ИЗВЕСТИЯ РАН. СЕРИЯ ФИЗИЧЕСКАЯ, 2019, том 83, № 9, с. 1282–1287

УДК 530.145.63

СУПЕРАЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ФОРМА УРАВНЕНИЯ ДИРАКА

© 2019 г. В. В. Монахов*

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования “Санкт-Петербургский государственный университет”, Санкт-Петербург, Россия

**E-mail: v.v.monahov@spbu.ru*

Поступила в редакцию 12.11.2018 г.
После доработки 08.04.2019 г.
Принята к публикации 27.05.2019 г.

На основе суперагебраического представления спиноров и матриц Дирака построена теория спиноров, в которой нет необходимости использовать нормализацию операторов, и которая автоматически является вторично квантованной. Операторы рождения–уничтожения спиноров построены с помощью интегралов от плотностей грассмановых переменных в импульсном пространстве и производных по ним. Выведены формулы для суперагебраических билинейных ковариантов, лагранжиана фермионного поля и нётеровских токов.

DOI: 10.1134/S0367676519090175

ВВЕДЕНИЕ

Уравнение Дирака [1], предложенное в 1928 году, является основой теорий с участием фермионов. В квантово-полевом рассмотрении его решения приходится трактовать в формализме вторичного квантования, который для систем фермионов был предложен в 1928 году Вигнером и Иорданом [2] и доработан в 1934 году Гейзенбергом [3]. Современная формулировка метода, основанная на суперагебраическом подходе, и его математический аппарат даны в работах Березина [4, 5].

В методе вторичного квантования решение уравнения Дирака при использовании гамма-матриц в представлении Дирака записывается в виде [6, 7]:

$$\Psi(t,x) = \\ = \int \frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi)^3}}\sqrt{\frac{m}{2E}}\left(a_\alpha(p)u^\alpha e^{-ip_\mu x^\mu} + a_\tau^+(p)v^\tau e^{ip_\mu x^\mu}\right), \qquad (1)$$

где $t = x^0$, x означает x^1, x^2, x^3, $\alpha = 1,2$; $\tau = 3,4$, $E = p_0$ и считается $p_0 > 0$, а по повторяющимся индексам подразумевается суммирование.

В (1) $\Psi(t,x)$ – оператор поля фермиона в точке x пространства-времени, $a_1^+(p)$ – оператор рождения фермиона с 4-импульсом p и спином вверх, $a_1(p)$ – оператор уничтожения такого фермиона, $a_3^+(p)$ – оператор рождения антифермиона с 4-импульсом p и спином вверх, $a_3(p)$ – оператор уничтожения такого антифермиона. Для индексов 2 и 4 – то же для состояний со спином вниз [7].

Эрмитово-сопряженное решение [7] записывается в виде:

$$\Psi(t,x)^+ = \int \frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi)^3}}\sqrt{\frac{m}{2E}} \times \\ \times \left(a_\alpha{}^+(p)\bar{u}^\alpha\gamma^0 e^{-ip_\mu x^\mu} + a_\tau(p)\bar{v}^\tau\gamma^0 e^{ip_\mu x^\mu}\right). \qquad (2)$$

В (1) и (2) $u^\alpha(p)$ – базисные спиноры, соответствующие положительно-частотным решениям с заданным импульсом p_μ, $v^\tau(p)$ – базисные спиноры, соответствующие отрицательно-частотным решениям, $\bar{u}^\alpha = (u^\alpha)^+\gamma^0$ и $\bar{v}^\tau = (v^\tau)^+\gamma^0$ – соответствующие им сопряженные спиноры.

Вторичное квантование, то есть разложения (1) и (2), получается заменой числовых коэффициентов $b_\alpha(p), b_\alpha{}^+(p), d_\tau(p), d_\tau(p)^+$ в решении уравнения Дирака на операторнозначные [7].

1. СУПЕРАЛГЕБРАИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СПИНОРОВ, МАТРИЦ ДИРАКА И УРАВНЕНИЯ ДИРАКА

В работах [8, 9] автором предложено суперагебраическое представление спиноров и матриц Дирака. В нем спиноры являются алгебраическими объектами, представляющими собой суперпозицию грассмановых переменных, а матрицы Дирака выражаются через эти грассмановы переменные и производные по ним. Линейные преобразования грассмановых переменных порождают преобразования Лоренца [4]. Недостаток данного подхода в том, что он не согласовался с разложением (2) вторичного квантования. В работе [10] автор построил суперáлгебраическое представление спиноров, лишенное данного недостатка. Оно является фермионным аналогом представления Баргмана—Фока для бозонов и основано на использовании грассмановых переменных, являющихся плотностями в пространстве импульсов, и производных по этим переменным. Суперáлгебраическим аналогом гамма-матриц Дирака являются коммутаторы

$$\hat{\gamma}^{\eta} = [\tilde{\gamma}^{\eta}, *], \tag{3}$$

где * означает, что на это место следует поставить величину, стоящую справа, на которую действует данный оператор, а величины $\tilde{\gamma}^{\eta}$ заданы как

