ИЗВЕСТИЯ РАН. СЕРИЯ ФИЗИЧЕСКАЯ, 2019, том 83, № 4, с. 460–468

УДК 539.17.01,539.142,539.143

ИЗУЧЕНИЕ ОСНОВНЫХ СОСТОЯНИЙ ЯДЕР ^{6,7,9,11}Li МЕТОДОМ ФЕЙНМАНОВСКИХ КОНТИНУАЛЬНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

© 2019 г. В. В. Самарин[1, 2, *], М. А. Науменко[1]

[1]Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Россия

[2]Государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования Московской области "Университет "Дубна", Дубна, Россия

*E-mail: samarin@jinr.ru

Поступила в редакцию 01.10.2018 г.
После доработки 15.10.2018 г.
Принята к публикации 19.11.2018 г.

Энергия и квадрат модуля волновой функции основного состояния ядер ^{6,7,11}Li вычислены методом континуальных интегралов Фейнмана в модели взаимодействия ядерного остова и внешних нуклонов. Для энергии получено согласие с экспериментальными данными. Продемонстрировано проявление в структуре ядер ^{6}Li и ^{7}Li соответственно дейтронного и тритонного кластеров. Для ядер ^{7,9,11}Li также были проведены расчеты в оболочечной модели деформированного ядра. Обе модели позволили объяснить сильную деформацию ядра ^{7}Li.

DOI: 10.1134/S0367676519040239

ВВЕДЕНИЕ

Низкоэнергетические реакции с участием ядер трития, гелия, лития и бериллия [1] составляют значительную часть изученных и продолжающих изучаться в настоящее время ядерных реакций. Реакции с изотопами Li представляют значительный интерес с нескольких точек зрения. Ядра $^{6-11}$Li с отношением числа нейтронов к числу протонов, изменяющимся от 1 до 2.67, и, следовательно, с существенно различной структурой предоставляют уникальную возможность для проверки различных микроскопических моделей [2]. Знание свойств и волновой функции основного состояния нуклидов лития необходимо для теоретического описания реакций с их участием. В простейшей оболочечной модели конфигураций ^{6}Li ($n + p + \alpha$) и ^{7}Li ($n + n + p + \alpha$) [1–6] внешние нуклоны в поле ядерного остова (α-кластера) занимают состояние $1p_{3/2}$ и проявляют свойства кластеров – дейтрона и тритона соответственно [7], поэтому ядра ^{6}Li и ^{7}Li можно рассматривать как системы трех и четырех тел. Ядро ^{11}Li также можно рассматривать как систему трех тел: двух слабосвязанных нейтронов и ядерного остова, близкого по свойствам к ядру ^{9}Li.

Уравнение Шредингера в рамках задачи трех тел с ортогональным проектированием впервые было решено для ядра ^{6}Li в работе [8]. В работе [9] уравнение Шредингера для трехтельной системы $n + n + \alpha$ было решено с помощью разложений по гиперсферическим функциям (K-гармоникам). В работах [10, 11] волновые функции системы трех тел были получены с помощью гауссового базиса и численного решения системы интегральных уравнений Хилла–Уилера (Hill–Wheeler). Более простую возможность вычисления энергии E_0 и плотности вероятности $|\Psi_0(\vec{r}_1,\ldots,\vec{r}_n)|^2$ для основного состояния n-частичной системы дает метод континуальных интегралов Фейнмана [12–18]. Его универсальность позволила в едином подходе выполнить расчеты для ряда малонуклонных ядер: ^{3}H, ^{3,4,6}He, ^{9}Be [15–18]. В данной работе многотельные расчеты проведены для ядер ^{6,7,11}Li, представленных в виде системы из ядерного остова и двух-трех внешних нуклонов. Применение оболочечной модели деформированного ядра к перечисленным ядрам, а также к ядру ^{9}Li дает для структуры ядер картину, близкую к результатам многотельных расчетов.

1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Энергия E_0 и квадрат модуля волновой функции основного состояния $|\Psi_0|^2$ частицы массой m с потенциальной энергией $V(q)$, зависящей от координаты q, могут быть найдены с помощью введенных Р. Фейнманом [12] континуальных интегралов (интегралов по траекториям) [12, 13] во мнимом (евклидовом) времени $t = -i\tau$. Континуальные интегралы можно представить в виде предела многократного интеграла [13–15]

$$K_E(q,\tau;\, q,0) = \lim_{\substack{N\to\infty \\ N\Delta\tau=\tau}} \times \int\cdots\int \exp\left\{-\frac{1}{\hbar}\sum_{k=1}^{N}\left[\frac{m(q_k-q_{k-1})^2}{2\Delta\tau} + V(q_k)\Delta\tau\right]\right\} \times C^N dq_1 dq_2 \ldots dq_{N-1}, \quad (1)$$

где

$$C = \left(\frac{m}{2\pi\hbar\Delta\tau}\right)^{1/2}. \quad (2)$$

Здесь значения координаты $q_k = q(\tau_k)$, $\tau_k = k\Delta\tau$, $k = \overline{0,N}$, $q_0 = q_N = q$ задают "траекторию" частицы в виде ломаной линии в плоскости (q,τ) с вершинами (q_k,τ_k), $k = \overline{1,N-1}$, $N \geq 2$, при этом $(N-1)$-кратный интеграл соответствует усреднению по таким "траекториям"

$$K_E(q,\tau;\, q,0) \approx \approx \left(\frac{m}{2\pi\hbar\tau}\right)^{1/2} \left\langle \exp\left[-\frac{\Delta\tau}{\hbar}\sum_{k=1}^{N} V(q_k)\right]\right\rangle_{0,N}. \quad (3)$$

Здесь и далее угловыми скобками $\langle\ldots\rangle$ обозначено усреднение по случайным $(N-1)$-мерным векторам $Q = \{q_1,\ldots,q_{N-1}\}$ с законом распределения $W(q_0;\, q_1,\ldots,q_{N-1};\, q_N = q_0 = q)$

$$W(q;\, q_1,\ldots,\, q_{N-1};\, q) = = C^{N-1}N^{1/2}\exp\left[-\frac{m}{2\hbar\Delta\tau}\sum_{k=1}^{N}(q_k - q_{k-1})^2\right]. \quad (4)$$

Усреднение может быть вычислено методом Монте-Карло [16–18]. Алгоритм моделирования случайного вектора с законом распределения (4) описан в работе [16].

