то, как нетрудно показать, уравнение (2) примет вид

$$\frac{\partial^2 B}{\partial \xi^2} = -\frac{\Omega^2 B}{1 + B_L - j\sigma}, \tag{5}$$

а выражение (4), записываемое для переменной компоненты тока, с учетом (3) можно представить в виде

$$F = \sqrt{1 + B_L - j\sigma}\,\frac{\chi}{\Omega}\times \\ \times e^{-j\xi}\left(e^{-j\xi\Omega/\sqrt{1+B_L-j\sigma}} - e^{j\xi\Omega/\sqrt{1+B_L-j\sigma}}\right). \tag{6}$$

Из уравнения (5) нетрудно получить известное дисперсионное уравнение линейной теории резистивного усилителя (см. например [4–6]) и оценить коэффициент усиления.

Заметим, что если изначально предполагать B чисто действительным и положить $\sigma = B_L = 0$, получим хорошо известные уравнения в волновом методе Овчарова–Солнцева (см. [8]):

$$\frac{\partial^2 B}{\partial \xi^2} = -2p^2\Omega^2 J_1(B)\left[J_0(B) - J_2(B)\right] \quad \text{и} \\ I(x) = 2I_0 J_1(B). \tag{7}$$

В данной работе фаза электрона предполагалась комплексной. Это привело к замене в аргументе бесселевых функций B на $|B|$ и появлению множителя $e^{j\mathrm{Arg}(B)}$ в (2). Также среда предполагалась обладающей комплексной проводимостью, что добавило множители к бесселевым функциям в (2).

По аналогии с [9] построим фазовый портрет на плоскости $(B, dB/d\xi)$ для электронов. Из рис. 1*а* и 1*б* видно, что фазовый портрет, полученный в данной работе, при $\sigma = B_L = 0$, ожидаемо совпадает с приведенным в [9]. Напомним, что если начальная модуляция по скорости χ не слишком велика, то фазовые траектории замкнуты. Это соответствует периодическим нелинейным волнам пространственного заряда. Если же модуляция достаточно велика, то фазовые траектории уходят в бесконечность; это означает, что силы пространственного заряда приводят к ускоренному распаду сгустков.

Любопытно отметить, что в случае индуктивной проводимости в фазовом портрете (см. рис. 1*в*) в начале координат седло, через которое проходит сепаратриса, и особая точка типа центр сместились от оси ординат поскольку при $\sigma = 0$ и $B_L < -1$ знак в правой части (2) изменится на противоположный, чем в случае $\sigma = B_L = 0$, следовательно вторая производная B поменяет знак. Таким образом, в случае индуктивной проводимости если