$$\begin{gathered}
\tilde{\gamma}^{0} = \int d^{3}p\left(-\theta^{1}(p)\frac{\partial}{\partial\theta^{1}(p)} - \theta^{2}(p)\frac{\partial}{\partial\theta^{2}(p)} - \right.\\
\left. - \theta^{3}(p)\frac{\partial}{\partial\theta^{3}(p)} - \theta^{4}(p)\frac{\partial}{\partial\theta^{4}(p)}\right),\\
\tilde{\gamma}^{1} = \int d^{3}p \times\\
\times\left(\frac{\partial}{\partial\theta^{2}(p)}\frac{\partial}{\partial\theta^{3}(p)} + \frac{\partial}{\partial\theta^{1}(p)}\frac{\partial}{\partial\theta^{4}(p)} - \right.\\
\left. - \theta^{3}(p)\theta^{2}(p) - \theta^{4}(p)\theta^{1}(p)\right),\\
\tilde{\gamma}^{2} = i\int d^{3}p \times\\
\times\left(\frac{\partial}{\partial\theta^{2}(p)}\frac{\partial}{\partial\theta^{3}(p)} - \frac{\partial}{\partial\theta^{1}(p)}\frac{\partial}{\partial\theta^{4}(p)} + \right.\\
\left. + \theta^{3}(p)\theta^{2}(p) - \theta^{4}(p)\theta^{1}(p)\right),\\
\tilde{\gamma}^{3} = \int d^{3}p \times\\
\times\left(\frac{\partial}{\partial\theta^{1}(p)}\frac{\partial}{\partial\theta^{3}(p)} - \frac{\partial}{\partial\theta^{2}(p)}\frac{\partial}{\partial\theta^{4}(p)} - \theta^{3}(p)\theta^{1}(p) + \right.\\
\left. + \theta^{4}(p)\theta^{2}(p)\right), \quad \tilde{\gamma}^{5} = \int d^{3}p\left(\frac{\partial}{\partial\theta^{1}(p)}\frac{\partial}{\partial\theta^{3}(p)} + \right.\\
\left. + \frac{\partial}{\partial\theta^{2}(p)}\frac{\partial}{\partial\theta^{4}(p)} + \theta^{3}(p)\theta^{1}(p) + \theta^{4}(p)\theta^{2}(p)\right).
\end{gathered} \tag{4}$$

Наличие коммутатора в определении гамма-матриц в (3) и других операторов, действующих на спиноры, приводит к тому, что в теории не появляются бесконечные постоянные суммы, и поэтому теория не требует нормализации операторов [10].

Оператор

$$\Psi(p) = \psi_{\alpha}(p)\frac{\partial}{\partial\theta^{\alpha}(p)} + \psi_{\tau}(p)\theta^{\tau}(p), \tag{5}$$

где $u_{\alpha}(p)$ и $v_{\tau}(p)$ числовые множители, переводится в эрмитово-сопряженный [10] по правилу (6):

$$\Psi^{+}(p) = \psi^{*}_{\alpha}(p)\theta^{\alpha}(p) + \psi^{*}_{\tau}(p)\frac{\partial}{\partial\theta^{\tau}(p)}. \tag{6}$$

Преобразования Лоренца строятся обычным образом с помощью гамма-матриц (3) и могут рассматриваться как преобразования Боголюбова операторов рождения—уничтожения.

Для оператора Ψ спинора в суперáлгебраическом представлении уравнение Дирака приобретает вид

$$i\hat{\gamma}^{\mu}\partial_{\mu}\Psi = m\Psi. \tag{7}$$

Введем дираковски-сопряженный оператор

$$\overline{\Psi} = (\hat{\gamma}^{0}\Psi)^{+} = -\hat{\gamma}^{0}\Psi^{+}. \tag{8}$$

Сделаем эрмитово сопряжение (7) и домножим на $-\hat{\gamma}^{0}$. С учетом (8) и того, что $\hat{\gamma}^{0}(\hat{\gamma}^{\mu})^{+} = \hat{\gamma}^{\mu}\hat{\gamma}^{0}$, получим (9):

$$i\hat{\gamma}^{\mu}\partial_{\mu}\overline{\Psi} = m\overline{\Psi}. \tag{9}$$

Решения уравнений (7) и (9) могут быть записаны в виде

$$\Psi(t,x) = \int\frac{d^{3}p}{\sqrt{(2\pi)^{3}}}\left(\lambda_{\alpha}b_{\alpha}(p)e^{-ip_{\mu}x^{\mu}} + \lambda_{\tau}\overline{d}_{\tau}(p)e^{ip_{\mu}x^{\mu}}\right), \tag{10}$$

$$\overline{\Psi}(t,x) = \int\frac{d^{3}p}{\sqrt{(2\pi)^{3}}}\left(-\lambda^{*}_{\tau}d_{\tau}(p)e^{-ip_{\mu}x^{\mu}} + \lambda^{*}_{\alpha}\overline{b}_{\alpha}(p)e^{ip_{\mu}x^{\mu}}\right). \tag{11}$$

