

УДК 539.143

МАССЫ И ПАРНЫЕ ЭНЕРГИИ ДЕФОРМИРОВАННЫХ ЯДЕР

© 2020 г. А. К. Власников^{1, *}, А. И. Зиппа¹, В. М. Михайлов¹

¹Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования “Санкт-Петербургский государственный университет”, Санкт-Петербург, Россия

*E-mail: a.vlasnikov@spbu.ru

Поступила в редакцию 11.05.2020 г.

После доработки 02.06.2020 г.

Принята к публикации 26.06.2020 г.

Рассмотрено описание полиномами не выше второго порядка массовых поверхностей и парных энергий ряда четно-четных и нечетных деформированных ядер с массовыми числами в диапазоне от 150 до 190. Применен подход, в котором парная энергия зависит от массы одного нечетного ядра. Показано, что в рамках этого подхода сохраняются основные особенности поведения парных энергий.

DOI: 10.31857/S0367676520100282

Большую роль в свойствах атомных ядер играют эффекты парных корреляций [1–4], основную информацию о которых извлекают из величины парных энергий: протонных P_p и нейтронных P_n . Традиционно для определения P_n энергию нечетно-нейтронного ядра сравнивают с энергиями соседних четно-четных изотопов, а для определения P_p используют энергии соседних четно-четных изотопов. Однако можно поставить вопрос об обоснованности выбора именно данных четно-четных изотопов или изотонов. Возможно, энергии других четно-четных ядер для определения парных энергий подойдут лучше. Другие четно-четные ядра можно включить в рассмотрение, если энергии ядер $E(N + s, Z + t)$ с количеством нейтронов $N + s$ и количеством протонов $Z + t$ (s и t принимают целочисленные значения, как положительные, так и отрицательные) можно в ближайших окрестностях заданных значений N и Z ($\frac{|s|}{N} \sim \frac{|t|}{Z} < 0.05$) представить как поверхность n -го порядка:

$$E(N + s, Z + t) = \frac{1}{2} [1 - (-1)^{N+s}] P_n + \frac{1}{2} [1 - (-1)^{Z+t}] P_p + \mathcal{E}(N, Z) + \sum_{i+k>0} d_{in, kp} s^i t^k / (i! k!). \quad (1)$$

Уравнение (1) справедливо для нечетных ядер и четно-четных ядер, нечетно-нечетные ядра здесь не рассматриваются.

Было бы идеально, если бы P_τ , $\mathcal{E}(N, Z)$ и параметры $d_{in, kp}$, определенные по различным группам соседних ядер, совпадали. Однако как показано в работах [5, 6], расширение массовой или энергетической поверхностей до 4 и 6 порядков не приводит к сближению $\mathcal{E}(N, Z)$ и параметров первого и второго порядков, рассчитанных по различным группам ядер. Поэтому в этой статье рассматриваются только поверхности первого и второго порядков ($i + k \leq 2$).

Традиционно (см., например, [1, 2]) при расчете парных энергий используются энергии двух соседних нечетных атомных ядер, что приводит к усреднению парных энергий. Действительно, в деформированных ядрах с N_{odd} и $N_{odd} + 2$ или Z_{odd} и $Z_{odd} + 2$ нечетный нуклон, как правило, находится в ином квантовом состоянии. Поэтому в работе [7] было предложено определение парных энергий, более подходящее для деформированных атомных ядер, включающее энергию только одного нечетного ядра:

$$P_n(N_{odd}, Z_{even}) = E(N_{odd}, Z_{even}) - \frac{9}{16} [E(N_{odd} + 1, Z_{even}) + E(N_{odd} - 1, Z_{even})] + \frac{1}{16} [E(N_{odd} + 3, Z_{even}) + E(N_{odd} - 3, Z_{even})]. \quad (2)$$

Для получения P_p надо произвести замену $n \leftrightarrow p$; $N \leftrightarrow Z$ и перестановку N на первое место. Как показали расчеты в [7], различия в значениях P_τ для соседних изотопов или изотонов могут до-

Таблица 1. Сравнение значений $E(N, Z) - \mathcal{E}(N, Z)$ для четно-четных ядер в различных приближениях

Нуклид	$E(N, Z) - \mathcal{E}(N, Z)$, кэВ		
	приближение s	приближение t	приближение st
$^{154}_{64}\text{Gd}_{90}$	-128.6 ± 2.0	-8.9 ± 19.2	128.8 ± 10.2
$^{160}_{66}\text{Dy}_{94}$	-29.6 ± 8.6	-53.1 ± 9.2	-68.2 ± 18.4
$^{170}_{70}\text{Yb}_{100}$	37.7 ± 1.4	29.9 ± 16.9	-8.8 ± 33.9
$^{180}_{74}\text{W}_{106}$	74.6 ± 13.6	-77.6 ± 11.3	-55 ± 61
$^{188}_{76}\text{Os}_{112}$	-21.0 ± 1.1	-179.0 ± 7.2	12.4 ± 9.7

стигать ~ 250 кэВ. Поэтому расчеты P_τ в настоящей работе будут основаны на выражении (2).