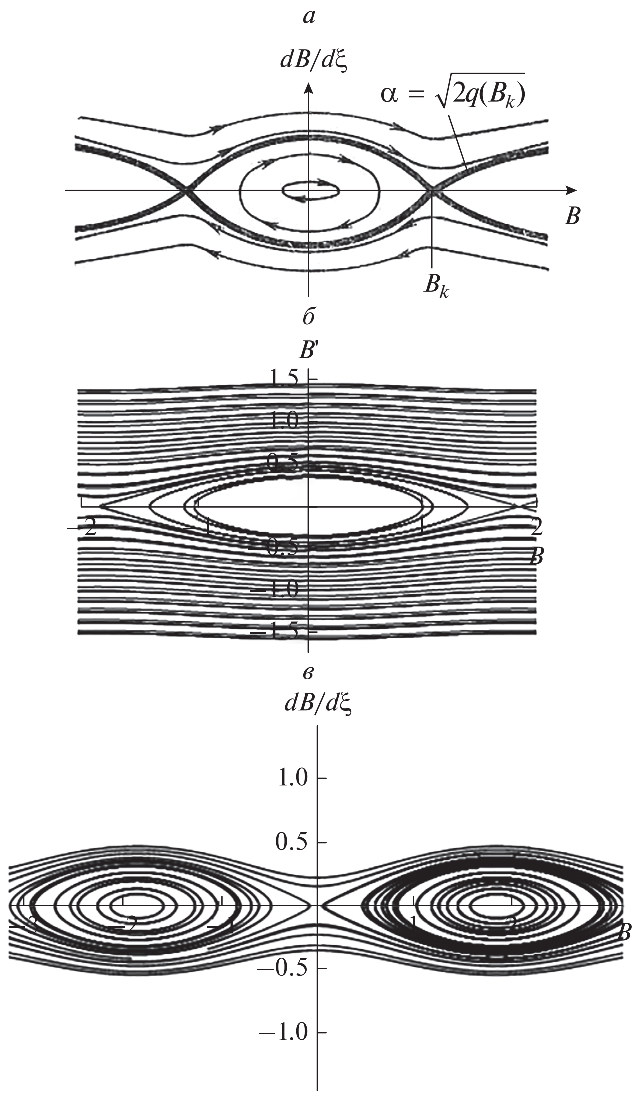

Рис. 1. Фазовые портреты из работы [9] (*а*) и из данной работы при $\sigma = B_L = 0$, $\Omega = 0.4$ (*б*) и при $\sigma = 0, B_L = -1.08$ (*в*); *б* и *в* построены при $\Omega = 0.1$, $p = 1$.

начальная модуляция по скорости не слишком велика, то силы пространственного заряда приводят к ускоренному распаду сгустков, а периодические нелинейные волны пространственного заряда имеют место если модуляция достаточно велика.

Отметим, что ранее автор [6] получил уравнение для первой гармоники тока методом заданного движения, т.е. упрощенным вариантом волнового метода. Также напомним, что можно записать

$$\omega_p\left[1 + B_L - j\sigma\right]^{-1/2} = \omega_p\left(p + jq\right). \tag{8}$$

Упрощения, использованные в [6], заключаются в том, что полагалось $p = 0$ при индуктивной проводимости и амплитуда первой гармони-