Энергии E_0, E_1 и квадраты модуля волновой функции $|\Psi_0(q)|^2$, $|\Psi_1(q)|^2$ основного и первого возбужденного состояний определяют первые члены асимптотики пропагатора в пределе $\tau \to \infty$ [14, 15]

$$K_E(q,\tau;\, q,0) \to |\Psi_0(q)|^2\exp\left(-\frac{E_0\tau}{\hbar}\right) + + |\Psi_1(q)|^2\exp\left(-\frac{E_1\tau}{\hbar}\right) + \ldots, \quad \tau \to \infty. \quad (5)$$

Для значений q и τ таких, что

$$|\Psi_0(q)|^2 \gg |\Psi_1(q)|^2\exp\left(-\frac{E_1 - E_0}{\hbar}\tau\right), \quad (6)$$

энергию E_0 можно найти как угловой коэффициент линейной части графика зависимости $\hbar\ln K_E(q,\tau;\, q,0)$ от τ

$$\hbar\ln K_E(q,\tau;\, q,0) = \hbar\ln|\Psi_0(q)|^2 - E_0\tau. \quad (7)$$

Для этого с учетом случайных погрешностей моделирования методом Монте-Карло в работах [16–18] была использована линейная регрессия. Формулы (1)–(7) естественным образом обобщаются на случаи большего числа степеней свободы. Приближенные значения квадрата модуля волновой функции основного состояния $|\Psi_0(q)|^2$ в точках q ограниченной области финитного движения в работах [16–18] были найдены с помощью выражения

$$K_E(q,\tau;\, q,0) = |\Psi_0(q)|^2\exp\left(-\frac{E_0\tau}{\hbar}\right) \quad (8)$$

при достаточно больших значениях $\tau > T$, соответствующих линейной части графика зависимости $\hbar\ln K_E(q,\tau;\, q,0)$. Поскольку волновая функция основного состояния не имеет узловых точек (линий или поверхностей) и не меняет знака, ненормированная волновая функция может быть найдена по формуле

$$\Psi_0(q) = \sqrt{K_E(q,\tau;\, q,0)}. \quad (9)$$

Для удобства расчетов в масштабах действия ядерных сил удобно использовать безразмерные переменные $\tilde{q} = q/x_0$, $\tilde{V} = V(q)/\varepsilon_0$, $\tilde{E}_0 = E_0/\varepsilon_0$, $\tilde{m} = m/m_0$, $\tilde{\tau} = \tau/t_0$, $\Delta\tilde{\tau} = \Delta\tau/t_0$, $\tilde{K}_E = K_E x_0$, где $x_0 = 1$ фм, $\varepsilon_0 = 1$ МэВ, m_0 – масса нейтрона, $t_0 = m_0 x_0^2/\hbar \approx 1.57\cdot 10^{-23}$ с, $b_0 = t_0\varepsilon_0/\hbar \approx 0.02412$, тогда в области линейной части графика зависимости пропагатора от $\tilde{\tau}$ (при $\tilde{\tau} > \tilde{T}$)

$$b_0^{-1}\ln\tilde{K}_E(\tilde{q},\tilde{\tau};\, \tilde{q},0) \approx b_0^{-1}\ln|\Psi_0(\tilde{q})|^2 - \tilde{E}_0\tilde{\tau}, \quad (10)$$

$$\tilde{K}_E(\tilde{q},\tilde{\tau};\, \tilde{q},0) \approx \approx x_0^{-1}\left(\frac{\tilde{m}}{2\pi\tilde{\tau}}\right)^{1/2}\left\langle \exp\left[-\Delta\tilde{\tau}b_0\sum_{k=1}^{N}\tilde{V}(\tilde{q}_k)\right]\right\rangle_{0,N}, \quad (11)$$

$$W(\tilde{q};\, \tilde{q}_1,\ldots,\tilde{q}_{N-1};\, \tilde{q}) = = \tilde{C}^{N-1}N^{1/2}\exp\left[-\frac{1}{2\Delta\tilde{\tau}}\sum_{k=1}^{N}(\tilde{q}_k - \tilde{q}_{k-1})^2\right], \quad (12)$$

$$\tilde{C} = \left(\frac{\tilde{m}}{2\pi\Delta\tilde{\tau}}\right)^{1/2}. \quad (13)$$

В общем случае эффективные парные центральные потенциалы нуклон-нуклонного взаимодействия нуклонов 1 и 2 могут быть представлены в виде [19]

$$V(r) = v_0(r) + v_\sigma(r)\vec{\sigma}_1\vec{\sigma}_2 + + v_\tau(r)\vec{\tau}_1\vec{\tau}_2 + v_{\sigma\tau}(r)(\vec{\sigma}_1\vec{\sigma}_2)(\vec{\tau}_1\vec{\tau}_2), \quad (14)$$

где r – расстояние между нуклонами, $\vec{\sigma}_1$, $\vec{\sigma}_2$ – спиновые операторы (матрицы) Паули, $\vec{\tau}_1$, $\vec{\tau}_1$ – операторы изоспина. В данной работе использована сокращенная форма

$$V(r) = v_0(r) + v_\sigma(r)\vec{\sigma}_1\vec{\sigma}_2 + v_\tau(r)\vec{\tau}_1\vec{\tau}_2 \quad (15)$$

с тремя функциями $v_0(r)$, $v_\sigma(r)$, $v_\tau(r)$, для определения которых можно использовать значения энер-

гии основного состояния ядер ^{2}H и ^{3}H. Для четного триплетного состояния протона и нейтрона в дейтроне потенциал

$$V_{p-n}^{(1^+)}(r) = v_0(r) + v_\sigma(r) - 3v_\tau(r) \quad (16)$$

должен объяснять наличие единственного связанного состояния с энергией 2.225 МэВ и среднеквадратичным зарядовым радиусом 2.14 фм [3].

Известно, что спин основного состояния ядра ^{3}H равен $1/2$, при этом по принципу Паули спины нейтронов должны быть антипараллельны. Для конфигурации ядра ^{3}H такой, что параллельны спины протона с радиусом-вектором $\vec{r}_3$ и нейтрона с радиусом-вектором $\vec{r}_1$, потенциальная энергия взаимодействия нуклонов в ядре ^{3}H может быть представлена в виде суммы парных взаимодействий нуклонов друг с другом

$$V = V_{n-n}^{(0^+)}\left(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|\right) + V_{p-n}^{(1^+)}\left(|\vec{r}_1 - \vec{r}_3|\right) + V_{p-n}^{(0^-)}\left(|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|\right). \quad (17)$$

Здесь $V_{p-n}^{(0^-)}$ и $V_{n-n}^{(0^+)}$ – синглетные потенциалы взаимодействия соответственно протона с нейтроном и нейтрона с нейтроном

$$V_{p-n}^{(0^-)}(r) = v_0(r) - 3v_\sigma(r) - 3v_\tau(r), \quad (18)$$

$$V_{n-n}^{(0^+)}(r) = v_0(r) - 3v_\sigma(r) + v_\tau(r). \quad (19)$$

Потенциалы (18), (19) не должны приводить к наличию связанных состояний.

Выражение (17) несимметрично по отношению к перестановке нейтронов. При его использовании в гамильтониане вместо общего выражения (14) оно привело бы к некоммутативности гамильтониана с оператором перестановки тождественных частиц. В подходе, примененном в данной работе, гамильтониан не используется явно, а свойство симметрии координатной волновой функции обеспечивается дополнительной процедурой симметризации (см. далее). Это позволяет в начальном приближении использовать выражение (17) при вычислении пропагатора для ядра ^{3}H.

