УЛК 535.8.517.958

# НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА ПРЕДЕЛЬНО КОРОТКИХ СОЛИТОНОВ ОБОБЩЕННОЙ РЕДУЦИРОВАННОЙ СИСТЕМЫ МАКСВЕЛЛА—БЛОХА

© 2020 г. С. В. Сазонов<sup>1, \*</sup>, Н. В. Устинов<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования "Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова", Москва, Россия

> \*E-mail: sazonov.sergey@gmail.com Поступила в редакцию 29.07.2019 г. После доработки 30.08.2019 г. Принята к публикации 27.09.2019 г.

Без использования приближения медленно меняющейся огибающей проведен учет влияния удаленных квантовых состояний на два выделенных атомных уровня при распространении в среде предельно коротких электромагнитных импульсов. Получено обобщение редуцированной системы Максвелла—Блоха, интегрируемое методом обратной задачи рассеяния. Найдены и исследованы его солитонные и бризерные решения.

#### **DOI:** 10.31857/S0367676520010287

#### **ВВЕДЕНИЕ**

Одной из тенденций развития лазерной физики является создание в лабораторных условиях оптических импульсов все более коротких длительностей [1—3]. К импульсам, длительность которых составляет порядка одного—двух периодов электромагнитных колебаний, уже неприменимо приближение медленно меняющихся огибающих (ММО). Точнее говоря, здесь даже нельзя говорить об огибающей импульса. В этом случае принято говорить о предельно коротких импульсах (ПКИ).

В работе [4] был, пожалуй, впервые совершен отказ от приближения ММО при альтернативном подходе к описанию явления самоиндуцированной прозрачности в двухуровневой среде. Вместо приближения ММО в [4] было предложено использовать приближение однонаправленного распространения, в котором предполагается, что концентрация *п* двухуровневых атомов мала. В результате авторы пришли к так называемой редуцированной системе уравнений Максвелла—Блоха (РМБ). Эта система оказалась интегрируемой методом обратной задачи рассеяния (МОЗР) [5—7].

К началу 90-х гг. прошлого столетия назрела необходимость в развитии теоретических методов нелинейной оптики ПКИ в связи с экспериментальными достижениями по их генерации. В работах [8, 9] для описания распространения малопериодного импульса в двухуровневой среде было

предложено использовать приближение внезапного возбуждения, основанное на условии

$$\omega_0 \tau_p \ll 1,$$
 (1)

где  $\omega_0$  — частота рассматриваемого квантового перехода,  $\tau_p$  — длительность импульса. При этом концентрация атомов не предполагалась малой. В результате исключения материальных переменных для интеграла по времени от электрического поля E импульса было получено знаменитое уравнение синус—Гордона, тоже интегрируемое в рамках MO3P [6].

Так как спектр ПКИ достаточно широк, во взаимодействие с ним могут вовлекаться много квантовых переходов. Как следствие, приближение двухуровневой среды теряет свою силу. В работах [10, 11] был проведен учет квантовых переходов с рассматриваемых двух уровней на вышележащие квантовые состояния. Эти состояния аппроксимировались двумя дополнительными уровнями с порядковыми номерами 3 и 4. При этом использовалось приближение оптической прозрачности, которое предполагает в рассматриваемом случае выполнение условий

$$\omega_{31}\tau_p \sim \omega_{42}\tau_p \gg 1, \tag{2}$$

где  $\omega_{31}$  и  $\omega_{42}$  — частоты переходов  $1 \leftrightarrow 3$  и  $2 \to 4$  соответственно.

На частоту выделенного перехода между состояниями с порядковыми номерами 1 и 2 накладывалось в [10, 11] условие (1) и, затем, применялось приближение внезапного возбуждения. В результате для интеграла по времени от поля импульса было получено обобщенное уравнение синус-Гордона, которое оказалось интегрируемым с помощью МОЗР [11].