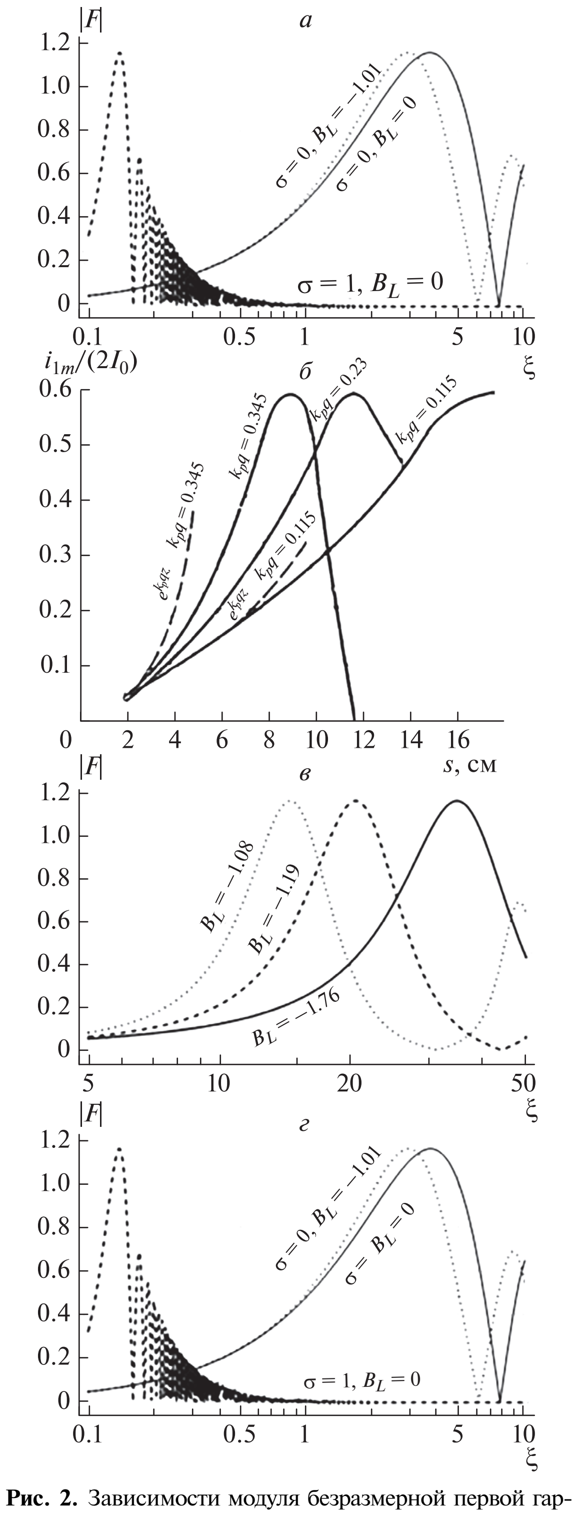

Рис. 2. Зависимости модуля безразмерной первой гармоники тока от нормированной координаты: *а* – при различных проводимостях (кривые построены при $\Omega = 0.05$, $p = 1$, $\chi = 0.5$); *б* – при индуктивной проводимости и различных k_pq (штрихами обозначены результаты линейной теории для одной нарастающей волны) [6]; *в* – при индуктивной проводимости и различных B_L (кривые построены при $\Omega = 0.1$, $p = 1$, $\sigma = 0$, $\chi = 0.01$); *г* – при активной проводимости и различных σ (кривые построены при $\Omega = 0.05$, $p = 1$, $B_L = 0$, $\chi = 0.5$).

ки скорости электронов – медленно меняющаяся функция начальной фазы электронов. Амплитуда первой гармоники тока в [6] ищется в виде

$$I_1 = i_{10}J_0(X) + 2I_0\cos\psi J_1(|B|), \tag{9}$$

где $X = \sqrt{\left(\frac{\upsilon_{10}\omega}{\upsilon_0\omega_p q}\operatorname{sh}k_pqs\right)^2 + \left(\frac{i_{10}}{I_0}(\operatorname{ch}k_pqs - 1)\right)^2}$ – параметр группировки, $\psi = \operatorname{arctg}\dfrac{\frac{i_{10}}{I_0}(\operatorname{ch}k_pqs - 1)}{\frac{\upsilon_{10}\omega}{\upsilon_0\omega_p q}\operatorname{sh}k_pqs}$ – его фаза, i_{10} и υ_{10} – переменные составляющие тока и скорости на входе в область индуктивного дрейфа (т.е. электроны летят сквозь среду с индуктивной проводимостью), k_p – плазменная постоянная распространения, s – длина области индуктивного дрейфа.

Исследуем теперь уравнение (4). Из рис. 2*а* видно, что если электроны движутся в среде с конечной проводимостью, то максимум первой гармоники тока наступает раньше, чем для обычного клистрона с пространством дрейфа, причем наименьшая координата максимума получается при активной проводимости. На рис. 2*б* из работы [6], где исследован случай только индуктивной проводимости, также видно, что положение максимума первой гармоники тока меняется с изменением проводимости, т.е. k_pq, но значение максимума не меняется. Из рис. 2*в*, построенного в данной работе, видно качественное совпадение с результатами [6]. Однако, как видно из рис. 2*а*, 2*в* и 2*г*, наименьшая координата максимума первой гармоники тока достигается при чисто действительной проводимости.

Рассмотрим влияние параметров на положение максимума при чисто активной проводимости. Из рис. 3*а*–3*в* видно, что с увеличением начальной модуляции скорости, параметра пространственного заряда и поперечного размера пучка максимум сдвигается влево.

Таким образом, из развитой теории следует, что можно уменьшить длину резистивной секции прибора, не уменьшая значения амплитуды первой гармоники тока, если использовать среду с чисто действительной проводимостью.

ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ В ЭЛЕКТРОННОМ ПОТОКЕ В РЕЗИСТИВНОМ УСИЛИТЕЛЕ НА ОСНОВЕ РАЗВИТОЙ ТЕОРИИ

Следуя далее [9], введем среднюю кинетическую энергию

$$w_k = eV_0\widetilde{\left(\frac{\partial\theta}{\partial\xi}\right)^2} \tag{10}$$