Функции $v_0(r)$, $v_\sigma(r)$, $v_\tau(r)$ выражаются через перечисленные потенциалы

$$v_0(r) = \frac{3}{4}V_{p-n}^{(1^+)}(r) - \frac{1}{2}V_{p-n}^{(0^-)}(r) + \frac{3}{4}V_{n-n}^{(0^+)}(r), \quad (20)$$

$$v_\sigma(r) = \frac{1}{4}V_{p-n}^{(1^+)}(r) - \frac{1}{4}V_{p-n}^{(0^-)}(r), \quad (21)$$

$$v_\tau(r) = -\frac{1}{4}V_{p-n}^{(0^-)}(r) + \frac{1}{4}V_{n-n}^{(0^+)}(r). \quad (22)$$

В работах [16–18] при расчетах пропагатора $\tilde{K}_E\left(\tilde{q}, \tilde{\tau}; \tilde{q}, 0\right)$ для ядер ^{2,3}H, ^{3,4}He были использованы эффективные парные потенциалы сильного взаимодействия в виде линейных комбинаций гауссовых экспонент с отталкивательным кором, сходные с известным потенциалом M3Y (см., например, [20, 21])

$$V_{p-n}^{(1^+)}(r) = \sum_{k=1}^{3} u_k \exp\left(-r^2/b_k^2\right), \quad (23)$$

$$V_{p-n}^{(0^-)}(r) = \sum_{k=1}^{3} u_k \exp\left(-r^2/d_k^2\right), \quad (24)$$

$$V_{n-n}^{(0^+)}(r) = \sum_{k=1}^{3} u_k \exp\left(-r^2/c_k^2\right). \quad (25)$$

Для ядра ^{2}H потенциал (23) с набором параметров $u_1 = 500$ МэВ, $u_2 = -102$ МэВ, $u_3 = -2$ МэВ, $b_1 = 0.296$ фм, $b_2 = c_2 = d_2 = 1.26$ фм, $b_3 = c_3 = d_3 = 2.67$ фм дает значения энергии $E_0 = -2.226$ МэВ и среднеквадратичного зарядового радиуса 1.92 фм, достаточно близкие к экспериментальным значениям. Числовые значения остальных параметров, d_1 и c_1, были определены в работе [16] из условия близости вычисленных значений энергий связи ядер ^{2,3}H, ^{3,4}He к экспериментальным значениям, в частности, для ядра ^{3}H энергия связи равна 8.48 МэВ. Примеры графиков эффективных потенциалов (23)–(25) и функций $v_0(r)$, $v_\sigma(r)$, $v_\tau(r)$ показаны на рис. 1.

Для основных состояний ядер, содержащих не более двух тождественных нуклонов, расчеты по формулам (10)–(12) можно проводить без учета принципа Паули. Принцип Паули можно не учитывать и для ядер ^{6,7,11}Li, если рассматривать их как систему из остова и внешних нуклонов с конфигурациями $\{p, n\}$, $\{p, n, n\}$ и $\{n, n\}$, соответственно. В ядрах ^{6,7}Li в качестве остова естественно выбрать α-кластер, остов ядра ^{11}Li будем считать подобным ядру ^{9}Li. В таком случае в рассматриваемых системах будет не более двух тождественных нуклонов.

Ядерную часть эффективного потенциала взаимодействия нуклона с ядерным остовом можно выбрать аналогичной псевдопотенциалу [22], используемому в физике металлов для описания взаимодействия внешних электронов (из зоны проводимости) с атомными остовами. Внутри атомного остова иона псевдопотенциал имеет простой вид (в частности, может быть постоянным), при этом вне атомного остова решения уравнения Шредингера с псевдопотенциалом и реальным потенциалом атома мало отличаются друг от друга. Энергия основного состояния электрона в псевдопотенциале близка к энергии самого верхнего занятого уровня атома. Наличие отталкивательных ко́ров в используемых в данной работе псевдопотенциалах объясняется наличием отталкивательных ко́ров в потенциалах нуклон-нуклонного взаимодействия. Энергия основного состояния в системе остов-

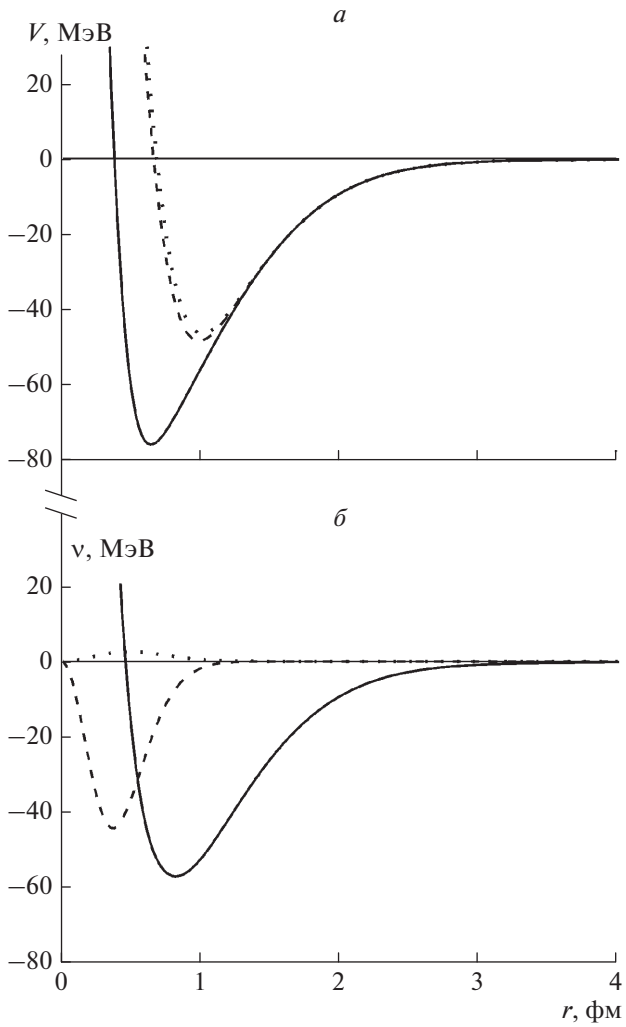

Рис. 1. Графики: *а* – эффективных потенциалов (23) (сплошная линия), (24) (штриховая линия), (25) (точечная линия); *б* – функций $v_0(r)$ (сплошная линия), $v_\sigma(r)$ (штриховая линия), $v_\tau(r)$ (точечная линия).

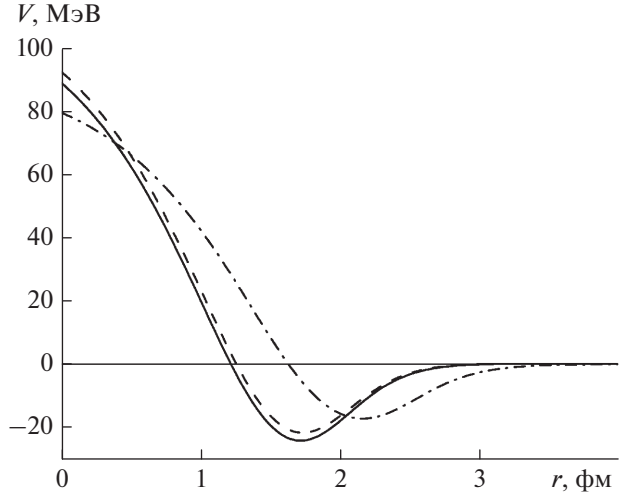

Рис. 2. Графики псевдопотенциалов взаимодействия нейтрона с α-кластером в ядрах ^{6}Li (сплошная линия), ^{7}Li (штриховая линия) и с ядерным остовом {^{9}Li} (штрихпунктирная линия) в ядре ^{11}Li.