Для расчета парных энергий и параметров энергетической поверхности в окрестностях четно-четных и нечетно-нечетных ядер выбрана область деформированных ядер $150 < A < 190$. Этот выбор обусловлен тремя причинами. Во-первых, возможностью приписать, как правило, определенные нильссоновские квантовые числа основным состояниям нечетных атомных ядер. Во-вторых, схожестью структуры этих ядер: только на границах рассматриваемой области приходится использовать в расчетах энергии переходных атомных ядер. В третьих, в рассматриваемом диапазоне массовых чисел гораздо больше измеренных масс, чем в обширной области деформированных ядер с $A > 220$.

Использованные в настоящей работе атомные массы взяты из [8]. При получении ядерных масс учтены энергии связи электронов на основе [9]. Как было показано в [6], парная энергия для заданных значений N и Z может быть рассчитана, если уравнение для “гладкой” составляющей энергетической поверхности представить как полином второго порядка по отклонениям от заданных значений N и Z . Однако значения параметров зависят от выбора ядер, на основе которых рассчитаны коэффициенты этого полинома, что можно считать погрешностью такого описания. Для четно-четных ядер возможны три группы. В первую входят атомные ядра—изотопы (s -приближение), во вторую — ядра—изотоны (t -приближение), в третьей изменяются как s , так и t (st -приближение), причем во всех случаях s и t — четные числа. Уравнение для $e(s, t)$ может быть использовано для расчета “четных” параметров $\mathcal{E}(N, Z)$, d_{2n} , d_{2p} , d_{1n1p} , уравнение для $o(s, t)$ — “нечетных” d_{1n} , d_{1p} (см. Приложение А). Представляет интерес точность описания эмпирической энергетической поверхности $E(N, Z)$ расчетными значениями $\mathcal{E}(N, Z)$.

Их разность представлена в табл. 1. Выражения, используемые при расчете $\mathcal{E}(N, Z)$, d_{1n} , d_{1p} , d_{2n} , d_{2p} , d_{1n1p} в различных приближениях, приведены в приложении А. Как следует из табл. 1, модуль разности значений экспериментальной и расчетной энергий (~ 20 – 180 кэВ, в среднем ~ 200 кэВ) много меньше самих значений (~ 1.2 – 1.5 ГэВ), то есть относительная погрешность менее 0.01%.

Если приравнять $\mathcal{E}(N, Z)$ и $E(N, Z)$, то три приближения можно использовать для предсказания значений массы и энергии ядер, для которых эти величины не измерены. Этот подход подобен хорошо известному уравнению Гарви и Келсона [10], но содержит энергии только четно-четных ядер и заранее очевидно, что точность предсказания около 200 кэВ, по крайней мере в области $150 < A < 190$.

В табл. 2 показаны параметры $d_{1\tau}$, $d_{2\tau}$ для четно-четных ядер, полученные в разных приближениях (обозначены в скобках при каждом параметре). Максимальная разность параметров $|d_{1n}(s) - d_{1n}(st)| \sim 600$ кэВ, минимальная ~ 15 кэВ. Приблизительно то же самое наблюдается для $|d_{1p}(s) - d_{1p}(st)|$. Максимальное отличие в рассматриваемых коэффициентах получено для ^{188}Os . Возможно, это связано с изменением структуры атомных ядер, используемых для расчета $d_{1\tau}$.

