ИЗВЕСТИЯ РАН. СЕРИЯ ФИЗИЧЕСКАЯ, 2020, том 84, № 10, с. 1395–1400

УДК 539.143

ПОЛИНОМИАЛЬНОЕ ОПИСАНИЕ МАСС НЕЧЕТНЫХ ДЕФОРМИРОВАННЫХ ЯДЕР

© 2020 г. А. К. Власников[1, *], А. И. Зиппа[1], В. М. Михайлов[1]

[1]Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования "Санкт-Петербургский государственный университет", Санкт-Петербург, Россия

*E-mail: a.vlasnikov@spbu.ru

Поступила в редакцию 11.05.2020 г.
После доработки 02.06.2020 г.
Принята к публикации 26.06.2020 г.

Рассмотрено описание масс нечетных деформированных атомных ядер с помощью полиномов четвертого порядков по отклонениям от N и Z нечетного ядра. Показано, что переход от второго порядка к четвертому не сближает параметры, полученные для разных групп четно-четных ядер, при этом параметры высших порядков, вычисленные таким же образом, не удовлетворительно согласуются друг с другом. "Гладкая" составляющая массы нечетного ядра практически одинакова для четвертого и второго порядков. На этой основе делается заключение, что вполне достаточно ограничиться полиномом второго порядка.

DOI: 10.31857/S0367676520100270

ВВЕДЕНИЕ

Одной из актуальных проблем структуры атомного ядра является вопрос о парных корреляциях и их влиянии на свойства атомных ядер. Сжатие энергетических уровней в нечетных и нечетно-нечетных ядрах по сравнению с одночастичным спектром, появление энергетической щели в неротационных спектрах четно-четных ядер, уменьшение момента инерции в ротационных спектрах деформированных ядер – далеко не полный список проявлений парных корреляций. Количественной мерой парных корреляций являются нейтронные (n) и протонные (p) парные энергии P_τ ($\tau = n, p$), определяемые как превышение массы нечетного ядра над соседними четно-четными. Если определить некоторую гладкую функцию $\mathcal{M}(N,Z)$, описывающую зависимость массы четно-четных ядер от количества нейтронов N и количества протонов Z, то массу нечетно-нейтронного ядра $M(N_н, Z)$ или массу нечетно-протонного ядра $M(N, Z_н)$ можно определить через гладкую составляющую компоненту массы $\mathcal{M}(N,Z)$ и парные энергии P_τ ($\tau = n, p$):

$$M(N_н, Z) = \mathcal{M}(N_н, Z) + P_n(N_н, Z), \qquad (1)$$

$$M(N, Z_н) = \mathcal{M}(N, Z_н) + P_p(N, Z_н), \qquad (2)$$

где $N_н$, $Z_н$ – нечетные числа; N, Z – четные.

Из формул (1) и (2) следует, что однозначность вычисления P_τ зависит от однозначности выделения "гладкой" массы $\mathcal{M}(N,Z)$ и ее аналитической зависимости от N и Z. Поскольку P_τ в основном определяются парными корреляциями в ядрах, то вычисленные на основе формул (1) и (2) парные энергии могут послужить для уточнения выбора эффективных взаимодействий в частично-частичном канале. Для этой цели парные энергии используются в течение долгого времени, см. например, [2–4].

Существует много способов расчета P_τ ($\tau = n, p$) на основе ядерных масс. Ниже для краткости рассмотрены только нейтронные парные энергии P_n. Для протонных парных энергий P_p используются те же формулы с заменой N на Z (и перестановкой: нейтронные числа должны быть первыми). Обычно вычисляют нейтронные парные энергии с массами ядер при фиксированном четном Z, как, например, в определении Бора и Моттельсона [5]:

$$\begin{aligned} P_n = [&3M(N-1,Z) + M(N+1,Z) - \\ &- M(N-2,Z) - 3M(N,Z)]/4, \end{aligned} \qquad (3)$$

здесь и в (4) N и Z – четные числа. Более симметричное выражение предложено Мадландом и Никсом [6]:

$$\begin{aligned} P_n = [&4M(N-1,Z) + 4M(N+1,Z) - \\ &- M(N+2,Z) - M(N-2,Z) - 6M(N,Z)]/8. \end{aligned} \qquad (4)$$

