

УДК 004.94:519.63

ВЛИЯНИЕ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ НА СОБСТВЕННЫЕ ЧАСТОТЫ РЕЗОНАТОРА ВОЛНОВОГО ТВЕРДОТЕЛЬНОГО ГИРОСКОПА

© 2019 г. И. Л. Батаронов^{1, *}, Г. Е. Шунин¹, С. А. Кострюков¹, В. В. Пешков¹, С. В. Писарев¹

¹Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
“Воронежский государственный технический университет”, Воронеж, Россия

*E-mail: vmfmm@mail.ru

Поступила в редакцию 12.11.2018 г.

После доработки 29.03.2019 г.

Принята к публикации 27.05.2019 г.

Методом конечных элементов решена краевая задача на собственные значения уравнений электроупругости, описывающие колебания цилиндрического резонатора волнового твердотельного гироскопа. Определены первые десять собственных частот резонатора при разных граничных условиях для случая, когда в качестве пьезоэлектрических преобразователей для раскачки и съема сигнала используется керамика PZT-4.

DOI: 10.1134/S0367676519090023

ВВЕДЕНИЕ

Волновые твердотельные гироскопы (ВТГ) — это перспективные устройства навигационной техники, не имеющие вращающихся частей, и характеризующиеся долговечностью работы, малыми массо-габаритными параметрами и энергопотреблением, слабой чувствительностью к вибрациям и перегрузкам [1]. Их точность определяется оптимальным выбором конструкции чувствительного элемента, возможностями технологии его изготовления и электроникой. Оптимизация осуществляется путем натурального и математического моделирования. Важно отметить, что эффективность математического моделирования зависит от полноты математической модели ВТГ, выбранного численного метода и возможностей вычислительной техники. Математические модели ВТГ, построенные на основе теории упругости тонких осесимметричных оболочек, достаточно хорошо описывают поведение полусферического ВТГ и позволяют аналитическими методами исследовать влияние дефектов массы и формы на его параметры и характеристики, а также разработать алгоритмы его балансировки. Однако в случае цилиндрического ВТГ с более сложной формой подвеса резонатора и использующего пьезоэлектрические преобразователи для раскачки и съема сигнала, аналитические методы теряют свою эффективность. Необходим численный анализ математических моделей ВТГ. Так, в работах [2, 3] методом конечных элементов были рассчитаны формы и частоты собственных колебаний цилиндрических резонаторов ВТГ, а также термоупру-

гие потери в них. Следует отметить, что собственные частоты резонатора в этих работах рассчитывались без учета влияния пьезоэлементов. Учет этого влияния, как и в случае пьезоэлектрических вибрационных гироскопов [4], может быть осуществлен на основе математических моделей теории электроупругости [5, 6] с помощью конечно-элементного анализа.

Целью данной работы является моделирование влияния пьезоэлектрических элементов из керамики PZT-4 на спектр собственных частот резонатора ВТГ и расчет коэффициента электромеханической связи, определяющего эффективность работы прямых и обратных электромеханических преобразователей на основе пьезокерамики.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Для нахождения собственных частот и форм колебаний резонатора ВТГ решается краевая задача для уравнений электроупругости [5, 6]:

$$-\rho\omega^2\vec{u} - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0, \quad \nabla \cdot \vec{D} = 0, \quad \nabla \times \vec{E} = 0.$$

Используются линейные материальные соотношения для электроупругой среды:

$$\boldsymbol{s} = \boldsymbol{c} : \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{d}^* \cdot \vec{E},$$

$$\vec{D} = \boldsymbol{d} : \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\epsilon} \cdot \vec{E}, \quad \boldsymbol{s} = \frac{1}{2}(\nabla\vec{u} + (\nabla\vec{u})^*).$$

