ИЗВЕСТИЯ РАН. СЕРИЯ ФИЗИЧЕСКАЯ, 2020, том 84, № 10, с. 1390–1394

УДК 530.145

ЯВЛЯЕТСЯ ЛИ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ УРОВНЕЙ ЯДРА ПРИЗНАКОМ КВАНТОВОГО ХАОСА?

© 2020 г. В. Е. Бунаков*

Федеральное государственное бюджетное учреждение
“Петербургский институт ядерной физики имени Б.П. Константинова”
Национального исследовательского центра “Курчатовский институт”, Гатчина, Россия
**E-mail: vadim.bunakov@mail.ru*

Поступила в редакцию 11.05.2020 г.
После доработки 02.06.2020 г.
Принята к публикации 26.06.2020 г.

Показано, что распределение уровней системы является весьма слабым признаком квантовой хаотичности и совершенно не может служить мерой этой хаотичности. Кратко описан лучший критерий квантового хаоса и его количественной меры, предложенный в наших предыдущих работах.

DOI: 10.31857/S0367676520100087

ВВЕДЕНИЕ

После безуспешных попыток искать причины хаотичности классических систем в большом числе степеней свободы или в нелинейности уравнений движения было решено, что такой причиной является ляпуновская неустойчивость движения. У неустойчивых систем расстояние между первоначально очень близкими траекториями в фазовом пространстве нарастает со временем как $\exp(\Lambda t)$. Скорость Λ, с которой расходятся траектории, называется показателем Ляпунова. Поскольку соотношение неопределенностей в квантовой механике лишает понятие траектории необходимой точности, то и классические критерии регулярности или хаоса, связанные с понятием траектории, делаются неприменимыми. На этом основании в прошлом часто делались категорические утверждения о невозможности хаоса в квантовых системах. Со временем эти утверждения смягчились и современные представления о квантовом хаосе соответствуют высказыванию М. Берри (M. Berry), сделанному [1] более 20 лет назад: “Некорректный термин "квантовый хаос” означает квантовые явления, характерные для классически хаотических систем, квантовые “отпечатки” классического хаоса". Искать эти отпечатки предлагалось следующим образом: берем в классической механике регулярную и хаотическую системы. По правилам соответствия строим их квантовые аналоги (уравнения Шрёдингера с соответствующими гамильтонианами). Сравниваем свойства собственных значений и собственных функций этих уравнений, в надежде найти какое-нибудь различие, которое можно будет назвать “квантовым отпечатком” классического хаоса. За почти 40 лет таких поисков единственным более или менее общепризнанным таким отпечатком (см., например, [2–4]) оказался закон распределения уровней. Для квантовых аналогов хаотических систем распределение расстояний между уровнями было близко к закону Вигнера с его характерным отталкиванием между уровнями. В соответствии с этим законом вероятность найти соседний уровень, отличающийся от данного на энергию ε, определяется выражением:

$$P(\varepsilon) = \frac{\pi\varepsilon}{2D^2}\exp\left(-\frac{\pi\varepsilon^2}{4D^2}\right), \tag{1}$$

где D – среднее расстояние между уровнями. Отталкиванием называется стремление к нулю вероятности найти соседний уровень при $\varepsilon \to 0$.

Для регулярных систем такого отталкивания не наблюдалось. Часто делаются утверждения, что распределение уровней для регулярных квантовых систем (т.е. для квантовых аналогов классических регулярных систем) описывается законом Пуассона:

$$P(\varepsilon) = \frac{1}{D}\exp\left(-\frac{\varepsilon}{D}\right). \tag{2}$$

Поскольку большинство реальных систем занимает промежуточное положение между регулярностью и предельно “жестким” хаосом, то хотелось бы найти численный критерий, позволяющий определить меру хаотичности системы. Такой критерий пытались создать, используя различные виды чисто феноменологических интерполяций [2, 3] между законами (1) и (2).