В оба этих определения парной нейтронной энергии, как в (3), так и в (4), входят две массы нечетного ядра $M(N+1,Z)$ и $M(N-1,Z)$, то есть дается некоторое среднее от P_n для двух нечетных ядер. На это было обращено внимание в [7], где было предложено уравнение, содержащее одну массу нечетного ядра

$$P_n = M(N_н, Z) - \{9[M(N_н+1, Z) + M(N_н-1, Z)] - [M(N_н+3, Z) + M(N_н-3, Z)]\}/16 \quad (5)$$

($N_н$ – нечетное, Z – четное, как и в (1)), что позволяет фиксировать квантовое состояние нечетного нуклона. Уравнение (5) является обобщением довольно старого определения парной энергии, которое до сих пор используется при отсутствии достаточного числа соседних масс четно-четных ядер:

$$P_n = M(N_н, Z) - [M(N_н+1, Z) + M(N_н-1, Z)]/2. \quad (6)$$

Как выяснилось в [7], при использовании уравнения (5) нечетные ядра, например, нечетно-нейтронные с $N_н$ и $N_н + 2$ могут иметь парные энергии $P_n(N_н, Z)$ и $P_n(N_н + 2, Z)$, которые отличаются на ~100 кэВ и более.

Как уже отмечалось в [1], в основе выражений (3)–(5) лежит предположение о гладкости изменения масс четно-четных ядер, которая в нечетных ядрах нарушается из-за парных энергий P_τ. Тогда (см. [6]) для четно-четного ядра с количеством нейтронов $N + s$ и протонов $Z + t$ (s, t малы: $|s/N| < 1$ и $|t/Z| < 1$) можно написать:

$$M(N+s, Z+t) = M(N, Z) + \sum_{\substack{i,k=0,1,2,\ldots \\ i+k>0}} d_{inkp} \frac{s^i t^k}{i!k!}. \quad (7)$$

Формально этот ряд подобен ряду Тейлора, но параметры d_{inkp} не являются производными, хотя они так называются, например, в [5] и [6], так как s и t принимают дискретные значения. Если разлагать по s и t энергию ядра

$$\left.\begin{aligned} M(N, Z) &= m_n N + m_p Z + E(N, Z) \\ E(N, Z) &= -B(N, Z) \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

(m_n, m_p – массы нуклонов, B – энергия связи), то все параметры за исключением d_{1n0p}, d_{0n1p} и $M(N, Z)$ не изменяются. При разложении $E(N + s, Z + t)$ масса $M(N, Z)$ заменяется на $E(N, Z)$, а d_{1n0p} на $\bar{d}_{1n0p}$ и d_{0n1p} на $\bar{d}_{0n1p}$

$$\bar{d}_{1n0p} = -m_n + d_{1n0p}; \; \bar{d}_{0n1p} = -m_p + d_{0n1p}. \quad (9)$$

Обозначим $d_{in0p} \equiv d_{in}$; $d_{0nkp} \equiv d_{kp}$. Величины d_{inkp} назовем параметрами первого порядка, если $i + k = 1$, второго порядка, если $i + k = 2$, третьего порядка, если $i + k = 3$ и т.д.; четно-четными, если $i = 2\mu$, $k = 2\nu$, нечетно-нечетными, если $i = 2\mu + 1$, $k = 2\nu + 1$.

Если исходить из того, что единственный источник негладкости в поведении масс нечетных атомных ядер – парные энергии, то, следуя логике разложения (7), можно выразить массу четно-четного ядра через "гладкую" массу $\mathcal{M}$ нечетного ядра. Тогда при нечетном s:

$$M(N_н + s, Z) = \mathcal{M}(N_н, Z) + s d_{1n}(N_n, Z) + \ldots . \quad (10)$$

Естественно, что параметры d_{inkp} в выражении (7) можно рассчитать, используя разные группы ядер, соседних с N и Z. Разложение (7) можно считать применимым, если параметры мало меняются от группы к группе. Кроме того, ряд (7) в общем случае бесконечен, и возникает вопрос об оптимальном количестве членов.