Электрическое поле выражается через скалярный потенциал ϕ :

$$\vec{E} = -\nabla\phi.$$

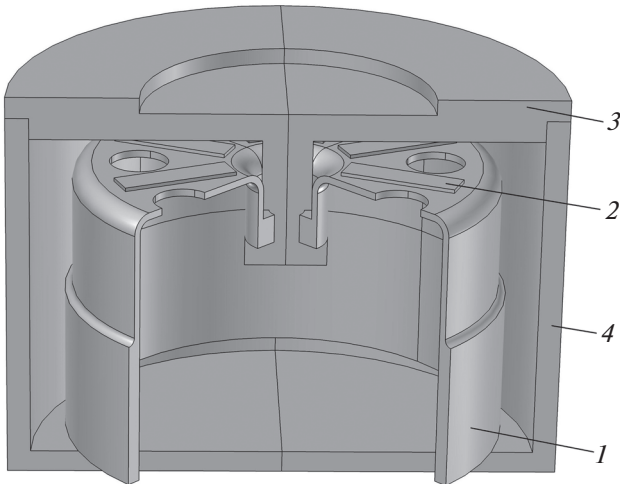


Рис. 1. Вид упрощенной геометрической модели датчика ВТГ с отверстиями в дне резонатора (в разрезе): 1 – резонатор, 2 – пьезоэлемент, 3 – основание, 4 – крышка.

Граничные условия на соответствующих частях границы области решения задачи могут быть

$$\begin{aligned} \vec{u} &= 0, \quad \boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{n} = 0, \quad \vec{n} \cdot \vec{D} = 0, \\ \varphi &= 0, \quad \int_{\partial S} \vec{n} \cdot \vec{D} dS = 0 \text{ при } \varphi = C. \end{aligned}$$

Здесь $\omega = 2\pi f$, f – собственная частота, ρ – плотность материала, $\boldsymbol{\sigma}$ – тензор напряжений второго ранга, \vec{D} – вектор индукции электрического поля, \vec{E} – вектор напряженности электрического поля, \mathbf{c} – тензор модулей податливости 4-го ранга, \mathbf{s} – тензорное поле деформаций 2-го ранга, \mathbf{d} – тензор пьезоэлектрических модулей 3-го ранга, $\boldsymbol{\epsilon}$ – тензор диэлектрической проницаемости материала 2-го ранга, \vec{u} – векторное поле смещений, \vec{n} – единичный вектор нормали к границе области решения задачи, C – неизвестная постоянная, определяемая в результате решения задачи. Символ * означает операцию перестановки двух индексов в тензоре.

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ И ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Для численного решения рассмотренной краевой задачи методом конечных элементов используется интегрированная система компьютерного моделирования физико-механических процессов в ВТГ [7], программная среда которой состоит из универсальной системы компьютерной математики Maple 14 [8], конечно-элементной системы Comsol Multiphysics 4.2 [9], конечно-элементных комплексов программ Elmer [10] и FEMPDSEolver [11].

В качестве прототипа для вычислительных экспериментов была взята конструктивная схема ВТГ, выпускаемых фирмой Innalabs (Ireland) [12]. Упрощенная для расчетов геометрическая мо-