В формулах (10), (11) λ_{α} и λ_{τ} — константы (возможно, зависящие от p), операторы $b_{\alpha}(p)$ и $d_{\tau}(p)$ получены лоренцевыми вращениями величин $\frac{\partial}{\partial\theta^{\alpha}(0)}$ и $\frac{\partial}{\partial\theta^{\tau}(0)}$, а операторы $\overline{b}_{\alpha}(p)$ и $\overline{d}_{\tau}(p)$ получены лоренцевыми вращениями из величин $\theta^{\alpha}(0)$ и $\theta^{\tau}(0)$.

Величины $b_{\alpha}(p)$, $d_{\tau}(p)$ и их дираковски-сопряженные $\overline{b}_{\alpha}(p)$ и $\overline{d}_{\tau}(p)$ обладают антикоммутационными соотношениями (12) операторов рождения и уничтожения

$$\begin{gathered}
\{b_{\alpha}(p), \overline{b}_{\beta}(p')\} = \delta(p - p')\delta^{\alpha}_{\beta},\\
\{d_{\tau}(p), \overline{d}_{\rho}(p')\} = \delta(p - p')\delta^{\tau}_{\rho},\\
\{b_{\alpha}(p), b_{\beta}(p')\} = \{d_{\tau}(p), d_{\rho}(p')\} = 0,\\
\{b_{\alpha}(p), d_{\rho}(p')\} = \{b_{\alpha}(p), \overline{d}_{\rho}(p')\} = 0.
\end{gathered} \tag{12}$$

Пусть у нас имеются величина $\Psi(p)$ из (6) и $\Phi(p)$, задаваемая выражением (13)

$$\Phi(p) = \phi_{\beta}(p)\frac{\partial}{\partial\theta^{\beta}(p)} + \phi_{\rho}(p)\theta^{\rho}(p), \tag{13}$$

Скалярное произведение $\Psi(p')$ и $\Phi(p)$ в суперальгебраическом представлении задается антикоммутатором (14):

$$(\Psi(p'),\Phi(p)) = \{\Psi^+(p'),\Phi(p)\} = \\ = \delta(p - p')(\psi_\beta(p)^*\phi_\beta(p) + \psi_\rho(p)^*\phi_\rho(p)). \tag{14}$$

Очевидно выполнение всех свойств скалярного произведения.

2. СВЯЗЬ ОПЕРАТОРОВ РОЖДЕНИЯ И УНИЧТОЖЕНИЯ С ГРАССМАНОВЫМИ ПЛОТНОСТЯМИ

Рассмотрим преобразование решений уравнения Дирака в суперальгебраической форме более подробно на примере буста на угол ϕ в плоскости $\hat{\gamma}^0\hat{\gamma}^1$. Пусть в состоянии покоя, то есть для $p = 0$, имеются базисные спиноры

$$\Psi_1(0) = \frac{\partial}{\partial\theta^1(0)},\quad \Psi_2(0) = \frac{\partial}{\partial\theta^2(0)}, \\ \Psi_3(0) = \theta^3(0),\quad \Psi_4(0) = \theta^4(0). \tag{15}$$

Тогда после буста на угол ϕ в плоскости $\hat{\gamma}^0\hat{\gamma}^1$

$$\begin{gathered} \Psi_1(p_1) = b_1(p_1) = \cosh\frac{\phi}{2}\frac{\partial}{\partial\theta^1(p_1)} + \sinh\frac{\phi}{2}\theta^4(p_1), \\ \Psi_2(p_1) = b_2(p_1) = \cosh\frac{\phi}{2}\frac{\partial}{\partial\theta^2(p_1)} + \sinh\frac{\phi}{2}\theta^3(p_1), \\ \Psi_3(p_1) = \bar{d}_3(p_1) = \cosh\frac{\phi}{2}\theta^3(p_1) + \sinh\frac{\phi}{2}\frac{\partial}{\partial\theta^2(p_1)}, \\ \Psi_4(p_1) = \bar{d}_4(p_1) = \cosh\frac{\phi}{2}\theta^4(p_1) + \sinh\frac{\phi}{2}\frac{\partial}{\partial\theta^1(p_1)}. \end{gathered} \tag{16}$$

При этом множитель $e^{-ip_0x^0}$ переходит в $e^{-ip_\mu x^\mu}$, а $e^{ip_0x^0}$ в $e^{ip_\mu x^\mu}$.