Подобное исследование было проведено для четно-четных ядер в [8], где массовая поверхность аппроксимировалась на основе уравнения (7), включающего параметры вплоть до второго, затем до четвертого и, наконец, вплоть до шестого порядка. Исследовались массовые поверхности, в центре которых были два полумагических ядра с $A = 118$, $N = 68$, $Z = 50$ и с $A = 140$, $N = 82$, $Z = 58$ и одно деформированное ядро $A = 170$, $N = 100$, $Z = 70$. Результаты [8] показывают, что d_{kn}, d_{kp} при $k = 3, 4$ имеют близкий порядок величины, хотя различие этих параметров, определенных по разным группам ядер, может быть сравнимо с величиной параметров. В то же время параметры d_{inkp}, $i \neq 0$, $k \neq 0$, существенно различаются при определении по разным группам ядер, за исключением d_{1n1p}. Общий вывод состоит в том, что для четно-четных ядер наилучший результат дает аппроксимация с параметрами не выше второго порядка, хотя поправки к d_{1n}, d_{1p} за счет третьего порядка и к d_{2n}, d_{2p} за счет четвертого порядка приводят к сближению этих параметров для разных групп ядер.

В работе [1] изучена массовая поверхность стабильных деформированных ядер с нечетным количеством нейтронов ${}^{157}_{64}\mathrm{Gd}$, ${}^{171}_{70}\mathrm{Yb}$, ${}^{179}_{72}\mathrm{Hf}$ и с нечетным количеством протонов ${}^{165}_{67}\mathrm{Ho}$, ${}^{175}_{71}\mathrm{Lu}$. "Гладкая" часть $\mathcal{M}(N, Z)$ представлена как полином второго порядка по отклонениям от N и Z. Параметры разложения были определены на основании двух различных групп соседних ядер. В первой группе ядер к нечетному нуклону нечетного ядра добавлялись или отделялись 1 и 3 нуклона (в работе [1] обозначено как приближение А (А)). Во второй группе ядер к четному нуклону нечетного ядра добавлялись или отделялись 2 или 4 нуклона, а к нечетному – 1 или 3 нуклона (в работе [1] обозначено как приближение Б (Б)). Таким образом, в обоих случаях расчеты проводились по массам соседних четно-четных ядер. Результаты [1] показывают, что параметры $\bar{d}_{1\tau}$ и $\bar{d}_{2\tau}$, определенные для разных групп ядер, отличаются незначительно. При этом остается открытым вопрос, сближаются ли значения этих параметров при переходе к описанию массовой поверхности полиномами 4 порядка.

В настоящей статье рассмотрено описание массовой поверхность нечетных ядер полиномами вплоть до 4 порядка. Выбор двух различных групп ядер, на основе которых производился расчет параметров, аналогичен работе [1], однако, поскольку количество неизвестных параметров увеличено, увеличено и количество нуклонов в каждой из групп. В первую группу добавлены ядра, в которых количество нуклонов отличается на пять от количества нечетных нуклонов в рассматриваемом ядре. Во вторую группу по сравнению с работой [1] добавлены ядра, в которых к четному нуклону добавлены или удалены еще шесть нуклонов, а к нечетному – пять. Формулы, на основе которых проводились вычисления, приведены во втором разделе. Третий раздел посвящен результатам расчетов и их анализу.

ПАРАМЕТРЫ МАССОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Расчет параметров “гладкой” составляющей массовой поверхности нечетных атомных ядер в окрестностях заданных Z и N производится на основе двух совокупностей атомных ядер. При этом в настоящей работе учтены параметры вплоть до четвертого.

В первой совокупности сохраняется неизменным четное количество нуклонов, а нечетное количество нуклонов изменяется на (±1, ±3, ±5). Таким образом, расчет 5 параметров $\mathcal{M}$, $d_{1\tau}$, $d_{2\tau}$, $d_{3\tau}$, $d_{4\tau}$ для нечетного ядра ведется на основе масс соседних четно-четных ядер. Найденные таким способом параметры обозначим приближением а (а).

Во второй совокупности количество четных нуклонов изменяется на ±2, ±4, ±6 единиц, а количество нечетных – на ±1, ±3, ±5 единиц. В этом приближении можно найти все 15 параметров, начиная от $\mathcal{M}$, d_{1n}, d_{1p}, d_{2n}, d_{2p}, d_{1n1p} вплоть до параметров четвертого порядка (d_{4n}, d_{4p}, d_{3n1p}, d_{1n3p}, d_{2n2p}). Найденные таким способом параметры обозначим приближением б (б).