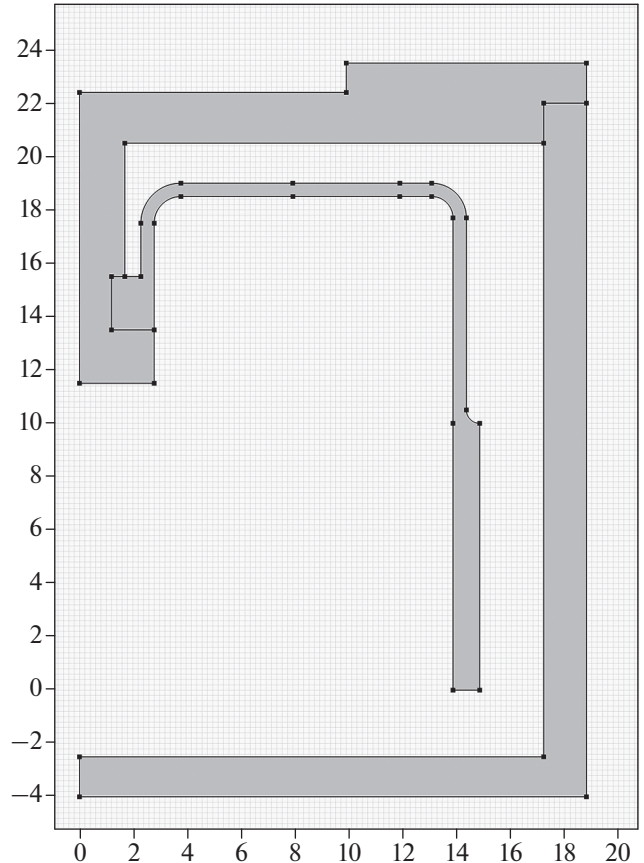


Рис. 2. Геометрия модели датчика ВТГ в сечении, проходящем через ось симметрии и центр одного из отверстий в донной части резонатора (размеры в мм).

дель датчика ВТГ представлена на рис. 1. Предполагается, что корпус и цилиндрический резонатор датчика изготовлен из стали марки 12X18H10T (плотность – $7900 \text{ кг} \cdot \text{м}^{-3}$, модуль Юнга – $198 \cdot 10^9 \text{ Па}$, коэффициент Пуассона – 0.3). Восемь пьезоэлементов размером $8 \times 2 \times 0.25 \text{ мм}^3$ из керамики PZT-4 (плотность $7500 \text{ кг} \cdot \text{м}^{-3}$; ненулевые элементы матриц: модулей податливости $C_{11} = C_{22} = 12.3 \cdot 10^{-12} \text{ Па}^{-1}$, $C_{33} = 15.5 \cdot 10^{-12} \text{ Па}^{-1}$, $C_{12} = C_{21} = -4.05 \cdot 10^{-12} \text{ Па}^{-1}$, $C_{13} = C_{31} = C_{23} = C_{32} = -5.31 \cdot 10^{-12} \text{ Па}^{-1}$, $C_{44} = C_{55} = 39 \cdot 10^{-12} \text{ Па}^{-1}$, $C_{66} = 32.7 \cdot 10^{-12} \text{ Па}^{-1}$; пьезоэлектрических модулей $D_{31} = D_{32} = -123 \cdot 10^{-12} \text{ Кл} \cdot \text{Н}^{-1}$, $D_{33} = 289 \cdot 10^{-12} \text{ Кл} \cdot \text{Н}^{-1}$, $D_{24} = D_{15} = 496 \cdot 10^{-12} \text{ Кл} \cdot \text{Н}^{-1}$; относительной диэлектрической проницаемости $\epsilon_{r11} = \epsilon_{r22} = 1475$, $\epsilon_{r33} = 1300$) [13], с электродированными верхними и нижними гранями, наклеены на резонатор, как показано на рис. 1. Геометрический центр пьезоэлементов располагается на расстоянии 8.2 мм от оси симметрии датчика. Используемые в расчетах размеры конструктивных элементов датчика могут быть определены из рис. 2.

Область датчика разбивается на тетраэдральные конечные элементы 2-го порядка (число конечных

Таблица 1. Собственные частоты резонатора ВТГ

Моды	f_0	f_r	f_a	$f_a - f_r$	k_e
1	536.504	536.743	538.027	1.284	0.069
2	536.508	536.747	538.030	1.283	0.069
3	1234.405	1234.406	1234.406	0	0
4	1388.128	1388.970	1390.070	1.1	0.040
5	3414.170	3414.199	3414.430	0.231	0.012
6	3414.175	3414.203	3414.432	0.229	0.012
7	7055.275	7055.398	7056.033	0.635	0.013
8	7057.775	7057.898	7058.533	0.635	0.013
9	8961.151	8961.170	8961.282	0.112	0.005
10	8961.158	8961.178	8961.289	0.111	0.005

элементов – 322836, число степеней свободы – 1548552, среднее качество элементов 0.74).

В результате проведенных вычислительных экспериментов определены формы и собственные частоты первых десяти колебательных мод цилиндрического резонатора ВТГ.

Формы колебательных мод такие же, что и приведенные в работе [3], поэтому здесь не показаны.

