ИЗВЕСТИЯ РАН. СЕРИЯ ФИЗИЧЕСКАЯ, 2019, том 83, № 7, с. 885–887

УДК 537.634:532.529.6

НАМАГНИЧИВАНИЕ И ДЕФОРМАЦИЯ КАПЛИ МАГНИТНОЙ ЖИДКОСТИ В ПЕРЕМЕННОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

А. Н. Тятюшкин*

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования “Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова”, Научно-исследовательский институт механики, Москва, Россия

**E-mail: tan@imec.msu.ru*

Поступила в редакцию 07.09.2018 г.
После доработки 31.01.2019 г.
Принята к публикации 27.03.2019 г.

Теоретически исследуются намагничивание и малые установившиеся деформационные колебания капли магнитной жидкости в переменном магнитном поле. Капля взвешена в несмешивающейся с ней другой магнитной жидкости. Изменение магнитного поля настолько медленное, что могут быть использованы приближение квазистационарного магнитного поля и приближение квазиустановившегося течения.

DOI: 10.1134/S0367676519070408

Переменное магнитное поле, приложенное к капле магнитной жидкости, взвешенной в обычной жидкости, или к капле обычной жидкости, взвешенной в магнитной жидкости, вызывает намагничивание магнитной жидкости, сопровождающееся деформацией капли и движением жидкости внутри и вне капли. Исследование этого явления представляет интерес с точки зрения приложения к активации движения жидкостей в различных устройствах, в том числе использующихся в микрофлюидике. Кроме того, изучение этого явления представляет интерес с точки зрения фундаментальной науки.

Результаты экспериментального исследования поведения капель магнитной жидкости в переменных магнитных полях представлены в ряде работ (см. [1] и цитируемые там работы). Изучалось также поведение в переменном магнитном поле капель обычной жидкости, взвешенных в магнитной жидкости [2].

Для теоретического описания поведения капли магнитной жидкости в переменном магнитном поле использовались модели, основанные на довольно сильных допущениях о форме капли и течениях внутри и вне ее [1]. Цель данной работы — решить задачу о форме капли и течении без использования подобных допущений. В рамках такого подхода форма капли, магнитное поле и течение определяются при помощи асимптотических методов из системы уравнений и граничных условий, определяющих магнитное поле и течение. При этом для того, чтобы асимптотические методы можно было применять, деформации капли считаются малыми.

Рассмотрим каплю несжимаемой вязкой магнитной жидкости, взвешенную в несмешивающейся с ней несжимаемой вязкой магнитной жидкости, к которой приложено однородное переменное магнитное поле напряженностью $\vec{H}_a$. Будем считать жидкости достаточно вязкими, чтобы выполнялось приближение малых чисел Рейнольдса, а их коэффициенты электропроводности достаточно малыми, чтобы выполнялось приближение феррогидродинамики [3]. Изменения магнитного поля — настолько медленные, что можно использовать приближение квазистационарного поля и приближение квазиустановившегося течения. Пусть η_i, μ_i, η_e и μ_e — коэффициенты вязкости и магнитные проницаемости жидкости капли и окружающей ее жидкости соответственно. Будем считать поверхностное натяжение границы раздела жидкостей σ_s достаточно большим, чтобы деформации капли можно было считать малыми. Пусть a — радиус недеформированной капли.

Система уравнений, позволяющая найти напряженность магнитного поля, скорость и давление как функции радиус-вектора и времени при сделанных выше предположениях, состоит из уравнения неразрывности для несжимаемой жидкости, уравнения движения в приближении малых чисел Рейнольдса, уравнений Максвелла в квазистационарном приближении и приближении феррогидродинамики и материального соотношения, связывающего магнитные величины в среде.

Граничные условия на границе раздела жидкостей включают в себя условия непроницаемости и непроскальзывания, условие для скачка нормальной составляющей вектора напряжений, условие непрерывности его тангенциальной составляющей, условие непрерывности тангенциальной составляющей напряженности магнитного поля и условие непрерывности нормальной составляющей магнитной индукции. Кроме того, скорость, давление и напряженность магнитного поля должны удовлетворять граничным условиям на бесконечности и условиям ограниченности.

Для решения задачи используются представление магнитного поля в виде мультипольного разложения [4] и общее решение Лэмба [5], выраженное через неприводимые тензоры. При таком подходе напряженность магнитного поля, скорость и давление ищутся в виде рядов со скалярными, векторными и тензорными коэффициентами, для которых получаются соотношения, позволяющие определить эти коэффициенты. С использованием этих соотношений коэффициенты ищутся в виде асимптотических разложений по параметру

$$\alpha = \frac{9a\mu_e H_{am}^2}{32\pi\sigma_s},$$

малость которого обеспечивает малость деформаций капли. Здесь H_{am} – максимальное значение модуля напряженности приложенного поля.

Скорость течения и давление в нем, напряженность магнитного поля и форма капли ищутся с точностью до членов второго порядка по α.