Все атомные ядра в табл. 1 и 2 выбраны так, чтобы иметь максимальную энергию связи, то есть минимальную энергию $E(N, Z)$ при заданном A . Значения $d_{1n}(st) - d_{1p}(st)$, рассчитанные на основе таблиц, в очередной раз подтверждают, что

$$\begin{aligned}
 d_{1n} - d_{1p} &\neq \frac{d}{dN} E(N, Z, A = \text{const}) = \\
 &= \left(\frac{\partial}{\partial N} - \frac{\partial}{\partial Z} \right) E(N, Z, A = \text{const}),
 \end{aligned}
 \quad (3)$$

Таблица 2. Значения параметров разложения энергетической поверхности для четно-четных ядер в различных приближениях

Параметры, кэВ	Ядро				
	$^{154}_{64}\text{Gd}_{90}$	$^{160}_{66}\text{Dy}_{94}$	$^{170}_{70}\text{Yb}_{100}$	$^{180}_{74}\text{W}_{106}$	$^{188}_{76}\text{Os}_{112}$
$d_{1n}(s)$	−7528.3(0.4)	−7514.9(0.6)	−7489.7(0.3)	−7531.1(4.8)	−6998.3(0.2)
$d_{1n}(st)$	−7492.2(36.8)	−7500.1(30.3)	−7510.7(18.5)	−7371.3(3.7)	−7569.6(70.4)
$d_{1p}(t)$	−6112.8(0.4)	−6076.8(0.4)	−5505.7(6.1)	−5184.4(5.4)	−6076.0(0.4)
$d_{1p}(st)$	−6076.6(36.8)	−6125.0(30.3)	−5629.4(18.5)	−5085.6(3.7)	−5502.2(70.4)
$d_{2n}(s)$	−21.8(0.5)	174.3(0.2)	191.4(0.6)	192.2(2.8)	131.1(0.2)
$d_{2n}(st)$	99.9(28)	218.0(1.7)	193.5(9.8)	137.8(15.2)	236.7(3.7)
$d_{2p}(t)$	55.5(2.1)	556.8(1.6)	551.6(3.1)	521.4(2.2)	528.9(3.6)
$d_{2p}(st)$	529.3(2.8)	596.5(1.7)	545.5(9.8)	451.8(15.2)	611.8(3.7)
$d_{2n} + d_{2p} - 2d_{1nlp}(st)$	1204.5(4.4)	1371.5(2.2)	1290.0(14.4)	1257.2(30.0)	1149.3(4.4)

так как производная должна быть равно нулю в минимуме $E(N, Z, A = \text{const})$. Если допустить, что s и t могут принимать дробные значения, то уравнение для $E(N + s, Z + t, A = \text{const})$ при $\Delta A = |s + t| = 0$ (т.е. при $t = -s$) принимает вид:

$$E(N + s, Z - s) = \mathcal{E}(N, Z) + s(d_{1n} - d_{1p}) + \frac{s^2}{2}(d_{2n} + d_{2p} - 2d_{1nlp}), \quad (4)$$

так как $d/dN = d/ds$. Отсюда:

$$s_{\min} = (d_{1n} - d_{1p}) / (d_{2n} + d_{2p} - 2d_{1nlp}). \quad (5)$$

Подставляя в (5) значения параметров d из табл. 2, получаем $s_{\min} \sim 0.9\text{--}1.9$, что не соответствует действительности.

Параметры $d_{2\tau}$ в различных приближениях отличаются в основном не более чем на ~ 100 кэВ. Однако в ^{154}Gd $d_{2p}(st) - d_{2p}(t) \sim 500$ кэВ. Значения d_{2p} больше, чем d_{2n} . Причина заключается в кулоновском взаимодействии, вклад которого в этой массовой области при оценке на основе формулы Вайцзеккера составляет ~ 400 кэВ.

Для ядер, используемых в st приближении, изменение проекции изоспина часто весьма значительно. Как правило энергии ядер, входящих в расчет $e(s, -t)$ и $o(s, -t)$ (s, t положительные),

$$2\Delta T_Z = |(N - Z) - (N + s) + (Z - t)| = |s + t| \quad (6)$$

известны с большими экспериментальными погрешностями, что влияет на параметры st -приближения.

В отличие от четно-четных ядер, для которых $E(N, Z) - \mathcal{E}(N, Z)$ в идеальном случае должно

быть равно нулю, в нечетных нейтронных ядрах эта разность равна парной энергии P_n :

$$P_n(N_{\text{odd}}, Z_{\text{even}}) = E(N_{\text{odd}}, Z_{\text{even}}) - \mathcal{E}(N_{\text{odd}}, Z_{\text{even}}), \quad (7)$$

а в нечетных протонных ядрах — P_p :

$$P_p(N_{\text{even}}, Z_{\text{odd}}) = E(N_{\text{even}}, Z_{\text{odd}}) - \mathcal{E}(N_{\text{even}}, Z_{\text{odd}}). \quad (8)$$

Ниже индекс “odd” будет сохранен для нечетных чисел нуклонов, в то время как N_{even} и Z_{even} будут без индексов.