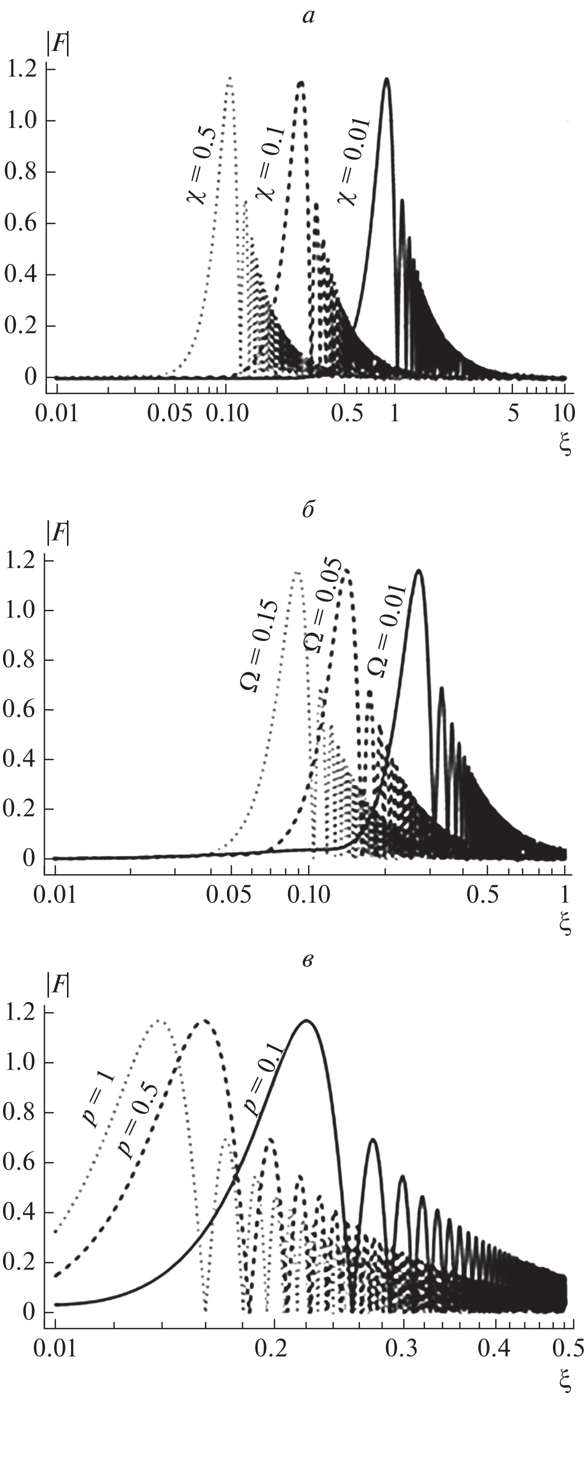

Рис. 3. Зависимость модуля безразмерной первой гармоники тока от нормированной координаты: *а* – при различных значениях начальной модуляции скорости (кривые построены при $p = 1$, $\Omega = 0.1$, $\sigma = 1$, $B_L = 0$); *б* – при различных значениях параметра пространственного заряда (кривые построены при $p = 1$, $B_L = 0$, $\sigma = 1$, $\chi = 0.5$); *в* – при различных поперечных размерах пучка (кривые построены при $\Omega = 0.05$, $B_L = 0$, $\sigma = 1$, $\chi = 0.5$).

и среднюю потенциальную (кулоновскую) энергию

$$w_c = eV_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n^2 \Omega^2}{2n^2\left[\left(1 + \frac{B_L}{\omega\varepsilon}\right)^2 + \left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2\right]} \left(1 + \frac{B_L}{\omega\varepsilon}\right) \left|I'_n\right|^2, \quad (11)$$

где волнистой чертой сверху обозначено усреднение по начальной фазе

$$\widetilde{f} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f d(\omega t_0). \quad (12)$$

Тогда закон сохранения энергии для данной модели имеет вид:

$$w_k + w_c = \text{const}. \quad (13)$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Волновой метод Овчарова–Солнцева показывает, что использование сред с конечной проводимостью позволяет сократить длину прибора, но не дает выигрыша в увеличении первого максимума модуля первой гармоники тока.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 18-02-00666.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lu X., Hummelt J.S., Shapiro M.A., Temkin R.J.* // IVEC-2017. Proceedings of the 18th Intern. Vacuum Electronics Conf.
2. *Rowe T., Forbes P., Booske J. et al.* // IVEC-2017. Proceedings of the 18th Intern. Vacuum Electronics Conf.
3. *Birdsall C.K., Whinnery J.R.* // J. Appl. Phys. 1953. V. 24. P. 314.
4. *Rowe T., Behdad N., Booske J.* // IEEE Transact. on Plasma Sci. 2015. V. 43. № 7. P. 2123.
5. *Rowe T., Behdad N., Booske J.* // IEEE Transact. on Plasma Sci. 2016. V. 44. № 10. P. 2476.
6. *Касаткин Л.В.* // Радиотехника и электроника. 1961. Т. 6. № 2. С. 267.
7. *Uhm H.S.* // Proc. SPIE. 1994. V. 2154. P. 39.
8. *Солнцев В.А.* // Изв. вузов “Радиофизика”. 1974. Т. XVII. № 4.
9. *Вайнштейн Л.А., Солнцев В.А.* Лекции по сверхвысокочастотной электронике. М.: “Советское радио”, 1973. 400 с.