КРИТИКА “КВАНТОВЫХ ОТПЕЧАТКОВ” КЛАССИЧЕСКОГО ХАОСА

Начнем с распределения Вигнера, характеризующего квантовуюхаотическую систему. Следует отметить, что этот закон справедлив лишь для состояний компаунд-ядра с одинаковым фиксированным спином J. Если такого отбора по спинам не делать, то отталкивание уровней исчезает и закон распределения приближается к закону Пуассона. На рис. 1 изображено распределение, являющееся результатом наложения двух распределений Вигнера (для двух значений спина J). Причина исчезновения вигнеровского отталкивания в этом случае совершенно очевидна. Это – полная независимость (отсутствие корреляции) двух налагаемых друг на друга вигнеровских последовательностей. Естественно, что с увеличением числа независимых последовательностей мы будем все больше приближаться к закону Пуассона. Итак, вигнеровское отталкивание уровней исчезает даже для хаотической системы, если мы забудем о тех интегралах движения (в данном случае спинах), которые остаются ненарушенными, и будем складывать независимые последовательности уровней с различными значениями “забытых” интегралов движения (т. е. хороших квантовых чисел).

Рассмотрим теперь частный случай регулярных систем без вырождения и покажем, что в общепринятых подходах к квантовому хаосу производится именно указанное выше сложение независимых последовательностей уровней с различными значениями “забытых” интегралов движения. Отметим, что именно таким системам уделялось до настоящего времени больше всего внимания. Примером такой системы является двумерный прямоугольный биллиард (движение частицы массы m в яме с бесконечными стенками), у которого отношение сторон a_x/a_y является иррациональным числом. Интегралами движения в такой системе являются энергии движения по осям x и y, а полная энергия равна

$$E_{n_x n_y} = \frac{\hbar^2\pi^2}{4m}\left(\frac{n_x^2}{a_x^2} + \frac{n_y^2}{a_y^2}\right).$$

Если мы фиксируем значение одного из интегралов движения (например, n_y), то получим последовательность невырожденных уровней с отталкиванием $P(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Естественно, что такое распределение резко отличается от закона Пуассона. Если мы теперь не будем фиксировать значения n_y, то спектр будет образовываться из бесконечной совокупности последовательностей уровней, сдвинутых относительно друг друга на постоянно меняющиеся величины

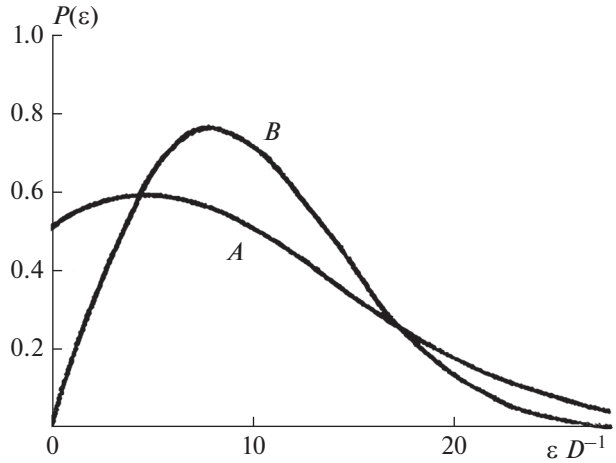

Рис. 1. Распределение расстояний между соседними уровнями для суперпозиции двух независимых последовательностей – кривая A, в каждой из которых уровни распределены по закону Вигнера – кривая B.

$$\frac{\hbar^2\pi^2}{4m}\frac{(2n_y+1)}{a_y^2},$$

где n_y – бесконечный ряд целых чисел. При переборе достаточно большого числа значений n_y эти последовательности можно считать практически некоррелированными между собой. Таким образом, мы вновь имеем дело с наложением большого числа независимых последовательностей и закон распределения $P(\varepsilon)$ приближается к распределению Пуассона. Еще более ярким примером отсутствия зависимости является случай двумерного осциллятора с иррациональным отношением частот. Его энергия имеет вид

$$E_{n_x n_y} = \hbar(n_x\omega_x + n_y\omega_y).$$

Если, по аналогии с предыдущим примером, мы не будем фиксировать n_y в этом случае, то все получающиеся последовательности будут сдвигаться по отношению друг к другу на одну и ту же постоянную величину $\hbar\omega_y$. Поэтому вид распределения $P(\varepsilon)$ для такой системы не имеет ничего общего с законом Пуассона и постоянно меняется с ростом числа анализируемых уровней, не стремясь ни к какому пределу.

Итак, закон распределения Вигнера может свидетельствовать о хаотичности квантовой системы лишь в том случае, когда зафиксированы все имеющиеся у системы интегралы движения, за исключением энергии. Оттого, что мы “свалим в одну кучу” уровни с разными спинами эта хаотическая система (например, система многих взаимодействую-

щих частиц составного ядра) не станет регулярной, хотя вигнеровское отталкивание исчезнет.

