ИЗВЕСТИЯ РАН. СЕРИЯ ФИЗИЧЕСКАЯ, 2019, том 83, № 7, с. 984–986

УДК 532.5

ВЫВОД УРАВНЕНИЯ ВМОРОЖЕННОСТИ НАМАГНИЧЕННОСТИ В СПЛОШНУЮ СРЕДУ

© 2019 г. В. В. Соколов*

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования “МИРЭА – Российский технологический университет”, Москва, Россия

**E-mail: vvs1953@rambler.ru*

Поступила в редакцию 07.09.2018 г.
После доработки 31.01.2019 г.
Принята к публикации 27.03.2019 г.

Вывод уравнения вмороженности намагниченности в сплошную среду выполнен в рамках феррогидродинамики с равновесной намагниченностью. Показано, что при нарушении условия магнитного равновесия магнитную жидкость можно считать идеальной, если намагниченность вморожена в среду.

DOI: 10.1134/S0367676519070391

Под сплошной средой будем понимать идеальную непроводящую магнитную жидкость. Магнитная жидкость или феррожидкость – искусственно синтезированная среда, которая представляет собой коллоидный раствор частиц твердого магнитного материала с размерами порядка 10 нм в несущей жидкости [1]. Раздел гидродинамики, описывающий макроскопическую динамику магнитных жидкостей (феррожидкостей), был назван феррогидродинамикой (ФГД) [2]. В работе [3] с помощью обобщенного принципа виртуальных работ в формулировке В.В. Толмачева [4] были получены уравнения ФГД в предположении о бесконечном малом времени релаксации намагниченности к равновесному значению. Для описания макроскопической динамики идеальной магнитной жидкости в [3] использовались следующие скалярные поля: плотность $\rho(\vec{r},t)$, удельная энтропия $s(\vec{r},t)$ и векторные поля: удельная намагниченность $\vec{m}(\vec{r},t)$ скорость движения жидкости $\upsilon(\vec{r},t)$ и напряженность внешнего магнитного поля $\vec{H}(\vec{r})$. Положение индивидуальных точек в пространстве характеризуем декартовыми координатами x_1, x_2, x_3 или x_i, отсчитываемыми относительно фиксированной в пространстве системы декартовых осей.

Полученная замкнутая система уравнений ФГД с равновесной намагниченностью включает:

уравнение неразрывности

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_k}(\rho\upsilon_k)=0, \tag{1}$$

уравнение движения

$$\rho\frac{d\nu_i}{dt}=-\frac{\partial p}{\partial x_i}+\rho m_j\frac{\partial H_i}{\partial x_j}, \tag{2}$$

уравнение адиабатичности

$$\frac{ds}{dt}=\frac{\partial s}{\partial t}+\nu_k\frac{\partial s}{\partial x_k}=0, \tag{3}$$

уравнение Максвелла в магнитостатическом приближении

$$H_i=-\frac{\partial\Psi}{\partial x_i},\quad \Delta\Psi=4\pi\frac{\partial(\rho m_i)}{\partial x_i}, \tag{4}$$

где Ψ – скалярный потенциал магнитного поля.

Система уравнений (1)–(4), замыкается заданием функциональной зависимости массовой плотности внутренней энергии

$$\varepsilon=\varepsilon(\rho,s,m). \tag{5}$$

При выводе уравнений ФГД в [3] было получено новое условие термодинамического равновесия магнитной жидкости во внешнем магнитном поле

$$\vec{H}=\vec{H}^{eq}=\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial m}\right), \tag{6}$$

которое означает, что в состоянии термодинамического равновесия в окрестности любой точки жидкости напряженность магнитного поля равна равновесной напряженности $\vec{H}^{eq}$. Аналогичное условие было получено также в работе [5]. Тензор напряжения P_{ij} определяется выражением

$$P_{ij} = -p\delta_{ij} + \rho m_i \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial m_j}\right), \quad (7)$$

причем давление p определяется через массовую плотность внутренней энергии

$$p = \rho^2 \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho}\right). \quad (8)$$

Для определения плотности потока внутренней энергии $\vec{j}^{\varepsilon}$ составим уравнения локальных балансов импульса

$$\rho \frac{\partial \upsilon_i}{\partial t} + \rho \upsilon_j \frac{\partial \upsilon j}{\partial xj} = \frac{\partial P_{ij}}{\partial x_j} + f_i \quad (9)$$

и внутренней энергии

$$\rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \rho \upsilon_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = P_{ij} \frac{\partial \upsilon_i}{\partial x_j} + Q - \upsilon_i f_i - \frac{\partial J_k^{\varepsilon}}{\partial x_k}. \quad (10)$$