Отметим, что s -приближение возможно только для нечетно-нейтронных ядер, в то время как t -приближение — только для нечетно-протонных ядер. Кроме того, st -приближение отличается для нечетно-нейтронных и нечетно-протонных ядер.

По аналогии с четно-четными ядрами, мы выбрали пять нечетных атомных ядер, обладающих максимальной энергией связи (то есть минимальной энергией ядра E) среди других ядер с одинаковым A , причем в этом случае экспериментальные энергии E включают парные энергии P . Парные энергии, рассчитанные в различных приближениях, приведены в табл. 3.

В s - и t -приближениях $\Delta A = |s + t| = 1$ и 3 (s и t положительны и отрицательны), поэтому для расчета st -приближения выбраны энергии ядер с $\Delta A \leq 3$.

Для различных приближений различия в парных энергиях и в параметрах $\mathcal{E}$ совпадают. Например, для нейтронов:

$$P_n(N_0, Z; (st)) - P_n(N_0, Z; s) = \mathcal{E}(N_0, Z; s) - \mathcal{E}(N_0, Z; (st)). \quad (9)$$

Таким образом, разница между P_τ в s -, t - и st -приближениях вызвана только параметрами $\mathcal{E}$.

Таблица 3. Парные энергии и параметры разложения (кэВ) массовой поверхности нечетных атомных ядер

Параметры	Ядро				
	$^{157}_{64}\text{Gd}_{93}$	$^{165}_{67}\text{Ho}_{98}$	$^{171}_{70}\text{Yb}_{101}$	$^{175}_{71}\text{Lu}_{104}$	$^{179}_{72}\text{Hf}_{107}$
τ	n	p	n	p	n
$P_{\tau}(s\text{-или } t\text{-приближение})$	897.2(1.4)	862.5(1.3)	796.16(0.07)	894.2(1.8)	743.6(1.8)
$P_{\tau}(st) - P_{\tau}$	-19.4(4)	-102(25)	-82(28)	-174(22)	328(63)
$d_{1\tau}(s\text{-или } t\text{-приближение})$	-7148.58(0.90)	-6614.55(0.7)	-7337.13(0.09)	-5968.90(0.70)	-6743.4(1.0)
$d_{1\tau}(st)$	-7013.4(2.5)	-6795(41)	-7209.1(9.3)	-6244(85)	-6612(90)
$d_{2\tau}(s\text{-или } t\text{-приближение})$	196.98(0.33)	631.94(0.55)	186.63(0.14)	582.0(2.0)	198.58(0.83)
$d_{2\tau}(st)$	203.5(2.3)	600(20)	181.1(7.4)	555(44)	236(44)

Другие параметры ($d_{1\tau}$ и $d_{2\tau}$) имеют тот же порядок величины, как и для четно-четных атомных ядер и отличаются от значений в st -приближении приблизительно настолько же, насколько в четно-четных ядрах.

Из табл. 1–3 можно сделать вывод, что описание энергетической поверхности в окрестностях четно-четных и нечетных ядер на основании точек, соответствующих четно-четным ядрам, достаточно приближенно, причем точность, с кото-

рой определяются параметры, можно увидеть из приведенных таблиц.

На основании предложенного подхода нами были рассчитаны протонные и нейтронные парные энергии для ряда деформированных атомных ядер в рассматриваемой области. На рис. 1 показано изменение поведения нейтронных парных энергий для нечетных изотопов с $N = 93$. В этом случае нечетный нейтрон находится в состоянии

с нильссоновскими квантовыми числами $[521]_{\frac{3}{2}}^{-}$.

Парные энергии рассчитаны с помощью двух различных приближений для описания “гладкой” составляющей энергии ядра: s - (круги) и st - (треугольники) приближений. Кроме того, вычислено среднее от этих двух значений (квадраты), и проведено сравнение с распространенным приближенным выражением для парной энергии:

$$P_n = \frac{\mathcal{K}}{A^{1/3}} \left[1 - \kappa \left(\frac{N-Z}{A} \right)^2 \right] \quad (10)$$

(сплошная линия). Как следует из рис. 1, данная аппроксимация, расходясь в деталях описания конкретных значений парных энергий, правильно передает уменьшение нейтронных парных энергий изотопов при увеличении количества протонов. Заметное расхождение между даваемыми данной формулой и рассчитанными в данной работе парными энергиями в данном случае обусловлено большим значением P_n в st -приближении, которое имеет значительную погрешность и существенно превосходит P_n в s -приближении. Это подтверждается рис. 2, на котором показаны нейтронные парные энергии для изотопов с $N = 95$, в которых не-

четный нейтрон находится в состоянии $[523]_{\frac{5}{2}}^{-}$.