Как показано в [1, 8], расчет искомых параметров удобно производить, используя суммы $e(s, t)$ и разности $o(s, t)$ масс ядер в окрестностях изучаемого нечетного ядра. При использовании параметров вплоть до третьего и четвертого порядка:

$$e(s,t) = \mu(N+s, Z+t) + \mu(N-s, Z-t) = \\ = 2\mu(N,Z) + s^2 d_{2n} + t^2 d_{2p} + 2st d_{1n1p} + \\ + \frac{2s^4}{4!} d_{4n} + \frac{2t^4}{4!} d_{4p} + \frac{s^3 t}{3} d_{3n1p} + \frac{st^3}{3} d_{1n3p} + \frac{s^2 t^2}{2} d_{2n2p}; \quad (11)$$

$$o(s,t) = \mu(N+s, Z+t) - \mu(N-s, Z-t) = \\ = 2sd_{1n} + 2td_{1p} + \frac{s^3}{3} d_{3n} + \frac{t^3}{3} d_{3p} + \\ + s^2 t d_{2n1p} + st^2 d_{1n2p}, \quad (12)$$

Если ядра четные (нечетные), то $\mu = M$ ($\mu = \mathcal{M}$), s и t принимают целочисленные значения, $d_{0n0p} = M(N, Z)$ ($d_{0n0p} = \mathcal{M}(N,Z)$).

Комбинация масс $ee(s, t)$ содержит только четно-четные параметры.

$$ee(s,t) = e(s,-t) + e(s,t) = \\ = 4M(N,Z) + 2s^2 d_{2n} + 2t^2 d_{2p} + \\ + \frac{s^4}{6} d_{4n} + \frac{t^4}{6} d_{4p} + s^2 t^2 d_{2n2p}. \quad (13)$$

Разности $ee(s, t)$ могут быть использованы для выделения параметров четных по нейтронам или по протонам:

$$ee_n(s_1, s_2 | t) = ee(s_1, t) - ee(s_2, t) = \\ = 2(s_1^2 - s_2^2) d_{2n} + (s_1^4 - s_2^4) d_{4n}/6 + (s_1^2 - s_2^2) t^2 d_{2n2p}, \quad (14)$$

$$ee_p(s | t_1, t_2) = ee(s, t_1) - ee(s, t_2) = \\ = 2(t_1^2 - t_2^2) d_{2p} + (t_1^4 - t_2^4) d_{4p}/6 + (t_1^2 - t_2^2) s^2 d_{2n2p}. \quad (15)$$

Комбинация масс ядер $S_\tau(s, t)$ выделяет нечетно-нейтронные ($\tau = n$), либо нечетно-протонные ($\tau = p$) параметры:

$$S_n(s,t) = o(s,-t) + o(s,t) = \\ = 4sd_{1n} + 2s^3 d_{3n}/3 + 2st^2 d_{1n2p}, \quad (16)$$

$$S_p(s,t) = o(-s,t) + o(s,t) = \\ = 4td_{1p} + 2t^3 d_{3p}/3 + 2s^2 t d_{2n1p}. \quad (17)$$

Используя выражения (11)–(17), можно получить искомые параметры.

(а): $s = \pm1, \pm3, \pm5$; $t = 0$; $\Delta A = 1; 3; 5$.

$$\mathcal{M}(N_\text{н}, Z) = 2^{-8}[150e(1,0) - 25e(3,0) + 3e(5,0)], \quad (18)$$

$$d_{2n} = 2^{-6}\left[13e(3,0) - \frac{34}{3}e(1,0) - \frac{5}{3}e(5,0)\right], \quad (19)$$

$$d_{4n} = 2^{-5}[2e(1,0) - 3e(3,0) + e(5,0)]. \quad (20)$$

Т.к. число использованных масс в (а) равно 6, а параметров только 5, то появляется возможность вычислить 2 варианта d_{1n} и d_{3n}: один вариант с $\Delta A = 1, 3$, второй – $\Delta A = 3, 5$:

$$d_{1n}(\Delta A = 1;3) = 9o(1,0)/16 - o(3,0)/48; \quad (21)$$

$$d_{3n}(\Delta A = 1;3) = [o(3,0) - 3o(1,0)]/8; \quad (22)$$

$$d_{1n}(\Delta A = 3;5) = 25o(3,0)/96 - 9o(5,0)/160; \quad (23)$$

$$d_{3n}(\Delta A = 3;5) = 3o(5,0)/80 - o(3,0)/16. \quad (24)$$

(б): ниже даны выражения для нейтронных параметров, которые можно сравнить с нейтронными параметрами (18)–(24) для (а). $s = \pm 1, \pm 3, \pm 5$; $t = \pm 2, \pm 4, \pm 6$; $\Delta A = |s + t| = 1, 3, 5, 7$.

Чтобы не вычислять в (б) параметры d_{inkp}, $i \neq k$, i и $k \neq 0$, в частности, нечетно-нечетные используются $ee_n(s_1, s_2|t)$ и $ee_p(s|t_1, t_2)$ (14), (15). В таком случае приходится использовать 24 массы ядер, в то время как имеется всего 15 параметров. Из этого следует, что для d_{1n} и d_{3n} даются 2 варианта: один, который обозначен как (I), содержит массы с $\Delta A = 1, 3, 5$, и второй, обозначенный как (II), использует массы с $\Delta A = 1, 3, 5, 7$.

$$\begin{gathered}\mathcal{M}(N_{\text{н}}, Z) = \frac{1}{4} e(1,2) - \frac{91}{3} 2^{-9} ee_n(3,1|2) + \\ + \frac{1}{96} ee_n(3,1|4) + 3 \cdot 2^{-9} ee_n(5,1|2) - \\ - \frac{3}{20} ee_p(1|4,2) + \frac{1}{40} ee_p(1|6,2);\end{gathered} \quad (25)$$

$$\begin{gathered}d_{2n}(N_n, Z) = \\ = \left[\frac{47}{8} ee_n(3,1|2) - ee_n(3,1|4) - \frac{5}{8} ee_n(5,1|2)\right] \Big/ 48;\end{gathered} \quad (26)$$

$$d_{4n}(N_n, Z) = [ee_n(5,1|2) - 3ee_n(3,1|2)]/64; \quad (27)$$

$ee_n(s_1, s_2|t)$ и $ee_p(s|t_1, t_2)$ определены в (14), (15).

$$d_{1n}(\mathrm{I}) = 35S(1,2)/96 - S(1,4)/12 - S(3,2)/9; \quad (28)$$

$$d_{3n}(\mathrm{I}) = S(3,2)/16 - 3S(1,2)/16. \quad (29)$$

Функции $S(s, t)$ определены в (16), (17).

$$d_{1n}(\mathrm{II}) = S(3,4)/3 - 11S(5,2)/160 - 13S(1,6)/32; \quad (30)$$

$$d_{3n}(\mathrm{II}) = -S(3,4)/4 + 3S(5,2)/112 + 9S(1,6)/812. \quad (31)$$

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ МАССОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА НЕЧЕТНЫХ ДЕФОРМИРОВАННЫХ ЯДЕР