Целью настоящей работы является поиск интегрируемого обобщения системы РМБ при исследовании распространения ПКИ в многоуровневой среде малой атомной концентрации без наложения условия (1).

#### ОБОБШЕННАЯ РЕДУЦИРОВАННАЯ СИСТЕМА МАКСВЕЛЛА-БЛОХА

Следуя [10, 11], будем рассматривать четырехуровневую среду. Предполагая концентрацию атомов малой [4], запишем волновое уравнение в редуцированном виде

$$\frac{\partial E}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t} = -\frac{2\pi}{c} \frac{\partial P}{\partial t},\tag{3}$$

где z — ось, вдоль которой распространяется импульс, c — скорость света в вакууме, t — время, P поляризационный отклик среды, определяемый через элементы  $\rho_{uv}$  матрицы плотности  $\hat{\rho}$  атома и дипольные моменты  $d_{\mu\nu}$ , которые соответствуют разрешенным переходам:

$$P = n[d_{21}(\rho_{21} + \rho_{21}^*) + d_{31}(\rho_{31} + \rho_{31}^*) + d_{42}(\rho_{42} + \rho_{42}^*)].$$

$$(4)$$

При этом материальные уравнения имеют вид

$$\frac{\partial \rho_{ml}}{\partial t} = -i\omega_{ml}\rho_{ml} + \frac{i}{\hbar}E[\hat{d},\hat{\rho}]_{ml}$$
 (5)

(m, l = 1, 2, 3, 4), где  $\omega_{ml}$  — частота перехода  $m \leftrightarrow l$ ,  $\hat{d}$  — матрица дипольного момента, выделяющая разрешенные квантовые переходы:

$$\hat{d} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & d_{42} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{31} \\ d_{42} & 0 & 0 & d_{21} \\ 0 & d_{31} & d_{32} & 0 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Системой (3)-(6) определяется исходная физическая модель.

В силу условия (2) в уравнениях (5) для элементов  $\rho_{31}$ ,  $\rho_{42}$ ,  $\rho_{32}$ ,  $\rho_{43}$  и  $\rho_{41}$  матрицы плотности пренебрежем левыми частями, т.е. положим  $\partial \rho_{31}/\partial t = \partial \rho_{42}/\partial t = \partial \rho_{32}/\partial t = \partial \rho_{43}/\partial t = \partial \rho_{41}/\partial t = 0.$ Тогда в предположении, что до импульсного воздействия состояния 3 и 4 не заселены, получим приближенно следующие выражения (подробности см. в [11]):

$$\rho_{31} = \frac{d_{31}E}{\hbar\omega_{31}}\rho_{11}, \quad \rho_{42} = \frac{d_{42}E}{\hbar\omega_{42}}\rho_{22}, \tag{7}$$

$$\rho_{32} = \frac{d_{31}E\rho_{21}^*}{\hbar\omega_{32}} \approx \frac{d_{31}E}{\hbar\omega_{31}}\rho_{21}^*, 
\rho_{41} = \frac{d_{42}E\rho_{21}}{\hbar\omega_{41}} \approx \frac{d_{42}E}{\hbar\omega_{42}}\rho_{21}.$$
(8)

В соотношениях (8) мы положили приближенно  $\omega_{32} \approx \omega_{31}$  и  $\omega_{41} \approx \omega_{42}$ .

Подставив (8) в уравнение (5) для  $\rho_{21}$ , найдем

$$\frac{\partial \rho_{21}}{\partial t} = -i \left[ \omega_{21} + \left( \frac{d_{31}^2}{\omega_{31}} - \frac{d_{42}^2}{\omega_{42}} \right) \frac{E^2}{\hbar^2} \right] \rho_{21} + i \frac{d_{21}}{\hbar} E(\rho_{11} - \rho_{22}).$$
(9)