В табл. 1 представлены результаты расчетов собственных частот резонатора при разных граничных условиях на металлизированных поверхностях пьезоэлементов. Так, собственные частоты f_0 рассчитывались при жестком закреплении $\vec{u} = 0$ дна и условии $\sigma \cdot \vec{n} = 0$ на остальной поверхности датчика ВТГ без учета пьезоэлектрических модулей. Собственные частоты f_r и f_a также рассчитывались при тех же граничных условиях, но с учетом пьезоэлектрических модулей. Резонансная частота f_r определялась при заданном нулевом потенциале на всех электродированных гранях пьезоэлементов, а антирезонансная частота f_a находилась при заданном нулевом потенциале только на нижних гранях пьезоэлементов, тогда как на верхних гранях задавались граничные условия $\int_{\partial S} \vec{n} \cdot \vec{D} dS = 0$ при $\varphi = C$. На боковых гранях пьезоэлементов в обоих случаях задавалось граничное условие $\vec{n} \cdot \vec{D} = 0$.

Из сравнения данных, представленных в таблице, видно, что учет влияния пьезоэлементов заметно изменяет собственные частоты относительно частот, рассчитанных в пренебрежении пьезоэлектрическими модулями. По аналогии с отдельным пьезоэлементом можно ввести коэффициент электромеханической связи $k_e = (1 - (f_r/f_a)^2)^{1/2}$. Он позволяет оценить эффективность перекачки механической энергии в электрическую и наоборот на различных собственных частотах резонатора. Так, величина выходного электрического сигнала с пьезоэлементов, связанного с колебательными модами 1 и 2, будет ориентировочно в 7 раз больше сигнала от колебательных мод 5 и 6. Аксиальная крутильная мода 3 резонатора вообще не вносит вклад в выходной сигнал.

В заключение следует отметить, что теоретически частоты мод 1 и 2 для идеально сбалансированного резонатора должны совпадать. Они описывают колебания резонатора маятникового типа в двух взаимно перпендикулярных направлениях. Это справедливо и для мод 5 и 6, которые описывают колебания резонатора квадрупольного типа, повернутые относительно друг друга на 45° , являющимися, как известно, рабочими для ВТГ [1]. Несовпадение рассчитанных частот (в третьем знаке после запятой) связано с погрешностями конечно-элементного анализа. Так как выходной сигнал с пьезоэлементов связанный с модами 1 и 2 превышает выходной сигнал от рабочих мод 5 и 6, то при разработке высокоточных ВТГ необходимо принимать конструктивные меры, не допускающие возбуждения по сути дела паразитных мод 1 и 2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Луни Б.С., Матвеев В.А., Басараб М.А. Волновой твердотельный гироскоп. Теория и технология. М.: Радиотехника, 2014. 176 с.
2. Матвеев В.А., Басараб М.А., Луни Б.С. и др. // Вестник РФФИ. 2015. № 3 (87). С. 84.
3. Батаронов И.Л., Шуни Г.Е., Кострюков С.А. и др. // Физ.-мат. моделирование систем: материалы XVIII межд. семинара. (Воронеж, 2018). Ч. 2. С. 174.
4. Наседкин А.В., Шпрайзер Е.И. // Вестник Пермского нац. иссл. политех. ун-та. Механика. 2016. № 4. С. 275.
5. Партон В.З., Кудрявцев Б.А. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и проводящих тел. М.: Наука, 1988. 472 с.
6. Наседкин А.В., Наседкина А.А. Конечно-элементное моделирование связанных задач. Ростов-на-Дону: ЮФУ. 2015. 178 с.
7. Батаронов И.Л., Шуни Г.Е., Кострюков С.А. и др. // Физ.-мат. моделирование систем: материалы XIX межд. семинара. (Воронеж, 2018). С. 162.
8. <http://www.maplesoft.com>.
9. <http://www.comsol.com>.
10. <https://www.csc.fi/web/elmer>.
11. Кострюков С.А., Пешков В.В., Шуни Г.Е. и др. // Сист. упр. и инф. технологии. 2010. № 4(42). С. 52.
12. Chikovani V.V., Okon I.M., Barabashov A.S. et al. // Proc. IEEE/ION PLANS 2008. (Monterey, 2008). P. 238.
13. <http://www.efunda.com/materials>.