нуклон оказывается близкой к энергии самого верхнего заполненного уровня оболочечной модели ядра. При этом состояния нуклонов ядерного остова, соответствующие нижележащим уровням, оказываются исключенными (запрещенными).

В работах [16–18] при расчетах пропагатора $\tilde{K}_E(\tilde{q},\tilde{\tau};\tilde{q},0)$ для ядер ^{6}He, ^{6}Li потенциалы сильного взаимодействия α-кластера с нейтроном и протоном $V_{n-\alpha}(r) \equiv V_{p-\alpha}^{(N)}(r)$ были выбраны в виде линейных комбинаций функций типа Вудса–Саксона (фермиевского распределения)

$$f(r;\, a, B) = \left[1 + \exp\left(\frac{r-a}{B}\right)\right]^{-1}. \qquad (26)$$

В данной работе парный псевдопотенциал сильного взаимодействия α-кластера с нейтроном и протоном $V_{n-\alpha}(r) \equiv V_{p-\alpha}^{(N)}(r)$ для ядер ^{6}Li и ^{7}Li и парный псевдопотенциал сильного взаимодействия ядерного остова с нейтроном для ядра ^{11}Li были выбраны в виде функции

$$U(r) = -U_1 f(r;\, a_1, B_1) + U_2 f(r;\, a_2, B_2) + \\ + U_3 f(r;\, a_3, B_3) f(r;\, a_4, B_4). \qquad (27)$$

Примеры графиков парных псевдопотенциалов сильного взаимодействия α-кластера и ядерного остова {^{9}Li} с нейтроном показаны на рис. 2; их обсуждение приводится в следующем разделе. Потенциал взаимодействия протона с α-кластером $V_{p-\alpha}(r)$ включал ядерную (N) и кулоновскую (C) части

$$V_{p-\alpha}(r) = V_{p-\alpha}^{(N)}(r) + V_{p-\alpha}^{(C)}(r). \qquad (28)$$

Для кулоновской части взаимодействия использовалось известное выражение для энергии точечного заряда в поле равномерно заряженного шара.

Вычисления для ядер ^{3}H, ^{6}Li и ^{11}Li, рассматриваемых соответственно как системы $n + n + p$, $n + p + \alpha$ и $n + n + \{^9\text{Li}\}$, выполнялись в системе центра масс с использованием координат Якоби (см., например, [13]) для системы трех частиц с массами m_1, m_2, m_3

$$\vec{y} = \vec{r}_3 - \frac{1}{2}\left(\vec{r}_1 + \vec{r}_2\right). \qquad (29)$$

Для ядер ^{3}H, ^{11}Li в качестве $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ выбирались радиусы-векторы нейтронов с $m_1 = m_2 = m$, для ядра ^{6}Li – радиусы-векторы нейтрона и протона с равными массами $m_1 \approx m_2 = m$. Для ядра ^{7}Li, пред-

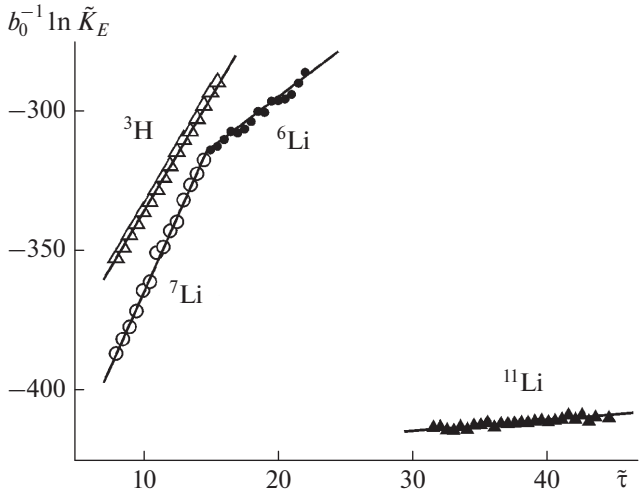

Рис. 3. Линейные части графиков зависимости нормированного логарифма пропагатора $b_0^{-1}\ln\tilde{K}_E$ от мнимого времени $\tilde{\tau}$ для ядер ^{3}H (светлые треугольники), ^{7}Li (кружки), ^{6}Li (точки) и ^{11}Li (черные треугольники): прямые – результаты линейной регрессии (расчет методом Монте-Карло для $n = 7\cdot 10^7$ траекторий с шагом сетки $\Delta\tilde{\tau} = 0.003$).

ставленного как система $n + n + p + \alpha$, использовались координаты Якоби для системы четырех частиц с массами $m_1 = m_2 = m_3 = m$, $m_3 = M$

$$\vec{x} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1, \quad \vec{y} = \frac{1}{2}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2) - \vec{r}_3, \qquad \vec{z} = \frac{1}{3}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3) - \vec{r}_4. \tag{30}$$

Вычисления по формулам (8), (9) с потенциальной энергией, несимметричной по отношению к перестановке нейтронов с радиусами-векторами $\vec{r}_1, \vec{r}_2$, дает координатную волновую функцию, также несимметричную по отношению к перестановке нейтронов

$$\Phi_0(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\vec{r}_3) = \sqrt{K_E(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\vec{r}_3,\tau;\ \vec{r}_1,\vec{r}_2,\vec{r}_3,0)}. \tag{31}$$

Из-за асимметричности спиновой волновой функции по отношению к перестановке нейтронов с антипараллельными спинами координатная волновая функция должна быть симметрична по отношению к перестановке нейтронов. Такую (ненормированную) волновую функцию можно получить, образовав симметричную комбинацию

$$\Psi_S(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\vec{r}_3) = \Phi_0(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\vec{r}_3) + \Phi_0(\vec{r}_2,\vec{r}_1,\vec{r}_3) \tag{32}$$

или в координатах Якоби

$$\Psi_S(\vec{x},\vec{y}) = \Phi_0(\vec{x},\vec{y}) + \Phi_0(-\vec{x},\vec{y}). \tag{33}$$

Плотность вероятности в координатах Якоби $\rho(\vec{x},\vec{y}) = |\Psi_S(\vec{x},\vec{y})|^2$ имеет свойство симметрии по отношению к инверсии вектора $\vec{x}$: $\rho(\vec{x},\vec{y}) = \rho(-\vec{x},\vec{y})$. Подобная симметризация по отношению к перестановке нейтронов нужна и для ядра ^{7}Li. Для ядра ^{11}Li взаимодействие внешних нейтронов с остовом в простейшем приближении будем считать не зависящим от спинов нейтронов, тогда симметричная по отношению к перестановкам нейтронов потенциальная энергия

$$V = V_{n-n}^{(0^+)}(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) + U(|\vec{r}_1 - \vec{r}_3|) + U(|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|) \tag{34}$$