После подстановки выражений (7) в (4) и в уравнение (5) для  $\rho_{11}$  имеем

$$P = n \left[ d_{21} \left( \rho_{21} + \rho_{21}^* \right) + \frac{2E}{\hbar} \left( \frac{d_{31}^2}{\omega_{31}} \rho_{11} + \frac{d_{42}^2}{\omega_{42}} \rho_{22} \right) \right], \quad (10)$$

$$\frac{\partial \rho_{11}}{\partial t} = -\frac{\partial \rho_{22}}{\partial t} = i \frac{d_{21}}{\hbar} E \left( \rho_{21} - \rho_{21}^* \right). \tag{11}$$

Отсюда следует, что в принятом приближении  $\rho_{11} + \rho_{22} = 1$ . Введя вещественные блоховские переменные  $W = (\rho_{22} - \rho_{11})/2$ ,  $U = (\rho_{21} + \rho_{21}^*)/2$  и

$$V = -i\left(\rho_{21}^* - \rho_{21}\right)/2$$
, из уравнений (9)—(11) и (3) получим следующую систему:

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = -\left(\omega_0 + \beta \Omega^2\right) V,\tag{12}$$

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} = \left(\omega_0 + \beta \Omega^2\right) U + \Omega W,\tag{13}$$

$$\frac{\partial W}{\partial \tau} = -\Omega V,\tag{14}$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial z} = -\alpha \frac{\partial}{\partial \tau} (U - 2\beta \Omega W). \tag{15}$$

Здесь использованы обозначения  $\tau = t - z/v_0$ ,  $\omega_0 \equiv \omega_{21}$ ,  $\Omega = 2d_{21}E/\hbar$ ; постоянные  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $v_0$  выражаются через физические параметры рассматриваемой задачи.

Положив  $\beta = 0$  в уравнениях (12)—(15), получим хорошо известную систему РМБ, справедливую для системы двухуровневых атомов. Ниже уравнения (12)-(15) будем называть обобщенной системой РМБ (ОРМБ). Подчеркнем, что дипольные моменты разрешенных квантовых переходов могут находиться в различных количественных отношениях друг с другом. Поэтому слагаемые в уравнениях (12), (13) и (15), учитывающие отклонение от модели двухуровневой среды, нельзя рассматривать как всего лишь малые поправки к системе РМБ.

# СТОЛКНОВЕНИЯ СОЛИТОНОВ И БРИЗЕРНЫЕ РЕШЕНИЯ

В работах [12–15] рассматривалась системы уравнений эквивалентные модифицированным уравнениям РМБ (МРМБ)

$$\frac{\partial U_0}{\partial T} = -2\omega_0 \sqrt{1 - \varepsilon^2 \Omega_0^2} V_0, \tag{16}$$

$$\frac{\partial V_0}{\partial T} = 2\omega_0 \sqrt{1 - \varepsilon^2 \Omega_0^2} U_0 + \Omega_0 W_0, \tag{17}$$

$$\frac{\partial W_0}{\partial T} = -\Omega_0 V_0,\tag{18}$$

$$\frac{\partial \Omega_0}{\partial Z} = -\frac{1}{\omega_0} \frac{\partial U_0}{\partial T}.$$
 (19)

Эти уравнения интегрируемы с помощью MO3P и описывают нелинейную динамику двух-компонентных электромагнитных и акустических ПКИ в анизотропных двухуровневых средах. Различные типы солитонных решений уравнений MPMБ были подробно исследованы [13—15].

Система ОРМБ (12)—(15) тоже оказалась интегрируемой в рамках МОЗР [16] и связана с уравнениями МРМБ (16)—(19) при выполнении условия  $\varepsilon = \sqrt{-\beta/\omega_0}$  посредством замены зависимых и независимых переменных  $(T, Z, \Omega_0, U_0, V_0, W_0) \rightarrow (\tau, z, \Omega, U, V, W)$ , где

$$d\tau = \left(1 + \sqrt{1 - \varepsilon^2 \Omega_0^2(T, Z)}\right) dT + 2\varepsilon^2 W_0 dZ,$$

$$dz = \frac{dZ}{\omega_0 \alpha}, \quad \Omega(\tau, z) = \frac{\Omega_0(T, Z)}{1 + \sqrt{1 - \varepsilon^2 \Omega_0^2(T, Z)}},$$

$$W(\tau, z) = W_0(T, Z), \quad U(\tau, z) = V_0(T, Z),$$

$$V(\tau, z) = -U_0(T, Z).$$
(20)

Эта связь позволяет получить решения системы ОРМБ (12)—(15), исходя из известных решений уравнений МРМБ. Рассмотрим различные случаи.