А широко распространенное мнение о том, что спектры регулярных систем характеризуются распределением Пуассона, вообще говоря, не верно. Типичным свойством квантовой регулярной системы с высокой симметрией является наличие у нее вырожденных уровней (например, у n-мерного изотропного гармонического осциллятора или заряженной частицы в центральном кулоновском потенциале). Разумеется, закон распределения уровней $P(\varepsilon)$ для таких систем будет характеризоваться дельта-функцией $\delta(\varepsilon)$, а вовсе не законом Пуассона (2). Столь же сильно отличается от него и закон распределения уровней для невырожденных гармонических осцилляторов. Как мы убедились, приближение к закону Пуассона возникает лишь для некоторых невырожденных регулярных систем и только при условии, что мы забываем о существующих у системы интегралах движения, отличных от полной энергии, и "сваливаем в кучу" уровни с различными значениями этих интегралов (хороших квантовых чисел). Однако таким же путем мы можем получить закон Пуассона и для хаотической системы, имеющий хотя бы один интеграл движения вдобавок к энергии.

Таким образом, только закон Вигнера можно связать с хаотичностью квантовой системы и только в частном случае, когда все квантовые числа системы, кроме энергии, зафиксированы. Распределение уровней по закону Пуассона никак не связано с регулярностью системы, а лишь свидетельствует о том, что в систематику включили множество уровней с различными независимыми квантовыми числами.

АЛЬТЕРНАТИВНЫЙ ПОДХОД, ОСНОВАННЫЙ НА ТЕОРЕМЕ ЛИУВИЛЛЯ–АРНОЛЬДА

Мы считаем, что сама идея "квантовых отпечатков классического хаоса" некорректна, ибо классическая механика является предельным случаем более общей квантовой механики, а не наоборот. Всем знакомо исчезновение при таком предельном переходе целого ряда квантовых эффектов (например, дискретных спектров, явлений интерференции и т.д.), т.е. обеднение квантовой картины, но никак не ее обогащение какими-то "специфически классическими" явлениями. Поэтому говорить о "квантовых отпечатках классического хаоса" столь же некорректно, как называть релятивистскую механику "релятивистским отпечатком" механики Ньютона. Гораздо более естественным было бы искать квантовые критерии хаотичности и затем следить, к каким "классическим отпечаткам" они могут приводить. Возможно, что следует искать более глубокие причины хаотичности, общие и для классической, и для квантовой механики. Именно такой подход для гамильтоновых систем и предлагался нами ранее (см., например [5–12]).

Мы предлагаем определение как классического, так и квантового хаоса, основанное на хорошо известной в классической механике (см., например [13, 14]) теореме Лиувилля–Арнольда (Liouville–Arnold). Она утверждает, что система с N степенями свободы регулярна, если у нее есть $M = N$ линейно-независимых первых интегралов движения, находящихся в инволюции. Первыми (глобальными) интегралами движения называются такие, которые по теореме Нетер (Noether) связаны с симметрией системы (т.е. с наличием группы преобразований, по отношению к которым гамильтониан системы инвариантен). Таким образом, классическая регулярная система обладает достаточно высокой симметрией для того, чтобы иметь число M интегралов движения (законов сохранения), равное числу степеней свободы N. При нарушении симметрии, уменьшающем число первых интегралов так, что $M < N$ система становится хаотической.

В отличие от понятия траектории, применимого только в классической механике, понятие симметрии применимо для всех областей физики от классической механики до квантовой теории поля. Квантовым аналогом первого интеграла движения является "хорошее" квантовое число (собственное значение оператора, коммутирующего с гамильтонианом системы). Поэтому нам кажется естественным считать квантовой регулярной системой такую, гамильтониан которой обладает достаточно высокой симметрией, гарантирующей, что количество хороших квантовых чисел системы M не меньше числа ее степеней свободы N. Если внести в систему возмущающее взаимодействие, которое нарушит ее симметрию и уменьшит число хороших квантовых чисел так, что $M < N$, система перестанет быть регулярной. Столь же естественным, кажется, считать хаотической квантовую систему со столь низкой симметрией, что число ее хороших квантовых чисел меньше числа ее степеней свободы. Именно такое определение квантового хаоса и было предложено нами [5–12].