С точностью до членов первого порядка в колеблющемся магнитном поле с напряженностью $\vec{H}_a = H_{am}\cos(\omega t)\vec{k}$, где t – время, ω – угловая частота, $\vec{k}$ – некоторый единичный вектор, поверхность капли представляет собой вытянутый эллипсоид вращения с осью, направленной вдоль вектора $\vec{k}$, и с полуосями a_1, a_2 и a_3, которые зависят от времени следующим образом

$$a_1 = a_2 = \\ = a\left\{1 - \frac{\alpha}{6}\left(\frac{\mu_i - \mu_e}{\mu_i + 2\mu_e}\right)^2\left[1 + \frac{\cos(2\omega t - 2\phi)}{\sqrt{1 + 4\tau^2\omega^2}}\right]\right\},$$

$$a_3 = a\left\{1 + \frac{\alpha}{3}\left(\frac{\mu_i - \mu_e}{\mu_i + 2\mu_e}\right)^2\left[1 + \frac{\cos(2\omega t - 2\phi)}{\sqrt{1 + 4\tau^2\omega^2}}\right]\right\},$$

где

$$\tau = \frac{(16\eta_e + 19\eta_i)(3\eta_e + 2\eta_i)}{10(\eta_e + \eta_i)^2}\frac{a(\eta_e + \eta_i)}{4\sigma_s},$$

$$\phi = \frac{\arctan(2\tau\omega)}{2}.$$

Таким образом, капля совершает деформационные колебания с угловой частотой 2ω и запаздыванием по фазе 2ϕ. При $\omega \to \infty$ капля стремится принять форму неизменяющегося вытянутого эллипсоида вращения.

Во вращающемся магнитном поле с напряженностью $\vec{H}_a = H_{am}\left[\cos(\omega t)\vec{i} + \sin(\omega t)\vec{j}\right]$ с точностью до членов первого порядка капля принимает форму эллипсоида общего вида с полуосями

$$a_1 = a\left[1 - \frac{\alpha}{3}\left(\frac{\mu_i - \mu_e}{\mu_i + 2\mu_e}\right)^2\right],$$

$$a_2 = a\left[1 + \frac{\alpha}{6}\left(\frac{\mu_i - \mu_e}{\mu_i + 2\mu_e}\right)^2\left(1 - \frac{3}{\sqrt{1 + 4\tau^2\omega^2}}\right)\right],$$

$$a_3 = a\left[1 + \frac{\alpha}{6}\left(\frac{\mu_i - \mu_e}{\mu_i + 2\mu_e}\right)^2\left(1 + \frac{3}{\sqrt{1 + 4\tau^2\omega^2}}\right)\right].$$

Эллипсоид вращается вокруг своей малой оси, направленной вдоль $\vec{k} = \vec{i} \times \vec{j}$, с угловой скоростью ω так, что его большая ось отстает от $\vec{H}_a$ на угол ϕ. Здесь $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$ образуют тройку ортонормальных векторов. При $\omega \to \infty$ капля стремится принять форму неизменяющегося сплюснутого эллипсоида вращения.

В основном приближении, т.е. при $\alpha \to 0$, капля обладает лишь дипольным магнитным моментом. В первом приближении по α капля приобретает некоторую поправку к дипольному моменту и октупольный магнитный момент.

Отметим, что с точностью до членов первого порядка во вращающемся магнитном поле частицы жидкости совершают колебательные движения, т.е. жидкость не совершает вращение вокруг оси, проходящей через центр капли.

С точностью до членов второго порядка вращающееся магнитное поле вызывает вращение жидкости внутри и вне капли. Вращательные составляющие поправок второго порядка к скорости жидкости внутри и вне капли в точке с радиус-вектором $\vec{r}$, отложенным от центра недеформированной капли, имеют вид

$$\vec{v}_{i2} = \vec{\Omega}_i \times \vec{r},$$

$$\vec{v}_{e2} = \frac{a^3\vec{\Omega}_e \times \vec{r}}{r^3},$$

где

$$\vec{\Omega}_i = \alpha^2 \frac{38\eta_e^2 + 112\eta_i\eta_e + 95\eta_i^2}{100(\eta_e + \eta_i)\eta_e} \times$$

$$\times \left(\frac{\mu_i - \mu_e}{\mu_i + 2\mu_e}\right)^4 \frac{\omega\vec{k}}{1 + 4\tau^2\omega^2},$$

$$\vec{\Omega}_e = \alpha^2 \frac{(16\eta_e + 19\eta_i)(5\eta_e + 2\eta_i)}{100(\eta_e + \eta_i)\eta_e} \times$$

$$\times \left(\frac{\mu_i - \mu_e}{\mu_i + 2\mu_e}\right)^4 \frac{\omega\vec{k}}{1 + 4\tau^2\omega^2}.$$

При $\omega = 1/(2\tau)$ Ω_i и Ω_e принимают максимальные значения. Таким образом, при такой угловой частоте приложенного вращающегося магнитного поля имеет место наиболее эффективное вращение жидкости магнитным полем.

Частично поддержано проектами РФФИ № 19-01-00056 и № 17-01-00037.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lebedev A.V., Engel A., Morozov K.I., Bauke H.* // New J. Phys. 2003. V. 5. Art. № 57.
2. *Диканский Ю.И., Закинян А.Р.* // ЖТФ. 2010. Т. 80. № 8. С. 8.
3. *Розенцвейг Р.* Феррогидродинамика. М.: Мир, 1989. 357 с.
4. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория поля. М.: Наука, 1988. 509 с.
5. *Лэмб Г.* Гидродинамика. М.–Л.: ОГИЗ, 1947. 928 с.