Случай 
$$\beta < -\frac{1}{4\omega_0}$$
.

Замена переменных (20) не позволяет здесь получить несингулярное решение системы ОРМБ, если использовать односолитонное решение уравнений МРМБ. Однако, к несингулярным решениям приводит бризерное решение уравнение МРМБ. Переменная  $\Omega_0$  этого решения записывается без потери общности в виде

$$\Omega_0 = \frac{1}{i\sigma} \frac{\partial}{\partial T} \lg \left| \frac{s_-}{s_+} \right|, \tag{21}$$

где

$$s_{\pm} = v_I \left[ r_+ \exp(-\theta_R) + r_- \exp(\theta_R) \right] \pm i v_R \left[ r_+ \exp(-i\theta_I) + r_- \exp(i\theta_I) \right],$$

$$r_{\pm} = \varepsilon(v_I - iv_R) \pm i\sigma,$$

$$\theta_R = 2v_R \left[ T - \frac{W_0^{(0)} \left( v_R^2 + v_I^2 + \omega_0^2 \right) Z}{v_R^4 + 2 \left( v_I^2 + \omega_0^2 \right) v_R^2 + \left( v_I^2 - \omega_0^2 \right)^2} \right],$$

$$\theta_{I} = 2v_{I} \left[ T + \frac{W_{0}^{(0)} \left( v_{R}^{2} + v_{I}^{2} - \omega_{0}^{2} \right) Z}{v_{R}^{4} + 2 \left( v_{I}^{2} + \omega_{0}^{2} \right) v_{R}^{2} + \left( v_{I}^{2} - \omega_{0}^{2} \right)^{2}} \right],$$

 $\sigma = \sqrt{1+4\beta\omega_0}/2$  ,  $\nu_R$  ,  $\nu_I$  и  $W_0^{(0)}$  — вещественные постоянные.

Подстановка выражения (21) в соотношения (20) дает неявное определение переменной  $\Omega$  бризерного решения системы OPMБ (12)—(15). При этом параметры  $V_R$  и  $V_I$  задают длительность и несущую частоту бризера. Если несущая частота велика, то полученный бризер похож на бризер системы PMБ. При уменьшении несущей частоты в центре бризера системы OPMБ возникает осцилляция заостренной формы, амплитуда которой существенно превышает амплитуды соседних осцилляций.

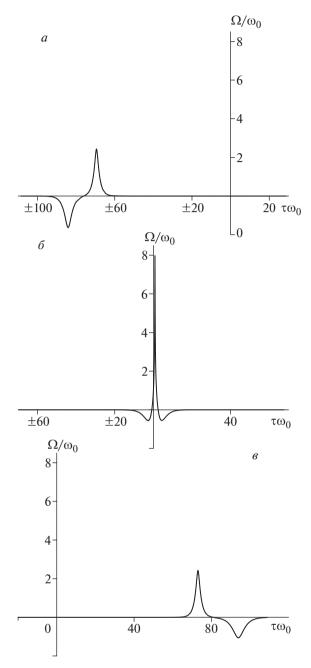
Случай 
$$-\frac{1}{4\omega_0} < \beta < 0$$
.