Уравнения (16) можно переписать в виде

$$\begin{gathered} \Psi_1(p_1) = u_1^1(p_1)\frac{\partial}{\partial\theta^1(p_1)} + u_2^1\frac{\partial}{\partial\theta^2(p_1)} + \\ + u_3^1\theta^3(p_1) + u_4^1(p_1)\theta^4(p_1),\quad \Psi_2(p_1) = u_1^2\frac{\partial}{\partial\theta^1(p_1)} + \\ + u_2^2(p_1)\frac{\partial}{\partial\theta^2(p_1)} + u_3^2(p_1)\theta^3(p_1) + u_4^2\theta^4(p_1), \\ \Psi_3(p_1) = v_1^3\frac{\partial}{\partial\theta^1(p_1)} + v_2^3(p_1)\frac{\partial}{\partial\theta^2(p_1)} + \\ + v_3^3(p_1)\theta^3(p_1) + v_4^3\theta^4(p_1),\quad \Psi_4(p_1) = v_1^4(p_1)\frac{\partial}{\partial\theta^1(p_1)} + \\ + v_2^4\frac{\partial}{\partial\theta^2(p_1)} + v_3^4\theta^3(p_1) + v_4^4(p_1)\theta^4(p_1), \end{gathered} \tag{17}$$

при этом

$$\begin{gathered} u_2^1 = u_3^1 = u_1^2 = u_4^2 = v_1^3 = v_4^3 = v_2^4 = v_3^4 = 0, \\ u_1^1(p_1) = u_2^2(p_1) = v_3^3(p_1) = v_4^4(p_1) = \cosh\frac{\phi}{2}, \\ u_4^1(p_1) = u_3^2(p_1) = v_2^3(p_1) = v_1^4(p_1) = \sinh\frac{\phi}{2}. \end{gathered} \tag{18}$$

Сравнивая (10) с (1) с учетом (17), (18) и законом преобразования входящих в (1) спиноров u^α и v^τ [7], получаем, что компоненты u^α и v^τ в (17) преобразуются таким же образом. Если считать, согласно [10], что выполняется соответствие (19)

$$\begin{gathered} \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \cong \frac{\partial}{\partial\theta^1(p)},\ \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} \cong \frac{\partial}{\partial\theta^2(p)},\ \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} \cong \theta^3(p), \\ \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \cong \theta^4(p),\ (1,0,0,0) \cong \theta^1(p),\ (0,1,0,0) \cong \theta^2(p), \\ (0,0,1,0) \cong \frac{\partial}{\partial\theta^3(p)},\ (0,0,0,1) \cong \frac{\partial}{\partial\theta^4(p)}, \end{gathered} \tag{19}$$

то (10) можно переписать в виде

$$\Psi(t,x) = \int\frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi)^3}}\sqrt{\frac{m}{2E}}\times \\ \times\left(a_\alpha(p)u^\alpha(p)e^{-ip_\mu x^\mu} + a_\tau(p)^+v^\tau(p)e^{ip_\mu x^\mu}\right), \tag{20}$$

где $a_k(p) = \frac{\partial}{\partial\theta^k(p)}$, $a_k(p)^+ = \theta^k(p)$. Таким образом, в (20) мы получаем полный аналог обычной формулы вторичного квантования для фермионов. В ней роль операторов рождения выполняют грассмановы плотности $\theta^k(p)$, а роль операторов уничтожения – производные $\frac{\partial}{\partial\theta^k(p)}$ по этим плотностям. При этом обычная схема является упрощенным вариантом суперальгебраической, так как в ней отсутствует зависимость образующих (матричных столбцов и строк) от импульса.

3. БИЛИНЕЙНЫЕ КОВАРИАНТЫ

Рассмотрим для произвольных спиноров Ψ и Φ пассивные преобразования Лоренца билинейных ковариантов $\left(\hat{\gamma}^0\Psi_1',\Psi_2'\right)$, $\left(\hat{\gamma}^0\Psi_1',\hat{\gamma}^{\mu'}\Psi_2'\right)$, $\left(\hat{\gamma}^0\Psi_1',\hat{\gamma}^{\mu'}\hat{\gamma}^{\nu'}\Psi_2'\right)$, и т.д. В них используется скалярное произведение суперальгебраических спиноров (14). Штрихами, как и ранее, отмечены величины, которые относятся к движущейся системе отсчета, а $\hat{\gamma}^0$ относится к собственной системе покоя спинора. Поскольку преобразование Лоренца, связанное с переходом к движущейся системе отсчета, это пассивное преобразование, оно не меняет алгебраические ковариантные величины. Поэтому

$$\begin{gathered}\Psi' = \Psi, \quad \hat{\gamma}^{\mu}{}'a'_{\mu} = \hat{\gamma}^{\mu}a_{\mu}, \\ \hat{\gamma}^{\mu}{}'\hat{\gamma}^{\nu}{}'a'_{\mu\nu} = \hat{\gamma}^{\mu}\hat{\gamma}^{\nu}a_{\mu\nu}, \ \ldots, \end{gathered} \tag{21}$$

где Ψ – произвольный спинор, a_{μ} – ковариантные компоненты произвольного вектора, $a_{\mu\nu}$ – ковариантные компоненты произвольного тензора второго ранга, и т.д.