Как уже упоминалось, типичным свойством квантовой регулярной системой с высокой симметрией является наличие у нее вырожденных уровней (например, у n-мерного изотропного гармонического осциллятора или заряженной частицы в центральном кулоновском потенциале). Возмущение, нарушающее симметрии такой системы, приводит к снятию вырождения, т.е. к "расталкиванию" уровней, которые относятся в отсутствии возмущения к одному и тому же значению энергии. При небольших возмущениях это

приводит к распределению $P(\varepsilon)$ с резким максимумом при значениях $\varepsilon \ll D$, определяемых средним расстоянием между расщепленными уровнями. Пример такого распределения для квантовой задачи Хенона–Хейлеса (двумерный изотропный осциллятор с нелинейным возмущением, где в качестве меры возмущения принято использовать энергию возбуждения системы E в условных единицах), рассмотренной нами в [6], приведен на рис. 2*а*. Разумеется такое распределение невозможно описать никакой интерполяцией между законами Пуассона и Вигнера. С ростом возмущения максимум кривой распределения постепенно смещается в область $\varepsilon \sim D$ (см. рис. 2*б*), а само распределение приближается к вигнеровскому. Однако описать этот переход какой-либо простой аналитической формулой невозможно. К аналогичным заключениям пришли и авторы работы [16], исследовавшие уровни атома водорода в однородном магнитном поле.

Таким образом, вигнеровское “расталкивание” уровней означает просто снятие вырождений, возникающее при разрушении симметрий (и соответствующих интегралов движения) регулярной системы, а закон Вигнера свидетельствует о том, что это нарушение достаточно сильно (т.е. о наступлении “жесткого хаоса”). Сам Вигнер вывел этот закон для описания экспериментально наблюдавшихся распределений расстояний между резонансами компаунд-ядра с одинаковым спином, где высокая (почти осцилляторная) симметрия среднего поля модели независимых частиц нарушается парными “остаточными” взаимодействиями. Действительно, у этих резонансов нет никаких интегралов движения, кроме энергии и спина.

Итак, наше определение хаотичности как отсутствия симметрий и связанных с ними интегралов движения действительно позволяет достаточно просто понять физический смысл “квантовых отпечатков” хаоса. Видно, что делать выводы о регулярности или хаотичности системы, исходя из закона распределения ее уровней можно только тогда, когда нам известны все M ее интегралов движения. Но в этом случае наше определение хаотичности позволяет сделать этот вывод гораздо проще: достаточно лишь сравнить число M этих глобальных интегралов с числом N степеней свободы системы. Для количественной оценки меры хаотичности квантовой системы, которую невозможно сделать с помощью “квантовых отпечатков”, можно использовать тот же источник, который послужил Вигнеру при выводе его закона: низкоэнергетические нейтронные резонансы компаунд-ядра и теорию нейтронных силовых функций (см., например [7, 9]). Нейтронная силовая функция является самым наглядным примером того, как следы нарушенных симметрий среднего поля модели оболочек сохраняются в

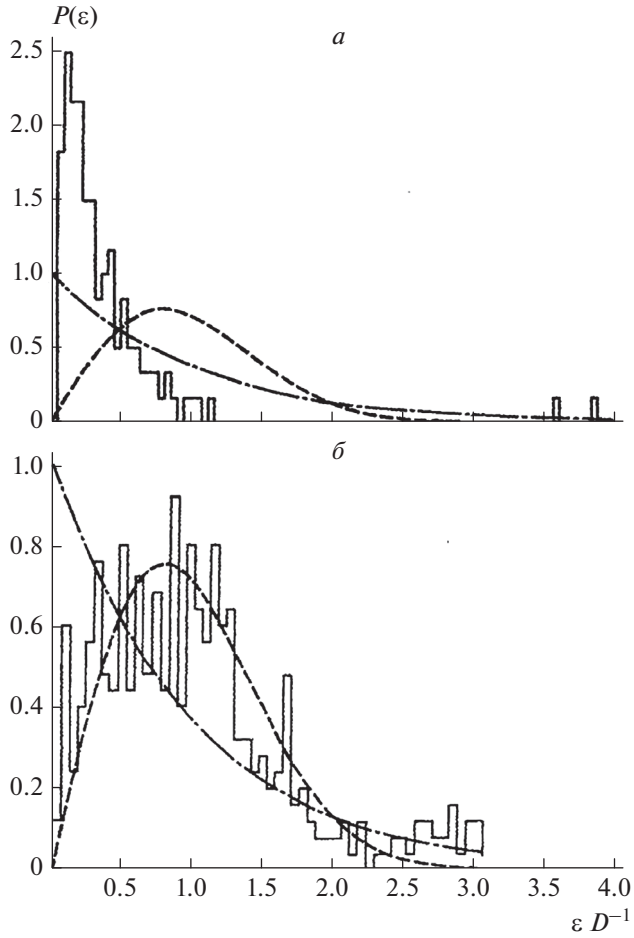

Рис. 2. Распределение расстояний между соседними уровнями в системе Хеннона–Хейлеса в интервале энергий возбуждения *а* – 0.01–0.03; *б* – 0.05–0.07. Штрихованная линия – распределение Вигнера, штрихпунктирная линия – распределение Пуассона.