Выражение для переменной  $\Omega_0$  односолитонного решения уравнений MPMБ, позволяющее получить несингулярное решение системы OPMБ, имеет в рассматриваемом случае вид

$$\Omega_0 = \pm 2\sqrt{A} \frac{\operatorname{ch} \theta}{A \operatorname{ch}^2 \theta + \varepsilon^2},\tag{22}$$

где 
$$A = 1/(4v^2) - \varepsilon^2 \left(1 + \omega_0^2/v^2\right)$$
,  $\theta = 2v \left(T - W_0^{(0)}Z/(v^2 + \omega_0^2)\right)$ ,  $v$  — вещественная постоянная, удовлетворяющая условию  $|v| < |\sigma/\varepsilon|$ .

Подставив выражение (22) в формулы (20) получим неявное определение переменной  $\Omega$  односолитонного решения системы ОРМБ (12)—(15). Это решение является стационарным, и параметр V задает длительность солитона. В отличие от системы РМБ, амплитуда солитона не является обратно пропорциональной длительности и неограниченно растет при  $|V| \rightarrow |\sigma/\epsilon|$ .



**Рис. 1.** Профили переменной  $\Omega$  двухсолитонного решения с параметрами  $\beta=-1/8\omega_0$ ,  $W_0^{(0)}=-1/2$ ,  $v_1=0.65\omega_0$ ,  $v_2=0.5\omega_0$  и  $Z=90\omega_0$  (a),  $Z=-0.95\omega_0$  (б),  $Z=-90\omega_0$  (в).

Выражение для переменной  $\Omega_0$  двухсолитонного решения уравнений МРМБ записывается без потери общности следующим образом:

$$\Omega_{0} = \frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial T} \left( \operatorname{arctg} \frac{\mathbf{v}_{+} \operatorname{sh} \boldsymbol{\theta}_{-}}{\mathbf{v}_{-} \operatorname{sh} \boldsymbol{\theta}_{+}} + \right. \\
+ \operatorname{arctg} \frac{\mathbf{v}_{+} [\boldsymbol{\eta}_{-} \operatorname{sh} \boldsymbol{\theta}_{-} - 2\mathbf{v}_{-} \varepsilon \sigma \operatorname{ch} \boldsymbol{\theta}_{-}]}{\mathbf{v}_{-} [\boldsymbol{\eta}_{+} \operatorname{sh} \boldsymbol{\theta}_{+} - 2\mathbf{v}_{+} \varepsilon \sigma \operatorname{ch} \boldsymbol{\theta}_{+}]} \right), \tag{23}$$

где  $\mathbf{v}_{\pm}=(\mathbf{v}_1\pm\mathbf{v}_2)/2$ ,  $\mathbf{\theta}_{\pm}=(\mathbf{\theta}_1\pm\mathbf{\theta}_2)/2$ ,  $\mathbf{\eta}_{\pm}=\sigma^2\pm\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2\mathbf{\epsilon}^2$ ,  $\mathbf{v}_1$  и  $\mathbf{v}_2$  — вещественные постоянные такие, что  $|\mathbf{v}_{1,2}|<|\sigma/\epsilon|$ ,  $\mathbf{\theta}_{1,2}=2\mathbf{v}_{1,2}\left(T-W_0^{(0)}Z/\left(\mathbf{v}_{1,2}^2+\omega_0^2\right)\right)$ .

Подстановка выражения (23) в формулы (20) дает неявное определение переменной  $\Omega$  двухсолитонного решения системы ОРМБ (12)–(15). Это решение описывает упругое столкновение стационарных солитонов, рассмотренных выше. Интересные особенности возникают здесь при столкновении солитонов противоположных полярностей ( $v_1v_2 > 0$ ). Если абсолютная величина одного из параметров  $v_1$  или  $v_2$  близка к  $|\sigma/\sqrt{2\epsilon}|$ , то возникает короткоживущий импульс большой амплитуды, динамика которого похожа на динамику волны-убийцы [17] (см. рис. 1). Заметим, что в случае системы РМБ столкновение солитонов противоположных полярностей приводит к возникновению импульса, амплитуда которого равна сумме амплитуд сталкивающихся солитонов.