Для расчета параметров $\mathcal{M}$ и d_{inkp} применены формулы (18)–(31). Так же, как в работе [1], изучены массовые поверхности стабильных нечетных деформированных ядер $^{157}_{64}\mathrm{Gd}$, $^{165}_{67}\mathrm{Ho}$, $^{171}_{70}\mathrm{Yb}$, $^{175}_{71}\mathrm{Lu}$ и $^{179}_{72}\mathrm{Hf}$, в окрестностях которых много четно-четных ядер с измеренными массами. Экспериментальные данные взяты из работы [9]. В табл. 1–3 в первых трех колонках представлены массовое число A, заряд Z, $\tau = n$ для нечетно-нейтронных и $\tau = p$ для нечетно-протонных ядер. Рядом со значениями параметров в скобках – погрешности, рассчитанные на основе эмпирических. Колонки “А [1]" и "Б [1]" приводят значения параметров, вычисленных в работе [1], где массовые поверхности тех же ядер описана полиномами второго порядка (см. введение настоящей статьи). Два возможных набора параметров $\bar{d}_{1\tau}$ ($\Delta A = 1$ и $\Delta A = 3$) соответствуют двум различным группам ядер, на основе которых рассчитаны параметры. Отметим, что для расчета параметров массовой поверхности четвертого порядка использовано больше атомных ядер ($\Delta A \leq 5$ и 7), чем при расчете параметров поверхности второго порядка ($\Delta A \leq 3$). Парные энергии P_τ (табл. 3) приводятся только в А [1] для поверхности второго порядка и приближении (а) для поверхности четвертого порядка, P_τ в оставшихся двух приближениях для поверхностей второго и четвертого порядков могут быть получены с помощью разностей между известными массами нечетных ядер и рассчитанными "гладкими” составляющими этих масс на основе формул (1) и (2). Например, нейтронная парная энергия на основе массовой поверхности четвертого порядка в (а): $P_n(\mathrm{а}) = M(N_{\text{н}}, Z) - \mathcal{M}(\mathrm{а})$. Абсолютные значения M не приводятся, т.к. они имеют тот же порядок, что и массы соседних четно-четных ядер, и могут быть легко восстановлены с использованием уравнений (1) и (2), значений P_τ и масс соответствующих нечетных ядер.

Как следует из табл. 1, переход от поверхности второго порядка к поверхности четвертого порядка не приводит к уменьшению разброса значений $\bar{d}_{1\tau}$ для различных приближений, а также при разных ΔA внутри приближений (~3%). Абсолютная величина параметров $d_{3\tau}$ почти на два порядка меньше, чем $|\bar{d}_{1\tau}|$. В (а) и (б) и внутри этих приближений при разных ΔA в трех случаях из пяти эти параметры довольно сильно отличаются. Для $^{171}_{70}\mathrm{Yb}$ в (а) и (б) они отличаются даже знаком. Такие колебания $d_{3\tau}$ в разных приближениях ставят под сомнение возможность аппроксимации массовой поверхности как поверхности четвертого порядка. Табл. 1 и табл. 2 показывают, что вывод работы [1] об увеличении эмпирических погрешностей в параметрах массовых поверхностей при увеличении количества ядер, используемых для расчета этих параметров, остается справедливым и при переходе к поверхностям четвертого порядка (ср. А [1] и Б [1], а также (а) и (б)).

В табл. 2 приведены значения четных параметров $d_{2\tau}$, рассчитанных для поверхностей второго и четвертого порядка в различных приближениях, а также значения параметров $d_{4\tau}$, появляющихся в поверхностях четвертого порядка. Как следует из таблицы, расширение массовой поверхности до четвертого порядка не оказывает существенного влияния на близость параметров, определенных по разным группам ядер (ср. А [1] и Б [1], а также (а) и (б)). Изменение группы ядер, по которой происходит расчет параметров, существенно влияет на значения параметров $d_{4\tau}$. Кроме того, сами параметры определяются с большой относительной погрешностью. Эти обстоятельства ставят

Таблица 1. Нечетные параметры $\bar{d}_{1\tau}, d_{3\tau}$ (кэВ). $\bar{d}_{1\tau} = d_{1\tau} - m_\tau$. В каждом приближении приведены два значения параметров, вычисленных с использованием масс четно-четных ядер с различными массовыми числами A. А [1], Б [1], (а), (б) – см. текст. Обозначения I и II объяснены в тексте перед уравнением (25)