Из (21) сразу следует, что $\left\{\bar{\Psi}'_1, \Psi'_2\right\} = \{\bar{\Psi}_1, \Psi_2\}$. То есть $\left(\hat{\gamma}^0\Psi'_1, \Psi'_2\right) = (\hat{\gamma}^0\Psi_1, \Psi_2)$, и величина $(\hat{\gamma}^0\Psi_1, \Psi_2) = \{\bar{\Psi}_1, \Psi_2\}$ является скаляром.

Для выяснения закона преобразования других билинейных ковариантов сначала рассмотрим закон преобразования гамма-матриц. Контравариантные компоненты a^{μ} произвольного вектора a при пассивном преобразовании Лоренца преобразуются как $a'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu}a^{\nu}$, а ковариантные как $a'_{\mu} = (\Lambda^{-1})^{\nu}_{\mu}a_{\nu}$. Поскольку при таком преобразовании $\hat{\gamma}^{\mu}{}'a'_{\mu} = \hat{\gamma}^{\mu}a_{\mu}$, получаем $\hat{\gamma}^{\nu}{}'(\Lambda^{-1})^{\mu}_{\nu}a_{\mu} = \hat{\gamma}^{\mu}a_{\mu}$. В силу произвольности a_{μ} получаем $\hat{\gamma}^{\mu} = (\Lambda^{-1})^{\mu}_{\nu}\hat{\gamma}^{\nu}{}'$. Отсюда $\hat{\gamma}^{\mu}{}' = \Lambda^{\mu}_{\nu}\hat{\gamma}^{\nu}$. То есть $\hat{\gamma}^{\mu}$ преобразуется как контравариантная величина, что совпадает с обычной формулой теории Дирака. Поэтому $\hat{\gamma}^{\mu_1}{}'\hat{\gamma}^{\mu_2}{}'\ldots\hat{\gamma}^{\mu_k}{}' = \Lambda^{\mu_1}_{\nu_1}\hat{\gamma}^{\nu_1}\Lambda^{\mu_2}_{\nu_2}\hat{\gamma}^{\nu_2}\ldots\Lambda^{\mu_k}_{\nu_k}\hat{\gamma}^{\nu_k}$. Отсюда сразу получаем

$$\begin{gathered}\left(\hat{\gamma}^0\Psi'_1, \hat{\gamma}^{\mu_1}{}'\hat{\gamma}^{\mu_2}{}'\ldots\hat{\gamma}^{\mu_k}{}'\Psi'_2\right) = \\ = \Lambda^{\mu_1}_{\nu_1}\Lambda^{\mu_2}_{\nu_2}\ldots\Lambda^{\mu_k}_{\nu_k}(\hat{\gamma}^0\Psi_1, \hat{\gamma}^{\nu_1}\hat{\gamma}^{\nu_2}\ldots\hat{\gamma}^{\nu_k}\Psi_2). \end{gathered} \tag{22}$$

Формула (22) совпадает с обычной формулой для билинейных ковариантов [6, 7]. Необходимо отметить, что если бы в скалярное произведение (14) входила величина Ψ', а не $\hat{\gamma}^0\Psi'$, в антикоммутаторе вместо лоренц-ковариантной величины $\bar{\Psi}'$ присутствовала бы нековариантная величина $\Psi^{+}{}'$, и проведенные рассуждения были бы некорректны.

4. ПЛОТНОСТЬ ЛАГРАНЖИАНА И НЁТЕРОВСКИЕ ТОКИ

Совершенно аналогично тому, как это сделано в [7] в матричном формализме, но только с использованием скалярного произведения спиноров (14), исходя из супералгебраического уравнения Дирака при отсутствии электромагнитного поля (7), можно построить плотность лагранжиана.

Величины $\Psi(x)$ раскладываются по спинорному базису $\frac{\partial}{\partial\theta^1(p)}, \frac{\partial}{\partial\theta^2(p)}, \theta^3(p), \theta^4(p)$ (по всем значениям p), а величины $\bar{\Psi}(x)$ раскладываются по линейно независимому от него спинорному базису $\theta^1(p), \theta^2(p), \frac{\partial}{\partial\theta^3(p)}, \frac{\partial}{\partial\theta^4(p)}$ (по всем значениям p). Поэтому они являются линейно независимыми, и их вариации $\delta\Psi(x)$ и $\delta\bar{\Psi}(x)$ можно рассматривать как независимые. Для построения вариации δS действия S при изменении величины $\bar{\Psi}(x)$ без изменения $\Psi(x)$ возьмем антикоммутатор уравнения Дирака с вариацией $\delta\bar{\Psi}(x)$ и проинтегрируем по всему объему V пространства, а также по времени от момента t_1 до момента t_2:

$$\begin{gathered}\delta S = \int\limits_{t1}^{t2} dt \int\limits_{V} d^3x\{\delta\bar{\Psi}(x), (i\hat{\gamma}^{\mu}\partial_{\mu} - m)\Psi(x)\} = \\ = \delta\int\limits_{t1}^{t2} dt \int\limits_{V} d^3x\,\{\bar{\Psi}(x), (i\hat{\gamma}^{\mu}\partial_{\mu} - m)\Psi(x)\}. \end{gathered}$$

Таким образом,

$$L(x) = \{\bar{\Psi}(x), (i\hat{\gamma}^{\mu}\partial_{\mu} - m)\Psi(x)\}. \tag{23}$$

Или, что то же,

$$L(x) = (\hat{\gamma}^0\Psi(x), (i\hat{\gamma}^{\mu}\partial_{\mu} - m)\Psi(x)). \tag{24}$$

По виду выражение (24) совпадает с аналогичным выражением $L(x)$ в матричном формализме [7] при его записи через скалярное произведение.