Выражение для переменной  $\Omega_0$  бризерного решения уравнений MPMБ здесь имеет вид

$$\Omega_{0} = \frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial T} \left( \arctan \frac{\mathbf{v}_{R} \sin \theta_{I}}{\mathbf{v}_{I} \cosh \theta_{R}} + \arctan \frac{\mathbf{v}_{R} [\tilde{\eta}_{-} \sin \theta_{I} - 2\mathbf{v}_{I} \epsilon \sigma \cos \theta_{I}]}{\mathbf{v}_{I} [\tilde{\eta}_{+} \cosh \theta_{R} - 2\mathbf{v}_{R} \epsilon \sigma \sinh \theta_{R}]} \right),$$
(24)

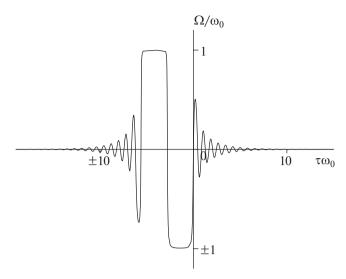
где  $\tilde{\eta}_{\pm} = \sigma^2 \pm \left(v_R^2 + v_I^2\right) \epsilon^2$ . Подставив выражение (24) в формулы (20) получим неявное определение переменной  $\Omega$  бризерного решения системы ОРМБ (12)—(15). Как и в предыдущем случае, здесь могут возникать осцилляции, имеющие заостренную форму, если несущая частота бризера достаточно мала.

Случай 
$$\beta > 0$$
.

Здесь выражение для переменной  $\Omega_0$  односолитонного решения уравнений МРМБ записывается следующим образом:

$$\Omega_0 = \frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial T} \arctan \frac{2\sigma^2 \exp(\theta)}{\sigma^2 [1 - \exp(2\theta)] - v^2 \varepsilon^2}.$$
 (25)

Подстановка выражения (25) в формулы (20) дает неявное определение переменной  $\Omega$  односолитонного решения системы ОРМБ (12)—(15) в рассматриваемом случае. Это решение стационарное и несингулярное при любом вещественном значении параметра v. В пределе  $|v| \to \infty$  длительность солитона стремится к наименьшему значению  $\tau_{min} = \pi |\epsilon/\sigma|$ , а амплитуда  $|\Omega|$  стремится к наибольшему значению  $|1/\epsilon|$ . Поэтому решение становится "прямоугольным" в этом пределе. Заметим, что подобного рода решения были получены для обобщений уравнения синус-Гордон [10, 11, 16].



**Рис. 2.** Профили переменной  $\Omega$  бризерного решения с параметрами  $\beta = 1/\omega_0$ ,  $W_0^{(0)} = -1/2$ , Z = 0,  $v_R = 0.5\omega_0$ ,  $v_L = 8\omega_0$ .

Двухсолитонное решение системы ОРМБ (12)—(15) описывает упругое столкновение рассмотренных выше солитонов. При этом столкновение "прямоугольных" солитонов происходит в форме "перетекания" [11].

Выражение для переменной  $\Omega_0$  бризерного решения уравнений МРМБ записывается без потери общности в виде

$$\Omega_0 = \frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial T} \left( \operatorname{arctg} \frac{\mathbf{v}_R q_-}{\mathbf{v}_I p_+} - \operatorname{arctg} \frac{\mathbf{v}_R q_+}{\mathbf{v}_I p_-} \right), \tag{26}$$

где

$$p_{\pm} = \sigma + i\varepsilon v_I \pm i\varepsilon v_R \sin(\theta_I) \exp(-\theta_R) + (\sigma - i\varepsilon v_I) \exp(-2\theta_R),$$

$$q_{\pm} = p_{\pm} - \sigma[1 \mp 2\cos(\theta_I)\exp(-\theta_R) + \exp(-2\theta_R)].$$

Подставив выражение (26) в формулы (20) получим неявное определение переменной  $\Omega$  бризерного решения системы OPMБ (12)—(15).