волновых функциях состояний компаунд-ядра. Подробный анализ количественных критериев квантовой хаотичности и их связи с классическими показателями Ляпунова приведен в наших работах [7–12].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы показали, что закон распределения уровней всякой квантовой системы, включая составное ядро, весьма слабо связан с ее хаотичностью или регулярностью. Если закон распределения Вигнера еще может служить признаком хаоса при отборе в систематику только состояний с одним и тем же фиксированным спином ядра, то распределение Пуассона свидетельствует лишь о том, что в рассматриваемой совокупности уровней перемешаны состояния с множеством разных квантовых чисел и совершенно не связано с регуляр-

ностью системы. Количественной мерой хаотичности распределение уровней служить не может.

Кратко упомянут предлагаемый нами альтернативный взгляд на источник классической и квантовой хаотичности, основанный на теореме Лиувилля–Арнольда. Хаотичность классической и квантовой системы связывается с тем, что число ее линейно-независимых первых интегралов движения, определяемых симметрией системы, оказывается меньше, чем число ее степеней свободы. Поскольку понятие симметрии системы (в отличие от понятия траектории) справедливо и в классическом, и в квантовом случаях, то такое определение хаотичности справедливо и для квантовых систем. В квантовом случае первые интегралы движения называются хорошими квантовыми числами. В этом подходе существует количественный критерий квантовой хаотичности, переходящий в классическом пределе в соответствующие классические критерии (показатель Ляпунова и более сложные величины).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Berry M.* Quantum chaos. Adriatico research conference and miniworkshop (Trieste, 1990). Singapore: World Sci., 1991. Art. № VII.
2. *Brody T.* // Lett. Nuovo Cim. 1973. V. 7. P. 482.
3. *Berry M., Robnik M.* // J. Phys. A. 1984. V. 17. P. 2413.
4. *Gutzwiller M.* Chaos in classical and quantum mechanics. N.-Y.: Springer, 1990.
5. *Bunakov V.E.* // Proc. of Int. conf. on selected topics in nuclear structure. JINR Publ. E3-94-370. (Dubna, 1994). P. 310.
6. *Bunakov V.E., Valiev F.F., Tchuvilsky Yu.M.* // Phys. Lett. A. 1998. V. 243. P. 288.
7. *Бунаков В.Е.* // ЯФ. 1999. Т. 62. С. 5; *Bunakov V.E.* // Phys. Atom. Nucl. 1999. V. 62. P. 1.
8. *Бунаков В.Е., Иванов И.Б.* // ЯФ. 1999. Т. 62. С. 1172; *Bunakov V.E., Ivanov I.B.* // Phys. Atom. Nucl. 1999. V. 62. P. 1099.
9. *Bunakov V.E., Ivanov I.B.* // J. Phys. A. 2002. V. 35. P. 1907.
10. *Бунаков В.Е.* // ЯФ. 2014. Т. 77. С. 1623; *Bunakov V.E.* // Phys. Atom. Nucl. 2014. V. 77. P. 1550.
11. *Бунаков В.Е.* // ЯФ. 2016. Т. 79. С. 324; *Bunakov V.E.* // Phys. Atom. Nucl. 2016. V. 79. P. 394.
12. *Бунаков В.Е.* // ЯФ. 2016. Т. 79. С. 879; *Bunakov V.E.* // Phys. Atom. Nucl. 2016. V. 79. P. 995.
13. *Заславский Г.М.* Стохастичность динамических систем. М: Наука, 1984.
14. *Sagdeev R.Z., Usikov D.A., Zaslavsky G.M.* Nonlinear physics: from the pendulum to turbulence and chaos. N-Y: Harwood Acad. Publ., 1988.
15. *Hoenig A., Wintgen D.* // Phys. Rev. 1987. V. 39. P. 5642.