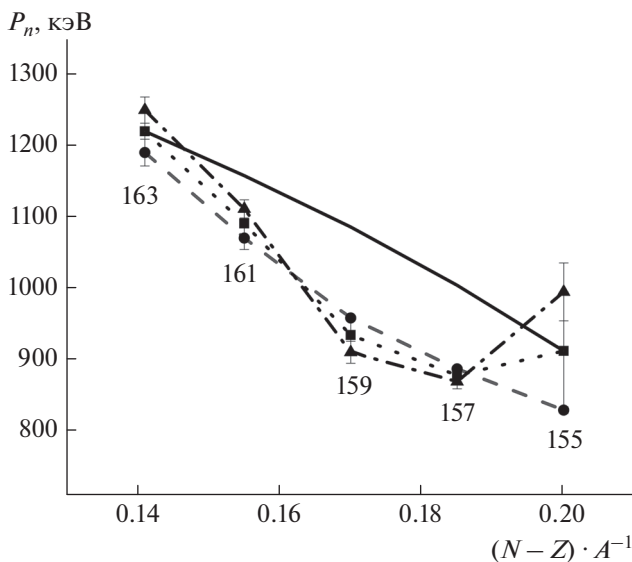


Рис. 1. Значения нейтронной парной энергии в зависимости от величины $(N-Z)/A$ для нечетных изотопов с $N = 93$. Круги — результат расчетов в s -приближении, треугольники — в st -приближении, квадраты — средние значения, сплошная линия — расчет по формуле (10). Числа под точками — значения A .

Приложение А. Параметры поверхности второго порядка для описания энергий чётно-чётных ядер (N и Z чётные)

Определим функции $e(s, t)$ и $e(2, 0)$:

$$e(s, t) \equiv E(N + s, Z + t) + E(N - s, Z - t) = 2\mathcal{E}(N, Z) + 2 \sum_{\substack{i, k \geq 0 \\ i+k=2\mu \\ \mu=1; 2; 3; \dots}} d_{in, kp} \frac{s^i t^k}{i! k!};$$

$$o(s, t) \equiv E(N + s, Z + t) - E(N - s, Z - t) = 2 \sum_{\substack{i, k \geq 0 \\ i+k=2\nu+1 \\ \nu=1; 2; 3; \dots}} d_{in, kp} \frac{s^i t^k}{i! k!}.$$

s -приближение.

$$E(N, Z) - \mathcal{E}(N, Z) = E(N, Z) - \frac{1}{6}[4e(2, 0) - e(4, 0)].$$

$$d_{1n} = o(2, 0)/4; \quad d_{2n} = \frac{1}{12}[-e(2, 0) + e(4, 0)].$$

t -приближение.

$$E(N, Z) - \mathcal{E}(N, Z) = E(N, Z) - \frac{1}{6}[4e(0, 2) - e(0, 4)].$$

$$d_{1p} = o(0, 2)/4; \quad d_{2p} = \frac{1}{12}[-e(0, 2) + e(0, 4)].$$

st -приближение.

$$\begin{aligned} E(N, Z) - \mathcal{E}(N, Z) &= E(N, Z) - \frac{1}{6}[4e(2, -2) - e(4, -4)]. \\ d_{1n} &= \frac{1}{8}[o(2, -2) + o(4, -2) - o(2, -4)]. \\ d_{1p} &= \frac{1}{8}[-o(2, -2) + o(4, -2) - o(2, -4)]. \\ d_{2n} &= \frac{1}{24}\left[e(4, -4) - \frac{5}{2}e(2, -2) + \frac{3}{2}e(2, 2) + e(4, -2) - e(2, -4)\right]. \\ d_{2p} &= d_{2n} - \frac{1}{12}[e(4, -2) - e(2, 4)]; \\ d_{2n} + d_{2p} - 2d_{1np} &= \frac{1}{2}[e(4, -4) - e(2, -2)]. \end{aligned}$$

Приложение Б. Параметры поверхности второго порядка для описания энергий нечётных ядер

Нечётно-нейтронные ядра.

s -приближение.