Форма двух осцилляций в центре бризера системы ОРМБ становится "прямоугольной", если  $|v_I| > |\sigma/\epsilon|$  и  $v_R \to 0$ . Их период и амплитуда примерно равны длительности и амплитуде "прямоугольных" солитонов, т.е.  $\tau_{min}$  и  $|1/\epsilon|$ , соответственно (см. рис. 2).

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в настоящей работе найдено физическое обобщение системы РМБ при учете переходов на удаленные квантовые состояния с двух выделенных стационарных уровней. Полученная система уравнений ОРМБ (12)—(15) оказалась

интегрируемой методом обратной задачи рассеяния. Важно, что с помощью системы ОРМБ можно рассматривать ситуации, при которых не справедливо приближение внезапных возбуждений, предполагающее выполнение условия (1). Это расширяет спектральный диапазон ПКИ, динамика которых описываются с помощью системы ОРМБ.

Исследованные здесь солитонные и бризерные решения обладают особенностями, отличающими их от соответствующих решений системы РМБ. В значительной степени это касается процесса столкновения солитонов различных полярностей. В отличие от столкновения солитонов системы РМБ здесь может возникать короткоживущий импульс большой амплитуды, динамика которого схожа с динамикой волны-убийцы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-02-00234a).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1. Brabec T., Krausz F. // Rev. Mod. Phys. 2000. V. 72. P. 545.
- Маймистов А.И. // Квант. электрон. 2000. Т. 30. С. 287; Maimistov A.I. // Quant. Electron. 2000. V. 30. P. 287.
- Leblond H., Mihalache D. // Phys. Rep. 2013. V. 523. P. 61.
- Eilbeck J.C., Gibbon J.D., Caudrey P.J., Bullough R.K. // J. Phys. A. 1973. V. 6. P. 1337.
- 5. Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П. Теория солитонов: Метод обратной задачи. М.: Наука, 1980.
- 6. Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х. Солитоны и нелинейные волновые уравнения. М.: Мир, 1988.
- 7. Фаддеев Л.Д. // УФН. 2013. Т. 183. С. 487; Faddeev L.D. // Phys. Usp. 2013. V. 56. P. 465.
- Беленов Э.М., Назаркин А.В. // Письма в ЖЭТФ. 1990. Т. 51. С. 252; Belenov E.M., Nazarkin A.V. // JETP Lett. 1990. V. 51. P. 288.
- 9. Беленов Э.М., Назаркин А.В., Ущаповский В.А. // ЖЭТФ. 1991. Т. 100. С. 762; Belenov E.M., Nazar-kin A.V., Ushchapovskii V.A. // Sov. Phys. JETP. 1991. V. 73. P. 422.
- 10. *Сазонов С.В.* // ЖЭТФ. 2014. Т. 146. С. 483; *Sazonov S.V.* // JETP. 2014. V. 119. P. 423.
- Sazonov S.V., Ustinov N.V. // Phys. Rev. A. 2018. V. 98. Art. № 063803.
- 12. Zabolotskii A.A. // Phys. D. 2003. V. 185. P. 117.
- 13. *Bakhar N.V., Ustinov N.V.* // Proc. SPIE. 2006. V. 6181. Art. № 61810Q.
- 14. *Сазонов С.В., Устинов Н.В.* // ТМФ. 2007. Т. 151. № 2. С. 228; *Sazonov S.V., Ustinov N.V.* // Theor. Math. Phys. 2007. V. 151. P. 632.
- 15. *Сазонов С.В., Устинов Н.В.* // ФТТ. 2008. Т. 50. № 6. С. 1076; *Sazonov S.V., Ustinov N.V.* // Phys. Solid State. 2008. V. 50. Р. 1122.
- 16. *Ustinov N.V.* // J. Math. Phys. 2019. V. 60. Art. № 013503.
- 17. *Dudley J.M., Dias F., Erkintalo M. et al.* // Nat. Photon. 2014. V. 8. P. 755.