ИЗВЕСТИЯ РАН. СЕРИЯ ФИЗИЧЕСКАЯ, 2020, том 84, № 2, с. 266–271

УДК 534.2,517.9

РАССЕЯНИЕ ЗАПАЗДЫВАЮЩИХ ВОЛНОВЫХ ПОЛЕЙ НА ТОЧЕЧНОЙ АКУСТИЧЕСКОЙ НЕОДНОРОДНОСТИ

© 2020 г. К. В. Дмитриев[1], Е. В. Фадеев[1], О. Д. Румянцева[1, *]

[1]Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования "Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова", физический факультет, Москва, Россия

*E-mail: burov@phys.msu.ru

Поступила в редакцию 26.08.2019 г.
После доработки 13.09.2019 г.
Принята к публикации 28.10.2019 г.

Рассмотрено рассеяние монохроматической волны на неоднородности с малым волновым размером. Введены коэффициенты рассеяния, и получены множества их допустимых значений в отсутствие и в присутствии поглощения внутри неоднородности. Для различных значений коэффициентов рассеяния проанализировано решение обратной задачи рассеяния, с точки зрения адекватности результата восстановления и его устойчивости.

DOI: 10.31857/S036767652002009X

ВВЕДЕНИЕ

Распространение акустических волн в метаматериале можно рассматривать, с одной стороны, как процесс, протекающий в однородной среде с некоторыми эффективными параметрами. С другой стороны, тот же процесс может быть описан с точки зрения многократного рассеяния волн на всех элементах метаматериала. Представляет интерес тот случай, когда размер элемента метаматериала много меньше длины волны в нем (случай малого волнового размера) – именно тогда среду можно описывать с помощью эффективных параметров.

Одиночный элемент метаматериала в виде квазиточечной неоднородности с плотностью $\rho(\vec{z})$ и фазовой скоростью звука $c(\vec{z})$ интересен при решении как прямой, так и обратной задач рассеяния. Показано [1–3], что фаза и амплитуда поля, рассеянного такой неоднородностью, являются взаимозависимыми. Это накладывает ограничения на максимальную мощность рассеянного поля [4]. При решении обратной задачи рассеяния такая взаимосвязь позволяет не измерять фазу рассеянного поля – достаточно данных только об абсолютной величине амплитуды рассеяния [5].

Акустические поля, рассеянные неоднородностями плотности $\rho(\vec{z})$ и сжимаемости $\eta(\vec{z}) \equiv \equiv 1\Big/\left(\rho(\vec{z})c^2(\vec{z})\right)$, можно разложить в ряд, каждый член которого соответствует определенному порядку мультипольности (т.е. определенному характеру угловой зависимости поля). В случае одиночной квазиточечной неоднородности, линейный размер которой много меньше длины волны, при описании оказывается возможным ограничиться монопольным и дипольным порядками мультипольности [3], за исключением узких диапазонов значений характеристик рассеивателя, когда возникают резонансы.

Если среда в присутствии рассеивателя однородна по плотности, то может быть достаточно только одного монопольного члена [1]. Именно такой случай рассматривается ниже. Пусть первичные источники создают в фоновой (когда рассеиватель отсутствует) однородной непоглощающей среде падающее акустическое поле $u_0^{\pm}(\vec{z})$. Верхними индексами "+" и "–" здесь и далее обозначаются величины, относящиеся к запаздывающему полю, расходящемуся на бесконечности и удовлетворяющему принципу излучения Зоммерфельда, и опережающему полю, сходящемуся с бесконечности и не удовлетворяющему принципу излучения Зоммерфельда, соответственно. Тогда в присутствии в области $\Re$ рассеивателя в виде квазиточечной неоднородности с центром в точке $\vec{r}_0$ полное акустическое поле $u^{\pm}(\vec{z})$ в произвольной точке $\vec{z}$ подчиняется уравнению Липпмана–Швингера:

$$u^{\pm}(\vec{z}) = u_0^{\pm}(\vec{z}) + \int_{\Re} G_0^{\pm}(\vec{z}-\vec{r})v(\vec{r})u^{\pm}(\vec{r})d\vec{r}. \qquad (1)$$

Здесь G_0^+ и G_0^- – запаздывающая и опережающая функции Грина однородной фоновой среды, ана-