$$d_{1n} = o(1, 0)/2; \quad d_{2n} = \frac{1}{8}[e(3, 0) - e(1, 0)].$$

P_τ , кэВ

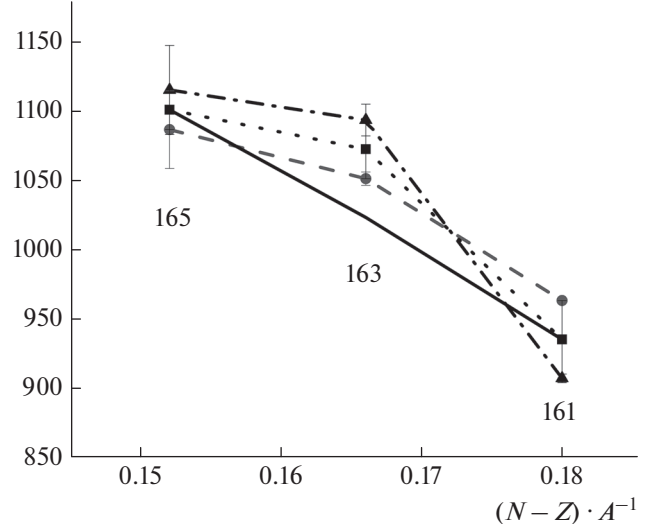


Рис. 2. Значения нейтронной парной энергии в зависимости от величины $(N - Z)/A$ для нечётных изотонов с $N = 95$. Обозначения такие же, как на рис. 2.

$(st)_n$ -приближение.

$$\begin{aligned} d_{1n} &= \frac{1}{4}[o(3, -2) - o(1, -4)]; \\ d_{2n} &= \frac{1}{8}[e(1, 2) + e(3, -2) - 2e(1, -2)]; \\ d_{1n} - d_{1p} &= \frac{1}{8}[o(3, -2) + o(1, -2)]. \end{aligned}$$

Здесь $e(s, t)$ и $o(s, t)$ – функции $E(N_{odd} + s, Z + t)$, где N_{odd} – нечётное число и Z – чётное число.

Нечётно-протонные ядра.

t -приближение.

$$d_{1p} = o(0, 1)/2; \quad d_{2p} = \frac{1}{8}[e(0, 3) - e(0, 1)].$$

$(st)_p$ -приближение.

$$\begin{aligned} d_{1p} &= \frac{1}{4}[o(-2, 3) - o(-2, 1)]; \\ d_{2p} &= \frac{1}{8}[e(2, 1) + e(-2, 3) - 2e(-2, 1)]; \\ d_{1n} - d_{1p} &= -\frac{1}{8}[o(-2, 3) + o(-2, 1)]. \end{aligned}$$

Здесь $e(s, t)$ и $o(s, t)$ – функции $E(N + s, Z_{odd} + t)$, где N – чётное число и Z_{odd} – нечётное число.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бор О., Моттельсон Б.Р. Структура атомного ядра. Т. 1. М.: Мир, 1971. 456 с.

2. Соловьев В.Г. Теория сложных ядер. М.: Наука, 1971. 560 с.
3. Айзенберг И., Грайнер В. Микроскопическая теория ядра. М.: Атомиздат, 1976.
4. Madland D.G., Nix J.R. // Nucl. Phys. A. 1988. V. 476. P. 1.
5. Власников А.К., Зиппа А.И., Михайлов В.М. // Изв. РАН. Сер. физ. 2017. Т. 81. С. 1325; Vlasnikov A.K., Zippa A.I., Mikhajlov V.M. // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2017. V. 81. P. 1184.
6. Власников А.К., Зиппа А.И., Михайлов В.М. // Изв. РАН. Сер. физ. 2020. Т. 84. С. 1112; Vlasnikov A.K., Zippa A.I., Mikhajlov V.M. // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2020. V. 84. № 8. P. 919.
7. Власников А.К., Зиппа А.И., Михайлов В.М. // Изв. РАН. Сер. физ. 2016. Т. 80. С. 989; Vlasnikov A.K., Zippa A.I., Mikhajlov V.M. // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2016. V. 80. P. 905.
8. Wang M., Audi G., Kondev F.G. et al. // Chin. Phys. C. 2017. V. 41. № 3. Art. № 030003.
9. Lunney D., Pearson J.M., Thibault C. // Rev. Mod. Phys. 2003. V. 75. P. 1021.
10. Garvey G.T., Kelson I. // Phys. Rev. Lett. 1966. V. 16. P. 197.