приводит к симметричной по отношению к перестановке нейтронов волновой функции основного состояния

$$\Psi_0(\vec{x},\vec{y}) = \sqrt{K_E(\vec{x},\vec{y},\tau;\ \vec{x},\vec{y},0)}. \tag{35}$$

2. РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

Для реализации расчетов средних по случайным траекториям была использована технология CUDA параллельных вычислений на графических процессорах [23–25]. Расчеты были выполнены на гетерогенном кластере “HybriLIT” [26] Лаборатории информационных технологий Объединенного института ядерных исследований. Для определения энергии E_0 основного состояния ядер ^{3}H и ^{6,7,11}Li численные расчеты пропагатора (11) проводились с числом траекторий $n \sim 10^6$–10^8 и шагом сетки по мнимому времени $\Delta\tilde{\tau} = 0.003$. Результаты показаны на рис. 3.

Графики потенциалов (23)–(25) и псевдопотенциалов (27) показаны соответственно на рис. 1 и 2. Значения параметров потенциалов и псевдопотенциалов были подобраны из условия совпадения с точностью до трех значащих цифр теоретического значения $(-E_0)$ с экспериментальной энергией разделения ядер ^{3}H, ^{7}Li и ^{6}Li на составляющие нуклоны (^{3}H) или внешние нуклоны и α-кластер (^{7}Li и ^{6}Li), соответственно 8.48, 10.9 и 3.70 МэВ [3]. Для ядра ^{11}Li из-за малости энергии разделения (0.369 МэВ) на нейтроны и остов {^{9}Li} совпадение ограничивалось двумя значащими цифрами. Относительная погрешность углового коэффициента в формуле (11) определялась с помощью линейной регрессии (см. рис. 3) и составляла несколько процентов. Для нуклон-нуклонных потенциалов (24), (25) были использованы незначительно измененные по сравнению с работой [16] значения параметров $d_1 = 0.490$ фм, $c_1 = 0.504$ фм. Для трех изотопов ^{6,7,11}Li были использованы единые значения параметров $U_2 = 55.8$ МэВ, $B_1 = 0.25$ фм, $B_2 = 0.3$ фм, $B_3 = 0.5$ фм, $B_4 = 1$ фм; значения остальных параметров псевдопотенциалов (27) приведены в таблице. Небольшие различия графиков псевдопотенциалов взаимодействия нейтрона с α-кластером (27) для

ядер ^{6}Li и ^{7}Li можно объяснить поляризацией α-кластера в различном поле внешних нуклонов. В частности, несколько больший радиус отталкивательного кора у ядра ^{7}Li обусловлен бóльшим числом таких нуклонов.

Рассмотрим свойства волновой функции Ψ_0 и плотности вероятности $|\Psi_0|^2$ для ядер ^{6,7,11}Li. Найденное по формуле (8) распределение ненормированной плотности вероятности $\tilde{K}_E(\vec{x},\vec{y},\tilde{\tau};\ \vec{x},\vec{y},0) = \tilde{K}_E(x,y,\cos\theta;\tilde{\tau})$ для трех значений угла θ трехтельной конфигурации ядра ^{6}Li ($n + p + \alpha$) показано на рис. 4*а*. Результаты для четырехтельной конфигурации ядра ^{7}Li ($n + n + p + \alpha$) в частном случае расположения нуклонов в вершинах правильного треугольника со стороной x и α-кластера на расстоянии z от центра треугольника приведены на рис. 5*а*. В работе [16] было показано, что подобное расположение нуклонов наиболее вероятно в ядре ^{3}H (см. также далее). Видно, что наиболее вероятными являются конфигурации с объединением внешних нуклонов соответственно в дейтронный кластер для ^{6}Li ($d + \alpha$, рис. 4*в*) и в тритонный кластер для ^{7}Li ($t + \alpha$, рис. 5*в*). Косвенным подтверждением этого является сравнительно небольшая энергия отделения этих кластеров – соответственно 1.47 и 2.47 МэВ, а также близость энергии отделения нейтрона от ядер ^{7}Li и ^{3}H – соответственно 7.25 и 6.26 МэВ.

Представленная на рис. 5*в* модель согласуется с известными представлениями о форме ядер ^{7}Li и ^{9}Li. Из экспериментальных значений квадрупольных моментов были получены значения параметров квадрупольной деформации β_2 для ^{7}Li от −0.9 до −1.5, для ^{9}Li от −0.6 до −0.8 [27]. Сильно сплюснутая форма ядра ^{7}Li может соответствовать усреднению по всевозможным поворотам системы $t + \alpha$ вокруг направления (оси симметрии), перпендикулярного межкластерной оси. Добавление двух внешних нейтронов делает ядро ^{9}Li менее сплюснутым, что можно связать с поляризацией кластера в поле нейтронов. Некоторое уменьшение деформации до $\beta_2 \approx -0.6$ у ядра ^{11}Li можно рассматривать как следствие влияния протяженной гало-оболочки внешних нейтронов на ядерный остов, подобный ядру ^{9}Li. В качестве дополнительной модели ядер ^{7,9,11}Li была использована оболочечная модель деформированного ядра с потенциалом Вудса–Саксона

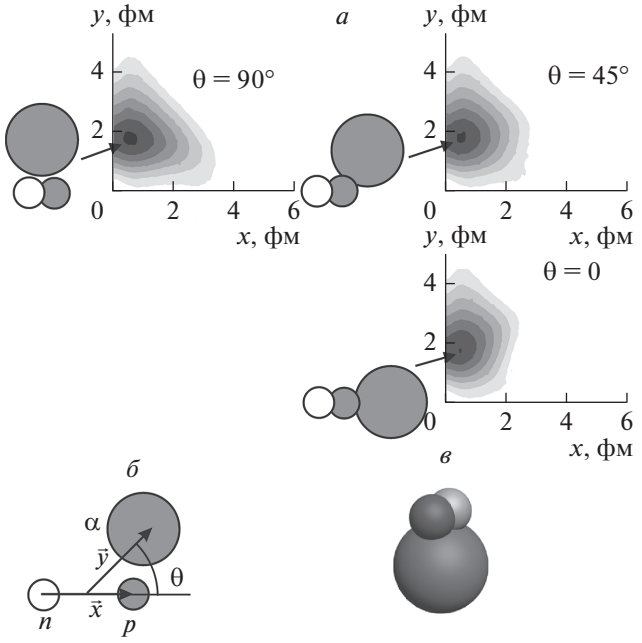

Рис. 4. Плотность вероятности (*а*) в координатах Якоби x, y (*б*) с примерами положения нейтрона (светлые кружки), протона (темные малые кружки), α-кластера (темные большие кружки) и трехмерная модель (*в*) конфигурации ядра ^{6}Li ($n + p + \alpha$). Наиболее вероятной является конфигурация с объединением протона и нейтрона в дейтронный кластер ($d + \alpha$).