			А [1]	Б [1]	(а)	(б)	(а)	(б)
A	Z	τ	$\bar{d}_{1\tau}\,(\Delta A = 1)$ $\bar{d}_{1\tau}\,(\Delta A = 3)$	$\bar{d}_{1\tau}\,(\Delta A = 1)$ $\bar{d}_{1\tau}\,(\Delta A = 3)$	$\bar{d}_{1\tau}\,(\Delta A = 1;3)$ $\bar{d}_{1\tau}\,(\Delta A = 3;5)$	$\bar{d}_{1\tau}\,(\mathrm{I})$ $\bar{d}_{1\tau}\,(\mathrm{II})$	$\bar{d}_{3\tau}\,(\Delta A = 1;3)$ $\bar{d}_{3\tau}\,(\Delta A = 3;5)$	$\bar{d}_{3\tau}\,(\mathrm{I})$ $\bar{d}_{3\tau}\,(\mathrm{II})$
157	64	n	−7148.58(0.90) −7110.62(0.30)	−7013.4(2.5) −7104(10)	−7153.4(1.4) −7156.71(9.52)	−7136.6(6.2) −7231(96)	28.49(0.71) 30.73(0.19)	23.2(2.3) 45(18)
165	67	p	−6768.05(0.70) −6839.20(0.79)	−6921(41) −6855(23)	−6759.16(0.79) −6810.1(1.9)	−6825(12) −6808(90)	−53.37(0.74) −19.4(1.1)	−12(10) −16(18)
171	70	n	−7337.13(0.09) −7298.42(0.20)	−7202.1(9.3) −7078(24)	−7319.47(0.02) −7319.54(0.51)	−7223(15) −7690(110)	14.03(0.12) 14.08(0.28)	−12.6(4.9) −32(24)
175	71	p	−6104.90(0.70) −6276.2(2.6)	−6380(85) −6133.3(3.1)	−6083.53(0.86) −6228(10)	−6139.3(4.5) −6420(190)	−128.5(2.4) −32.4(6.5)	−103(22) 9(40)
179	72	n	−6743.4(1.0) −6550.2(1.1)	−6612(90) −6660(59)	−6755.0(1.1) −6657.2(2.8)	−6829(42) −6710(310)	69.9(1.1) 4.7(1.5)	9(23) 5(63)

Таблица 2. Четные параметры $d_{2\tau}$ и $d_{4\tau}$ (кэВ) в А [1], Б [1], (а), (б) (см. текст)

A	Z	τ	$d_{2\tau}$				$d_{4\tau}$	
			А [1]	Б [1]	(а)	(б)	(а)	(б)
157	64	n	196.98(0.32)	203.5(2.3)	209.75(0.67)	218.9(4.6)	−15.33(0.24)	−19.81(0.53)
165	67	p	628.98(0.55)	597(20)	646.93(0.86)	639(21)	−21.56(0.98)	−18.5(8.1)
171	70	n	186.63(0.14)	181.1(7.0)	174.84(0.30)	193.4(8.0)	14.15(0.25)	5.6(5.7)
175	71	p	578.9(2.0)	552(44)	587.9(5.5)	545(44)	−10.9(5.5)	3(18)
179	72	n	198.58(0.83)	236(44)	196.1(1.1)	219(47)	3.0(1.4)	−6(18)

под вопрос возможность описания масс нечетных атомных ядер полиномами четвертого порядка.

Значения парных энергий P_τ в А [1] и (а) почти совпадают (табл. 3), среднее различие ≈16 кэВ, т.е. относительное различие ~2%. Как указывалось при обсуждении табл. 1 и 2, расширения массовой поверхности до полинома четвертого порядка по s и t не сближает параметры, определенные по разным группам ядер, в частности, $\mathcal{M}$(а)–$\mathcal{M}$(б) (массовая поверхность четвертого порядка): они остаются примерно такими же, как $\mathcal{M}$(А [1])–$\mathcal{M}$(Б [1]), т.е. вычисленными в предположении, что массовая поверхность может быть аппроксимирована полиномом второго порядка.

Как указывалось во введении (после уравнения (7)) параметры d_{inkp} не являются производными $\left(\partial^{i+k} M(N,Z) \big/ \partial^i N \partial^k Z\right)$. Это демонстрируется на следующем частном примере. Исследо-

Таблица 3. Парные энергии P_τ в А [1] и (а) и разности "гладких" масс нечетных ядер $\mathcal{M}$(А [1])–$\mathcal{M}$(Б [1]) и $\mathcal{M}$(а)–$\mathcal{M}$(б) в кэВ. А [1], Б [1], (а), (б) – см. текст