Покажем, что из (23) следует супералгебраическое уравнение Дирака. Из стационарности действия

$$\delta S = \int\limits_{t1}^{t2} dt \int d^3x\delta L(x) = 0,$$

следует

$$\begin{gathered}\int\limits_{t1}^{t2} dt \int d^3x(\{\delta\bar{\Psi}(x), \ (i\hat{\gamma}^{\mu}\partial_{\mu} - m)\Psi(x)\} + \\ + \{\bar{\Psi}(x), (i\hat{\gamma}^{\mu}\partial_{\mu} - m)\delta\Psi(x)\}) = 0. \end{gathered} \tag{25}$$

Из (25) благодаря независимости и произвольности вариаций получаем

$$\int\limits_{t1}^{t2} dt \int d^3x\{\delta\bar{\Psi}(x), \ (i\hat{\gamma}^{\mu}\partial_{\mu} - m)\Psi(x)\} = 0. \tag{26}$$

$$\int\limits_{t1}^{t2} dt \int d^3x\{\bar{\Psi}(x), \ (i\hat{\gamma}^{\mu}\partial_{\mu} - m)\delta\Psi(x)\} = 0. \tag{27}$$

Из (27) благодаря произвольности $\delta\bar{\Psi}(x)$ следует $\{\delta\bar{\Psi}(x),\ (i\hat{\gamma}^{\mu}\partial_{\mu} - m)\Psi(x)\} = 0$, и в силу произвольности вариации $\delta\bar{\Psi}(x)$ и свойств скалярного произведения получаем

$$(i\hat{\gamma}^{\mu}\partial_{\mu} - m)\Psi(x) = 0,$$

то есть уравнение Дирака (7). Это естественно, так как мы вводили плотность лагранжиана так, чтобы из его вариации получить данное уравнение. А вот уравнение (9) получается без такого намеренного выбора. Из (27) следует

$$\int_{t1}^{t2} dt \int d^3x \left(\hat{\gamma}^0\Psi(x), (i\hat{\gamma}^{\mu}\partial_{\mu} - m)\delta\Psi(x)\right) = 0,$$

поэтому, перенося с эрмитовым сопряжением оператор $(i\hat{\gamma}^{\mu}\partial_{\mu} - m)$ в левую часть скалярного произведения, получаем

$$\int_{t1}^{t2} dt \int d^3x \left((i\hat{\gamma}^{\mu+}\partial_{\mu} - m)\hat{\gamma}^0\Psi(x), \delta\Psi(x)\right) = 0.$$

При выводе этой формулы мы учли, что вариация $\delta\Psi(x)$ обнуляется в точках t_1 и t_2, и что значения $\Psi(x)$ на бесконечно удаленной границе пространства равны нулю, из-за чего производные ∂_{μ} при интегрировании по частям меняют знак.

Меняя местами $i\hat{\gamma}^{\mu+}\partial_{\mu} - m$ с $\hat{\gamma}^0$, получаем

$$\int_{t1}^{t2} dt \int d^3x(\hat{\gamma}^0(i\hat{\gamma}^{\mu}\partial_{\mu} - m)\Psi(x), \delta\Psi(x)) = 0.$$

В силу произвольности вариации $\delta\Psi(x)$ из этого следует

$$\hat{\gamma}^0(i\hat{\gamma}^{\mu}\partial_{\mu} - m)\Psi(x) = 0,$$

откуда опять получаем уравнение Дирака (7):

$$(i\hat{\gamma}^{\mu}\partial_{\mu} - m)\Psi(x) = 0.$$

Таким образом, уравнения, получаемые на основе плотности лагранжиана (23), (24), совместны и являются одним и тем же суперaлгебраическим уравнением Дирака для спинора. Уравнение Дирака для антиспинора получается с помощью дираковского сопряжения уравнения Дирака для спинора – они эквивалентны.