$$U(r,\cos\theta) = -U_0\left\{1+\exp\left[\frac{r-R_U g_\beta(\cos\theta)}{a_U}\right]\right\}^{-1}, \quad (36)$$

где функция $g_\beta(\cos\theta)$ приведена в [28]. Расчеты в оболочечной модели деформированного ядра методом, приведенным в [29], дали энергии ε верхних заполненных уровней ядер ^{7,9,11}Li, приблизительно равные взятым с противоположным знаком экспериментальным значениям энергии отделения нейтронов. Полученные схемы уровней нейтронов приведены на рис. 6*а*. Плотности вероятности для нейтронов ядра ^{9}Li в цилиндрической системе координат показаны на рис. 6*б*. Для ядра ^{7}Li и ядерного остова {^{9}Li} картина будет аналогичной. Видно, что заселение нуклона-

Таблица 1. Параметры псевдопотенциала (27) сильного взаимодействия внешних нуклонов с остовами ядер ^{6,7,11}Li

Ядро	U_1, МэВ	U_3, МэВ	a_1, фм	a_2, фм	a_3, фм	a_4, фм
^{6}Li	66.33	126	1.95	1.22	0.9	2.7
^{7}Li	63.54	126	1.95	1.22	0.9	2.7
^{11}Li	35.32	72	2.45	1.5	1	2.8

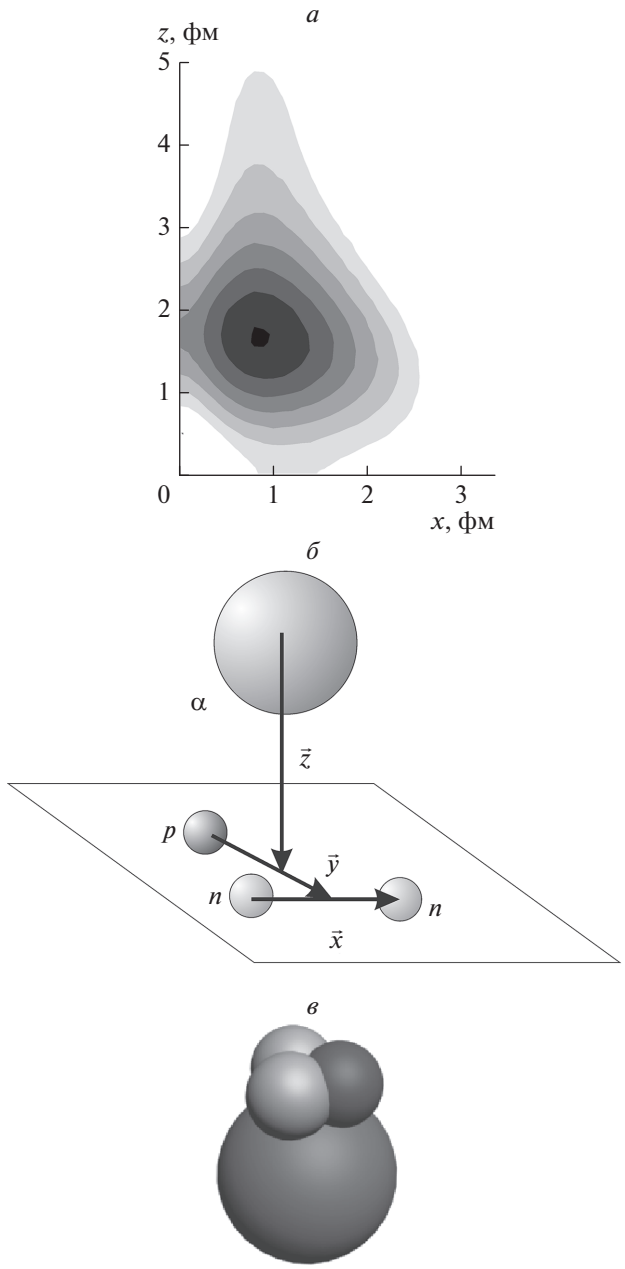

Рис. 5. Плотность вероятности (*а*) в координатах Якоби x, y, z (*б*) и трехмерная модель (*в*) для четырехтельной конфигурации ядра ^{7}Li ($n + n + p + \alpha$). Наиболее вероятной является конфигурация с объединением протона и двух нейтронов в тритонный кластер ($t + \alpha$). Обозначения такие же, как на рис. 4.

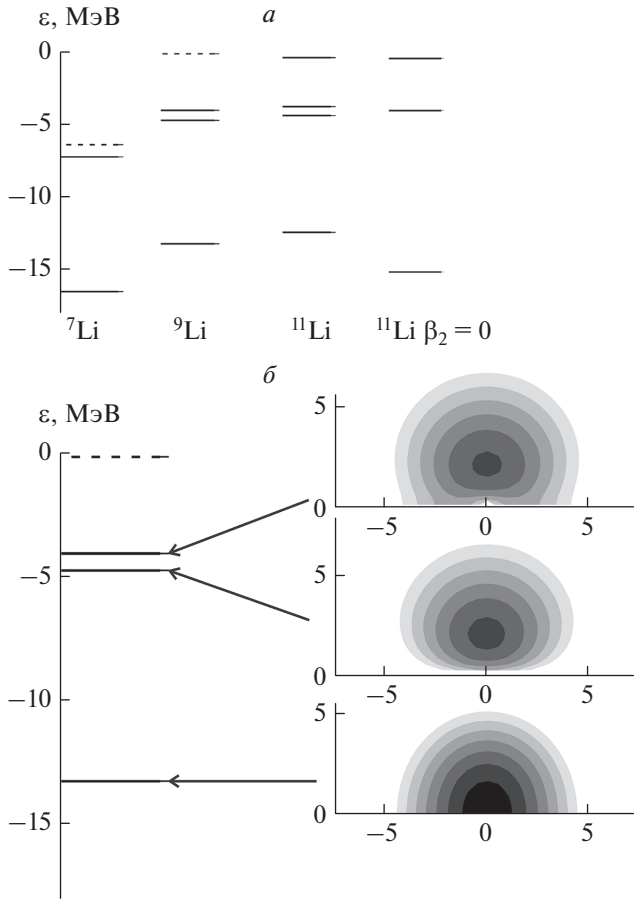

Рис. 6. *а* – схемы уровней нейтронов ядер ^{7}Li, ^{9}Li и ^{11}Li в оболочечной модели деформированного ядра и в оболочечной модели сферического ядра ^{11}Li ($\beta_2 = 0$), сплошные отрезки – занятые уровни, штриховые – свободные; *б* – плотности вероятности в цилиндрических координатах (по горизонтали – ось симметрии) для трех низших уровней нейтронов с квантовыми числами $|m_j| = 1/2$, $|m_j| = 3/2$, $|m_j| = 1/2$ в оболочечной модели деформированного ядра ^{9}Li.