Объемная плотность силы f_i, действующей со стороны магнитного поля на магнитную жидкость, определяется выражением

$$f_i = -H_i \frac{\partial (\rho m_j)}{\partial x_j}. \quad (11)$$

Для объемной плотности энергии Q, передаваемой магнитной жидкости в единицу времени, имеем выражение

$$Q = H_i \frac{\partial (\rho m_i)}{\partial t}. \quad (12)$$

Теперь подставим выражения (7), (8), (11), (12) для P_{ij}, p, f_i, Q в уравнения локальных балансов (9), (10). После необходимых вычислений, получим

$$\rho \frac{d\upsilon_i}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\rho m_j \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial m_j}\right)\right] - H_i \frac{\partial (\rho m_i)}{\partial x_j}, \quad (13)$$

$$\begin{gathered} \rho \frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{\partial \upsilon_i}{\partial x_j} + \rho m_j \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial m_i}\right)\frac{\partial \upsilon_i}{\partial x_j} + H_j \frac{\partial (\rho m_j)}{\partial t} + \\ + \upsilon_i H_i \frac{\partial (\rho m_j)}{\partial x_j} - \frac{\partial J_k^{\varepsilon}}{\partial x_k}. \end{gathered} \quad (14)$$

Для дальнейших преобразований воспользуемся функциональной зависимостью массовой плотности внутренней энергии (5), согласно которой

$$\rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = -\rho^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho}\frac{\partial \upsilon_j}{\partial x_j} + \rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial s}\frac{ds}{dt} + \rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial m_i}\frac{dm_i}{dt}.$$

Учитывая условие теплового равновесия [3] $\frac{\partial \varepsilon}{\partial s} = T$, которое означает, что в состоянии термодинамического равновесия температура T в окрестности любой точки жидкости равна равновесной температуре. Поэтому выше приведенное уравнение запишем в виде

$$\rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = -\rho^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho}\frac{\partial \upsilon_j}{\partial x_j} + \rho T \frac{ds}{dt} + \rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial m_i}\frac{dm_i}{dt}. \quad (15)$$

После подстановки полученного уравнения в левую часть уравнения (14) и выполнения ряда преобразований оно примет вид

$$\rho T \frac{ds}{dt} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(-J_k^{\varepsilon} + \rho \upsilon_i m_k H_i - \rho \upsilon_k m_j H_j\right).$$

Левая часть этого уравнения равна нулю, что следует из уравнения адиабатичности (3). Поэтому определим плотность потока внутренней энергии $\vec{j}^{\varepsilon}$ следующим выражением

$$J_k^{\varepsilon} = \rho \upsilon_i m_k H_i - \rho \upsilon_k m_j H_j. \quad (16)$$

Далее учтем диссипацию энергии за счет необратимых процессов. Предположим, что условие магнитного равновесия (6) не выполняется, т.е. $\vec{H} - \vec{H}^{eq} \neq 0$. Тензор напряжений Π_{ij} представим в виде суммы равновесной P_{ij} и диссипативной частей π_{ij}, т.е.

$$\Pi_{ij} = P_{ij} + \pi_{ij} = -p\delta_{ij} + \rho m_i \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial m_j}\right) + \pi_{ij}. \quad (17)$$

Соответственно объемную плотность потока внутренней энергии J_k также представим в виде суммы равновесной объемной плотности потока внутренней энергии J_k^{ε} и объемной плотности потока тепла J_k^q, т.е.

$$J_k = J_k^{\varepsilon} + J_k^q = \rho \upsilon_i m_k H_i - \rho \upsilon_k m_j H_j + J_k^q. \quad (18)$$

Далее преобразуем уравнение (13), заменив P_{ij} тензором напряжений Π_{ij}. В результате уравнение локального баланса импульса примет вид

$$\begin{gathered} \rho \frac{d\upsilon_i}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\rho m_j \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial m_i}\right)\right] - \\ - H_i \frac{\partial (\rho m_i)}{\partial x_j} - \frac{\partial \pi_{ij}}{\partial x_j}. \end{gathered} \quad (19)$$

Преобразуем также уравнение (14) путем замены J_k^{ε} на объемную плотность потока внутренней энергии, определенную уравнением (18). В результате уравнение локального баланса внутренней энергии примет вид

$$\rho\frac{d\varepsilon}{dt}=-p\frac{\partial\upsilon_i}{\partial x_j}+\rho m_j\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial m_i}\right)\frac{\partial\upsilon_i}{\partial x_j}+\pi_{ij}\frac{\partial\upsilon_i}{\partial x_j}+$$
$$+H_i\frac{\partial(\rho m_i)}{\partial t}+\upsilon_i H_i\frac{\partial(\rho m_j)}{\partial x_j}+\frac{\partial}{\partial x_k}(\rho\upsilon_k m_j H_j)-\tag{20}$$
$$-\frac{\partial}{\partial x_k}(\rho\upsilon_i m_k H_i)-\frac{\partial J_k^q}{\partial x_k}.$$