К плотности лагранжиана можно добавить величину, являющуюся четырехмерной дивергенцией, так как она не меняет динамические уравнения. Если к плотности лагранжиана (23) прибавить добавку

$$\begin{gathered}\Delta L(x) = \{i\hat{\gamma}^{\mu}\partial_{\mu}\bar{\Psi}(x), \Psi(x)\} - \{\bar{\Psi}(x), i\hat{\gamma}^{\mu}\partial_{\mu}\Psi(x)\} = \\ = -i(\hat{\gamma}^0\partial_{\mu}\Psi(x), \hat{\gamma}^{\mu}\Psi(x)) - i(\hat{\gamma}^0\Psi(x), \hat{\gamma}^{\mu}\partial_{\mu}\Psi(x)),\end{gathered} \qquad (28)$$

являющуюся четырехмерной дивергенцией, можно получить плотность лагранжиана

$$L_2(x) = L(x) + \Delta L(x) = \{(i\hat{\gamma}^{\mu}\partial_{\mu} - m)\bar{\Psi}(x), \Psi(x)\}, \qquad (29)$$

из которой при вариации по $\Psi(x)$ сразу следует уравнение Дирака для антиспинора. Если же добавка равна $L_3(x) = L(x) + \frac{1}{2}\Delta L(x)$, мы получим еще одну эквивалентную плотность лагранжиана, в которую $\bar{\Psi}(x)$ и $\Psi(x)$ входят симметричным образом:

$$\begin{gathered}L_3(x) = \frac{1}{2}\{i\hat{\gamma}^{\mu}\partial_{\mu}\bar{\Psi}(x), \Psi(x)\} + \\ + \frac{1}{2}\{\bar{\Psi}(x), i\hat{\gamma}^{\mu}\partial_{\mu}\Psi(x)\} - m\{\bar{\Psi}(x), \Psi(x)\}.\end{gathered} \qquad (30)$$

Плотность лагранжиана (30) является аналогом соответствующей матричной [7]

$$\begin{gathered}L_{3\text{матр}}(x) = \frac{i}{2}[\bar{\Psi}(x)\hat{\gamma}^{\mu}\partial_{\mu}\Psi(x) - \\ - \partial_{\mu}\bar{\Psi}(x)\hat{\gamma}^{\mu}\Psi(x)] - m\bar{\Psi}(x)\Psi(x).\end{gathered} \qquad (31)$$

Однако в суперaлгебраическом варианте (34), в отличие от (31), алгебраическая симметрия $\bar{\Psi}(x)$ и $\Psi(x)$ видна явным образом.

5. НЁТЕРОВСКИЕ ТОКИ И ОПЕРАТОР СОХРАНЯЮЩЕГОСЯ ЗАРЯДА

Разделим обе части суперaлгебраической формы уравнения Дирака (7) на i:

$$\hat{\gamma}^{\mu}\partial_{\mu}\Psi = -im\Psi, \qquad (32)$$

Возьмем эрмитово сопряжение от (32) и умножим обе части на $-\hat{\gamma}^0$:

$$(-\hat{\gamma}^0)(\hat{\gamma}^{\mu}\partial_{\mu}\Psi)^+ = im(-\hat{\gamma}^0)\Psi^+. \qquad (33)$$

В соответствии с (3), $(\hat{\gamma}^0\Phi)^+ = -\hat{\gamma}^0\Phi^+$ для произвольного Φ, поэтому из (37) следует

$$(\hat{\gamma}^0\hat{\gamma}^{\mu}\partial_{\mu}\Psi)^+ = im(\hat{\gamma}^0\Psi)^+. \qquad (34)$$

Возьмем антикоммутатор обеих частей (32) с $\bar{\Psi}$ и обеих частей (34) с Ψ:

$$\begin{gathered}\{\bar{\Psi}, \hat{\gamma}^{\mu}\partial_{\mu}\Psi\} = -im\{\bar{\Psi}, \Psi\}, \\ \{(\hat{\gamma}^0\hat{\gamma}^{\mu}\partial_{\mu}\Psi)^+, \Psi\} = im\{\bar{\Psi}, \Psi\}.\end{gathered} \qquad (35)$$

Сложим уравнения (35). Учтем, что $\{\bar{\Psi}, \hat{\gamma}^{\mu}\partial_{\mu}\Psi\} = (\hat{\gamma}^0\Psi, \hat{\gamma}^{\mu}\partial_{\mu}\Psi)$ и $\{(\hat{\gamma}^0\hat{\gamma}^{\mu}\partial_{\mu}\Psi)^+, \Psi\} = (\hat{\gamma}^0\hat{\gamma}^{\mu}\partial_{\mu}\Psi, \Psi) = (\hat{\gamma}^{\mu+}\hat{\gamma}^0\partial_{\mu}\Psi, \Psi) = (\hat{\gamma}^0\partial_{\mu}\Psi, \hat{\gamma}^{\mu}\Psi)$, в результате чего получим $(\hat{\gamma}^0\Psi, \hat{\gamma}^{\mu}\partial_{\mu}\Psi) + (\hat{\gamma}^0\partial_{\mu}\Psi, \hat{\gamma}^{\mu}\Psi) = 0$, т.е.

$$\partial_{\mu}(\hat{\gamma}^0\Psi, \hat{\gamma}^{\mu}\Psi) = \partial_{\mu}\{\bar{\Psi}, \hat{\gamma}^{\mu}\Psi\} = 0. \qquad (36)$$

Получаем, что в (36) фигурирует ток $j^\mu = (\hat{\gamma}^0\Psi, \hat{\gamma}^\mu\Psi)$, четырехмерная дивергенция которого равна нулю, т.е. ток сохраняющегося “заряда”:

$$\partial_\mu j^\mu = 0. \tag{37}$$

Последний является током плотности вероятности [7], а сам “заряд” $\int_V d^3x j^0 = \int_V d^3x\{\Psi^+, \Psi\} = 1$ – это единичная вероятность найти частицу во всем пространстве.