ми двух нижних уровней с квантовыми числами $|m_j| = 1/2$, $|m_j| = 3/2$ ($|m_j|$ – модуль проекции полного углового момента нуклона на ось симметрии ядра) дает распределение плотности вероятности, соответствующее сплюснутой форме ядра ^{7}Li. Заселение третьего уровня с $|m_j| = 1/2$ в ядре ^{9}Li ведет к некоторому уменьшению параметра квадрупольной деформации. Двум нейтронам и двум протонам на глубоких низших уровнях, соответствующих уровню $1s_{1/2}$ сферического ядра с проекцией полного момента на ось симметрии ядра $|m_j| = 1/2$, отвечает ядерный остов, близкий к поляризованному α-кластеру. Два внешних нейтрона ядра ^{7}Li на подуровне с проекцией полного момента на ось симметрии ядра $|m_j| = 3/2$, соответствующем уровню $1p_{3/2}$ сферического ядра, могут считаться довольно сильно связанными с ядерным остовом – энергия их отделения равна 7.25 МэВ. В ядре ^{9}Li энергия этого подуровня заметно выше, а для вышележащего подуровня с $|m_j| = 1/2$ энергия отделения равна 4.06 МэВ.

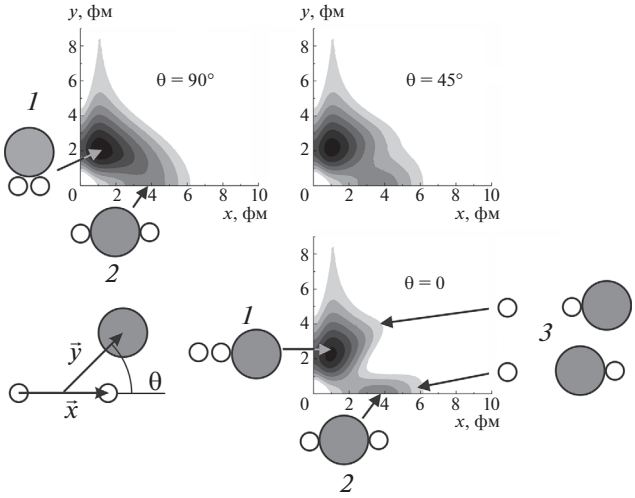

Рис. 7. Плотность вероятности для трехтельной конфигурации ядра ^{11}Li ($n + n + \{^9\text{Li}\}$); обозначения те же, что на рис. 4. Наиболее вероятна конфигурация *1* с динейтронным кластером; линейная (сигарообразная) конфигурация *2* имеет существенно меньшую вероятность. Конфигурация *3* ($n + \{^{10}\text{Li}\}$) еще менее вероятна.

В деформированном ядре ^{11}Li энергии подуровней с $|m_j| = 3/2$ и $|m_j| = 1/2$, соответствующих уровню $1p_{3/2}$ сферического ядра, оказываются близкими. Это позволяет с достаточной точностью использовать для ядра ^{11}Li сферическую оболочечную модель с тремя заполненными нейтронными оболочками: $1s_{1/2}$ (в поляризованном альфа-кластерном остове), $1p_{3/2}$ (первая внутренняя оболочка) и $1p_{1/2}$ (внешняя гало-оболочка). Соответственно, остов ядра ^{11}Li с достаточной точностью можно считать сферически симметричным, а псевдопотенциал взаимодействия остова с внешними нейтронами – центральным (см. рис. 2). Распределение плотности вероятности $\tilde{K}_E(\vec{x},\vec{y},\tilde{\tau};\ \vec{x},\vec{y},0) = \tilde{K}_E(x,y,\cos\theta;\ \tilde{\tau})$ для трех углов θ трехтельной конфигурации ядра ^{11}Li ($n + n + \{^9\text{Li}\}$) показано на рис. 7. Наиболее вероятна конфигурация с динейтронным кластером; линейная (сигарообразная) конфигурация имеет существенно меньшую вероятность. Для сравнения на рис. 8 приведена топография пропагатора $\tilde{K}_E(\vec{x},\vec{y},\tilde{\tau};\ \vec{x},\vec{y},0) = \tilde{K}_E(x,y,\cos\theta;\ \tilde{\tau})$ для трех значений угла θ трехтельной конфигурации ядра ^{3}H ($n + n + p$). В показанной картине благодаря большой разнице между энергиями основного (−8.48 МэВ) и первого возбужденного (−2.22 МэВ) состояний заметно присутствие плотности вероятности двух состояний согласно формуле (5). Ос-

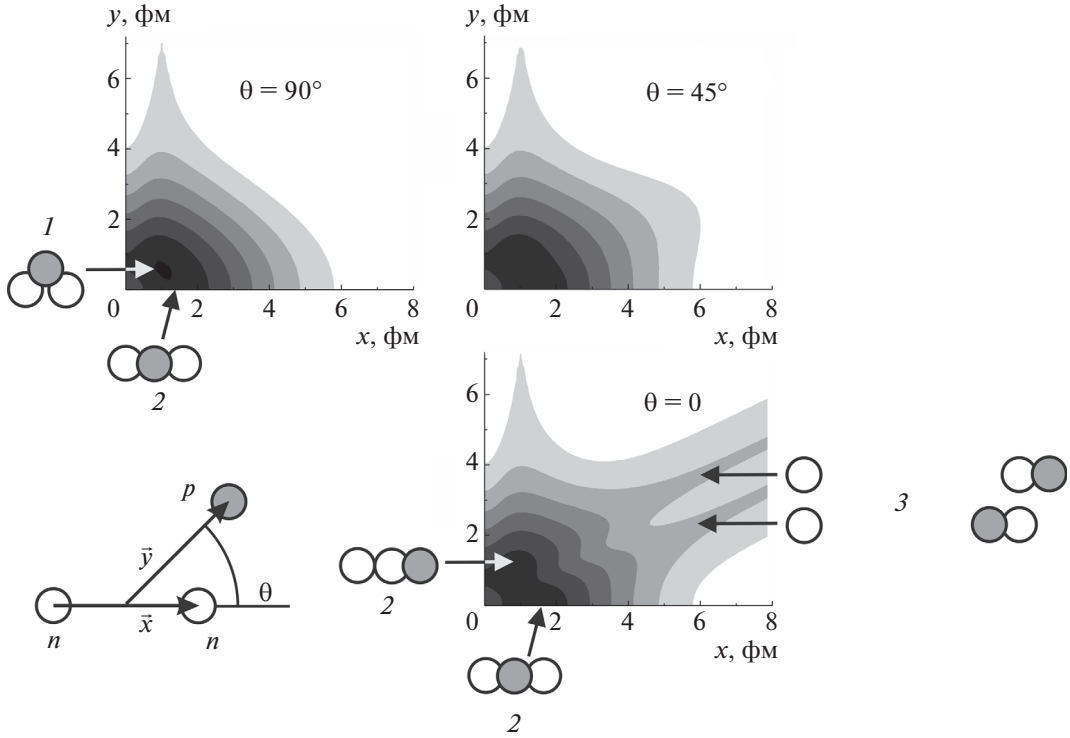

Рис. 8. Топография пропагатора $\tilde{K}_E(\vec{x},\vec{y},\tilde{\tau};\ \vec{x},\vec{y},0) = \tilde{K}_E(x,y,\cos\theta;\ \tilde{\tau})$ в координатах Якоби $\vec{x},\vec{y}$ для ядра ^{3}H ($n + n + p$); обозначения те же, что на рис. 4 и 7. Основному состоянию ядра ^{3}H отвечают треугольное *1* и линейное (сигарообразное) *2* расположения нуклонов; расположение нуклонов *3* соответствует первому возбужденному состоянию с разделением ядра ^{3}H на нейтрон и дейтрон $n + d$.