Заменим левую часть этого уравнения правой частью уравнения (15) и после простых преобразований получим

$$\rho T\frac{ds}{dt}+\frac{\partial J_k^q}{\partial x_k}=-\rho H_i^{eq}\frac{\partial m_i}{\partial t}-\rho\upsilon_j H_i^{eq}\frac{\partial m_j}{\partial x_j}+$$
$$+\rho m_j H_i^{eq}\frac{\partial\upsilon_i}{\partial x_j}+\pi_{ij}\frac{\partial\upsilon_i}{\partial x_j}+H_i\frac{\partial(\rho m_i)}{\partial t}+$$
$$+H_j\frac{\partial}{\partial x_k}(\rho m_j\upsilon_k H_j)-\rho m_k H_i\frac{\partial\upsilon_i}{\partial x_k}.$$

В этом уравнении обозначали производную $\frac{\partial\varepsilon}{\partial m_i}$ через H_i^{eq} в соответствии с определением (6). В окончательном виде это уравнение представим так

$$\rho T\frac{ds}{dt}+\frac{\partial J_k^q}{\partial x_k}=\rho\left(H_i-H_i^{eq}\right)\times$$
$$\times\left(\frac{\partial m_i}{\partial t}+\upsilon_j\frac{\partial m_i}{\partial x_j}-m_j\frac{\partial\upsilon_i}{\partial x_j}\right)+\pi_{ij}\frac{\partial\upsilon_i}{\partial x_j}.$$

Для невязкой и нетеплопроводящей магнитной жидкости это уравнение упрощается к виду

$$T\frac{ds}{dt}=\left(H_i-H_i^{eq}\right)\left(\frac{\partial m_i}{\partial t}+\upsilon_j\frac{\partial m_i}{\partial x_j}-m_j\frac{\partial\upsilon_i}{\partial x_j}\right).\tag{21}$$

Следовательно, в ФГД имеется два предельных случая, в которых невязкую и нетеплопроводную магнитную жидкость можно рассматривать как идеальную.

Первый случай соответствует ФГД с равновесной намагниченностью, когда выполняется условие магнитного равновесия $H_i-H_i^{eq}=0$, т.е. время релаксации напряженности магнитного поля к равновесному значению бесконечно мало. Второй случай реализуется, если выполняется равенство

$$\frac{\partial m_i}{\partial t}+\upsilon_j\frac{\partial m_i}{\partial x_j}-m_j\frac{\partial\upsilon_i}{\partial x_j}=0,$$

из которого и следует искомое уравнение вмороженности удельной намагниченности в сплошную среду

$$\frac{\partial m}{\partial t}=(\vec m\cdot\nabla)\vec\upsilon.$$

В работе [6] были получены уравнения ФГД с вмороженной намагниченностью, которая вводилась из физических соображений. Теория распространения волн малой амплитуды в рамках ФГД с вмороженной намагниченностью была построена в [7]. Гидродинамическими модами магнитной жидкости с вмороженной намагниченностью являются быстрая и медленная магнитозвуковые волны и волна альфвеновского типа, которая подобна волне Альфвена, распространяющейся в жидкости с бесконечной проводимостью при наличии внешнего магнитного поля, но в магнитной жидкости в волне альфвеновского типа колеблется намагниченность. Как показано в обзоре [8], только в рамках теории [7] можно описать существующие экспериментальные результаты по анизотропии скорости ультразвука в магнитных жидкостях на различной основе. Связь ФГД с вмороженной намагниченностью с существующими теориями была показана в [9].

Автор глубоко благодарен академику А.С. Сигову за ценные замечания по рукописи статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Rosensweig R.E.* Ferrohydrodynamics. Massachusetts: Courier Corporation, 2013. 368 p.
2. *Neuringer J.L., Rosensweig R.E.* // Phys. Fluids. 1964. V. 7. P. 1927.
3. *Sokolov V.V., Tolmachev V.V.* // Magnetohydrodynamics. 1996. V. 32. P. 313.
4. *Толмачев В.В., Головин А.М., Потапов В.С.* Термодинамика и электродинамика сплошной среды. М.: МГУ, 1988.
5. *Felderhof B.U.* // Phys. Rev. E. 2000. V. 62. P. 3848.
6. *Sokolov V.V., Tolmachev V.V.* // Magnetohydrodynamics. 1996. V. 32. P. 318.
7. *Sokolov V.V., Tolmachev V.V.* // Acoust. Phys. 1997. V. 43. P. 92.
8. *Sokolov V.V.* // Acoust. Phys. 2010. V. 56. P. 972.
9. *Felderhof B.U., Sokolov V.V., Eminov P.A.* // J. Chem. Phys. 2010. V. 132. Art. № 184907.