A	Z	τ	P_τ(А [1])	$\mathcal{M}$(А [1]) – $\mathcal{M}$(Б [1])	P_τ(а)	$\mathcal{M}$(а)–$\mathcal{M}$(б)
157	64	n	887.2(1.4)	−19(11)	893.0(1.7)	−35(11)
165	67	p	862.5(1.3)	−102(25)	808.6(1.4)	192(24)
171	70	n	796.16(0.07)	−82(28)	790.85(0.14)	−51(23)
175	71	p	894.2(1.8)	−174(22)	882.2(2.9)	−376(10)
179	72	n	743.6(2.0)	328(63)	742.5(1.8)	305(79)

ванные ядра являются стабильными, поэтому при фиксированном A они имеют максимальную энергию связи (B) или минимальную энергию ($E = -B$), поэтому, если считать параметры производными, то $dE/dZ = 0 = dE/dZ - dE/dN = \bar{d}_{1p} - \bar{d}_{1n}$ ($\bar{d}_{1\tau} = d_{1\tau} - m_\tau$), A фиксировано ($A = Z + N$). Параметры $\bar{d}_{1\tau}$ можно вычислить в Б [1] и (б). Для определенности используем Б [1] и $\Delta A = 1$. Для нечетно-нейтронных ядер $\bar{d}_{1p} - \bar{d}_{1n} = -[o(3,-2) + o(1,-2)]/8$, обозначение $o(s, t)$ дано уравнением (12). Для нечетно-протонных s и t должны быть переставлены. Для $^{157}_{64}$Gd, $^{165}_{67}$Ho, $^{171}_{70}$Yb, $^{175}_{71}$Lu и $^{179}_{72}$Hf, соответствующие значения $\bar{d}_{1p} - \bar{d}_{1n}$ равны: –8.3 (1.3); –127 (164); 1274 (5); 649 (58); 67 (45), т.е. эти разности параметров явно не равны нулю. Таким образом, этот частный случай подтверждает, что параметры не являются производными. Этот вопрос обсуждался нами ранее для других ядер [10].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение отметим, что рассмотрено описание массовых поверхностей нечетных стабильных деформированных ядер полиномами четвертого порядка по отклонениям от N и Z нечетного ядра и проведено сравнение с описанием полиномами второго порядка. Показано, что вполне достаточной является аппроксимация второго порядка, т.к. параметры, вычисленные с учетом четвертого порядка, не дают сближения параметров, вычисленных по разным группам ядер, а параметры $d_{3\tau}$ ($\tau = n, p$), $d_{4\tau}$ ($\tau = n, p$), а также d_{inkp} ($i \neq k$; $i, k \neq 0$), приведенные ранее для четно-четных ядер в [8], не согласуются между собой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Власников А.К., Зиппа А.И., Михайлов В.М.* // Изв. РАН. Сер. физ. 2020. Т. 84. № 8. С. 1112; *Vlasnikov A.K., Zippa A.I., Mikhajlov V.M.* // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2020. V. 84. № 8. P. 919.
2. *Nilsson S.G., Tsang C.F., Sobiczewski A. et al.* // Nucl. Phys. A. 1969. V. 131. P. 1.
3. *Соловьев В.Г.* Теория сложных ядер. М.: Наука, 1971. 560 с.
4. *Bender M., Heenen P.-H., Reinhard P.-G.* // Rev. Mod. Phys. 2003. V. 75. P. 121.
5. *Бор О., Моттельсон Б.Р.* Структура атомного ядра. Т. 1. М.: Мир, 1971. 456 с.
6. *Власников А.К., Зиппа А.И., Михайлов В.М.* // Изв. РАН. Сер. физ. 2016. Т. 80. С. 989; *Vlasnikov A.K., Zippa A.I., Mikhajlov V.M.* // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2016. V. 80. P. 905.
7. *Madland D.G., Nix J.R.* // Nucl. Phys. A. 1988. V. 476. P. 1.
8. *Власников А.К., Зиппа А.И., Михайлов В.М.* // Изв. РАН. Сер. физ. 2017. Т. 81. С. 1325; *Vlasnikov A.K., Zippa A.I., Mikhajlov V.M.* // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2017. V. 81. P. 1184.
9. *Wang M., Audi G., Kondev F.G. et al.* // Chin. Phys. C. 2017. V. 41. № 3. Art. № 030003.
10. *Mikhajlov V.M., Vlasnikov A.K., Zippa A.I.* // Int. Sci. Forum “Nuclear Science and Technologies” (Almaty, 2017). P. 56.