новному состоянию ядра ^{3}H отвечают треугольное и линейное (сигарообразное) расположение нуклонов. В области, где выполнено условие

$$|\Psi_0(x, y, \cos\theta)|^2 \ll |\Psi_1(x, y, \cos\theta)|^2 \times \times \exp\left(-\frac{E_1 - E_0}{\hbar}\tau\right), \quad (37)$$

проявляется первое возбужденное состояние с разделением на нейтрон и дейтрон $n + d$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенный поход к расчетам волновой функции основного состояния ядер ^{6,7,9,11}Li может служить полезным дополнением к существующим более сложным теоретическим методам. Он позволяет достаточно просто определить энергию основного состояния и установить ее зависимость от параметров нуклон-нуклонного потенциала. Анализ свойств плотности вероятности позволяет подобрать аналитические аппроксимации для волновой функции основного состояния и сделать более реалистичным выбор среднего поля оболочечной модели, а также распределения заряда и массы в ядрах. Все это может быть полезным при теоретическом описании реакций с участием изотопов лития и других легких ядер.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Пенионжкевич Ю.Э.* // ЯФ. 2011. Т. 74. С. 1641; *Penionzhkevich Yu.E.* // Phys. Atom. Nucl. 2011. V. 74. P. 1615.
2. *Пенионжкевич Ю.Э., Соболев Ю.Г., Самарин В.В. и др.* // ЯФ. 2017. Т. 80. С. 525; *Penionzhkevich Yu.E., Sobolev Yu.G., Samarin V.V. et al.* // Phys. Atom. Nucl. 2017. V. 70. P. 928.
3. *Загребаев В.И., Деникин А.С., Карпов А.В. и др.* // Сетевая база знаний NRV по ядерной физике низких энергий. http://nrv.jinr.ru/; *Zagrebaev V.I., Denikin A.S., Karpov A.V. et al.* // NRV web knowledge base on low-energy nuclear physics. http://nrv.jinr.ru/.
4. *Карпов А.В., Деникин А.С., Алексеев А.П. и др.* // ЯФ. 2016. Т. 79. С. 520; *Karpov A.V., Denikin A.S., Alekseev A.P. et al.* // Phys. Atom. Nucl. 2016. V. 79. P. 749.
5. *Karpov A.V., Denikin A.S., Naumenko M.A. et al.* // Nucl. Instrum. Methods Phys. Res. Sect. A. 2017. V. 859. P. 112.
6. *Соловьев В.Г.* Теория атомного ядра: ядерные модели. М.: Энергоиздат, 1981. 296 с.
7. *von Oertzen W., Freer M., Kanada En'yo Y.* // Phys. Rep. 2006. V. 432. P. 43.
8. *Voronchev V.T., Krasnopol'sky V.M., Kukulin V.I.* // J. Phys. G. 1982. V. 8. P. 649.
9. *Zhukov M.V., Danilin B.V., Fedorov D.V. et al.* // Phys. Rep. 1993. V. 231. P. 151.
10. *Кукулин В.И., Краснопольский В.М., Миселхи М.А. и др.* // ЯФ. 1981. Т. 34. С. 21; *Kukulin V.I., Krasnopol'sky V.M., Miselkhi M.A. et al.* // Sov. J. Nucl. Phys. 1981. V. 34. P. 21.
11. *Kukulin V.I., Krasnopol'sky V.M., Voronchev V.T. et al.* // Nucl. Phys. A. 1986. V. 453. P. 365.
12. *Фейнман Р., Хибс А.* Квантовая механика и интегралы по траекториям. М.: Мир, 1968. 382 с.
13. *Блохинцев Д.И.* Основы квантовой механики. М.: Наука, 1976. 664 с.
14. *Шуряк Э.В.* // УФН. 1984. Т. 143. С. 309; *Shuryak E.V.* // Sov. Phys. Usp. 1984. V. 27. P. 448.
15. *Shuryak E.V., Zhirov O.V.* // Nucl. Phys. B. 1984. V. 242. P. 393.
16. *Самарин В.В., Науменко М.А.* // ЯФ. 2017. Т. 80. С. 473; *Naumenko M.A., Samarin V.V.* // Phys. Atom. Nucl. 2017. V. 80. P. 877.
17. *Самарин В.В., Науменко М.А.* // Изв. РАН. Сер. физ. 2016. Т. 80. С. 314; *Samarin V.V., Naumenko M.A.* // Bull. Russ. Acad. Sci.: Phys. 2016. V. 80. P. 283.
18. *Naumenko M.A., Samarin V.V.* // Supercomp. Front. Innov. 2016. V. 3. P. 80.
19. *Ву Т.Ю., Омура Т.* Квантовая теория рассеяния. М.: Наука, 1969. 451 с.
20. *Satchler G.R., Love W.G.* // Phys. Rep. 1979. V. 55. P. 183.
21. *Alvarez M.A.G., Chamon L.C., Pereira D. et al.* // Nucl. Phys. A. 1999. V. 656. P. 187.
22. *Харрисон У.* Псевдопотенциалы в теории металлов. М.: Мир, 1968. 367 с.
23. *NVIDIA CUDA.* https://developer.nvidia.com/cuda-zone/.
24. *Перепелкин Е.Е., Садовников Б.И., Иноземцева Н.Г.* Вычисления на графич. процессорах (GPU) в задачах матем. и теор. физики. М.: Ленанд, 2014. 176 с.
25. *Сандерс Д., Кэндрот Э.* Технология CUDA в примерах: введение в программирование графических процессоров. М.: ДМК, 2011. 232 с.
26. Гетерогенный кластер "HybriLIT" ЛИТ ОИЯИ. http://hybrilit.jinr.ru/.
27. Centre for Photonuclear Experiments Data (Skobeltsyn Institute of Nuclear Physics, Lomonosov Moscow State University). http://cdfe.sinp.msu.ru/services/radchart/radmain.html.
28. *Загребаев В.И., Самарин В.В.* // ЯФ. 2004. Т. 67. С. 1488; *Zagrebaev V.I., Samarin V.V.* // Phys. Atom. Nucl. 2004. V. 67. P. 1462.
29. *Самарин В.В.* // ЯФ. 2015. Т. 78. С. 133; *Samarin V.V.* // Phys. Atom. Nucl. 2015. V. 78. P. 128.