Ток j^μ известен как нётеровский и связан с инвариантностью лагранжиана к преобразованию $\Psi(x) \to e^{i\alpha}\Psi(x)$ [6]. Однако $e^{i\alpha}$ не может служить оператором, так как $\bar{\Psi}$ преобразуется путем умножения на другую величину, на $e^{-i\alpha}$. Введем оператор заряда

$$\begin{aligned}\hat{Q} = \int d^3p\big[b_1(p)\bar{b}_1(p) + b_2(p)\bar{b}_2(p) - \\ - d_3(p)\bar{d}_3(p) - d_4(p)\bar{d}_4(p), *\big].\end{aligned} \tag{38}$$

Видна единая супер態алгебраическая природа заряда, задаваемого выражением (38), и матриц Дирака, задаваемых выражением (4). Выражение (38) аналогично формуле для заряда, выраженного через операторы рождения–уничтожения [6, 7], в обычном методе вторичного квантования, но не содержит расходимостей и не нуждается в нормализации.

Легко проверяется, что $\hat{Q}\Psi = q\Psi$ и $\hat{Q}\bar{\Psi} = -q\bar{\Psi}$, где $q = 1$, и что на векторах состояния он инвариантен при лоренцевских вращениях. Лагранжиан инвариантен к преобразованию $\Psi(x) \to e^{i\alpha\hat{Q}}\Psi(x)$ и соответствующему ему преобразованию $\bar{\Psi}(x) \to e^{i\alpha\hat{Q}}\bar{\Psi}(x)$, и мы получим ток сохраняющегося заряда, который можно трактовать как “электрический”. Если параметр преобразования α зависит от x, обычным образом [11] вводится поле $A_\mu(x)$, и уравнение Дирака преобразуется к виду:

$$\hat{\gamma}^\mu(i\partial_\mu - \hat{Q}A_\mu)\Psi = m\Psi, \quad \hat{\gamma}^\mu(i\partial_\mu - \hat{Q}A_\mu)\bar{\Psi} = m\bar{\Psi}, \tag{39}$$

или, при записи через собственные числа оператора $\hat{Q}$,

$$\hat{\gamma}^\mu(i\partial_\mu - qA_\mu)\Psi = m\Psi, \quad \hat{\gamma}^\mu(i\partial_\mu + qA_\mu)\bar{\Psi} = m\bar{\Psi}. \tag{40}$$

Из (40) видно, что спинор и дираковски-сопряженный к нему имеют противоположный заряд, который можно трактовать как электрический.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, построена теория спиноров, которая сразу является вторично квантованной и не требует нормализации операторов. Она расширяет теорию Дирака, обеспечивая существование операторов спиноров и дираковски-сопряженных спиноров в одном пространстве, что естественно в формализме вторичного квантования. Показано наличие оператора заряда, который имеет ту же супералгебраическую природу, что и матрицы Дирака.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Дирак П.А.М.* // УФН. 1979. Т. 129. № 4. С. 681; *Dirac P.A.M.* // Sov. Phys. Usp. 1979. V. 22. P. 648.
2. *Jordan P., Wigner E.* // Z. Physik. 1928. V. 47. P. 631.
3. *Heisenberg W.* // Z. Physik. 1934. V. 90. P. 209.
4. *Березин Ф.А.* Метод вторичного квантования. М.: Наука, 1965. 236 с.
5. *Berezin F.A.* Introduction to superanalysis. Dordrecht, 1987. 257 p.
6. *Пескин М.Е., Шрёдер Д.В.* Введение в квантовую теорию поля. Ижевск: РХД, 2001. 784 с.
7. *Bjorken J.D., Drell S.D.* Relativistic quantum fields. McGraw-Hill Book Company, 1978. 295 p.
8. *Монахов В.В.* // ТМФ. 2016. Т. 186. С. 87; *Monakhov V.V.* // Theor. Math. Phys. 2016. V. 186. P. 70.
9. *Монахов В.В.* // Изв. РАН. Сер. физ. 2016. Т. 80. С. 1074; *Monakhov V.V.* // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2016. V. 80. P. 985.
10. *Monakhov V.V.* // J. Phys. Conf. Ser. 2018. V. 1051. Art. № 012023.
11. *Ченг Т.П., Ли Л.Ф.* Калибровочные теории элементарные частиц. М.: Мир, 1987. 624 с.