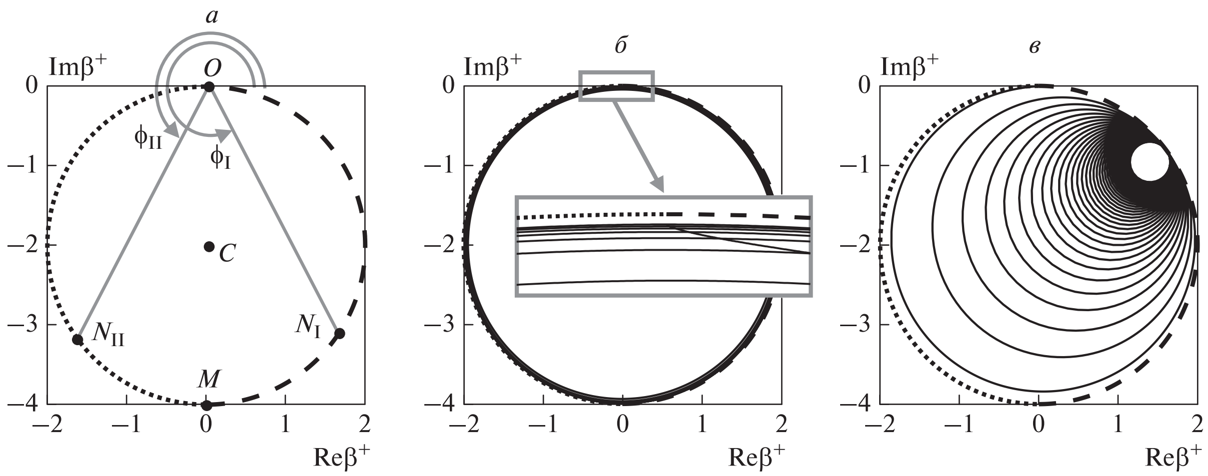

Рис. 1. Допустимые значения коэффициента рассеяния β^+ на комплексной плоскости для монопольной квазиточечной неоднородности. В отсутствие поглощения (*а*) семейство I значений β^+ изображено пунктирной линией; семейство II – линией, составленной из точек. В случае неоднородности с поглощением возможные значения β^+ изображены тонкой сплошной линией при фиксированном $k_1'R$ (*б*) или k_0R (*в*).

литический вид которых хорошо известен; функция рассеивателя задается в виде

$$v(\vec{r}) = k_0^2 - k_1^2(\vec{r}); \qquad (2)$$

k_0 и $k_1(\vec{r})$ – волновые числа, соответственно, вне (т.е. в фоновой среде) и внутри рассеивателя. Поскольку неоднородность является квазиточечной, и предполагается, что рассеянное ею поле $u_{sc}^{\pm}(\vec{z}) \equiv u^{\pm}(\vec{z}) - u_0^{\pm}(\vec{z})$ имеет только монопольную компоненту, выражение (1) можно упростить. Для этого вводятся комплексные коэффициенты рассеяния β^+ и β^- так, чтобы было справедливо соотношение $v(\vec{r})u^{\pm}(\vec{r}) = \beta^{\pm}\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)u_0^{\pm}(\vec{r})$ [1, 2], откуда

$$u^{\pm}(\vec{z}) = u_0^{\pm}(\vec{z}) + G_0^{\pm}(\vec{z}-\vec{r}_0)\beta^{\pm}u_0^{\pm}(\vec{r}_0). \qquad (3)$$

Отличие выражения (3) от уравнения Липпмана–Швингера (1) состоит в том, что в правой части (3) не содержится неизвестное поле внутри рассеивателя $u^{\pm}(\vec{r}_0)$. Процессы многократного рассеяния учитываются при этом с помощью коэффициентов $\beta^{\pm}$, которые зависят от параметров рассеивателя, но не явно, и для определения значений $\beta^{\pm}$ необходимо, в общем случае, выполнить расчеты для заданной функции $v(\vec{r})$. Эти коэффициенты подчиняются соотношению

$$\frac{1}{\beta^-} - \frac{1}{\beta^+} = -\frac{i}{2}; \qquad (4)$$

здесь и далее рассматривается двумерный случай при временно́й зависимости как запаздывающих, так и опережающих полей ~exp($-i\omega t$).

НЕПОГЛОЩАЮЩИЙ РАССЕИВАТЕЛЬ

В отсутствие поглощения β^+ и β^- являются комплексно сопряженными: $\beta^{\pm} = |\beta|\exp(\pm i\phi)$, где $|\beta|$ и $\pm\phi$ – модуль (амплитуда) и фаза коэффициентов рассеяния. Тогда из (4) следует, что между амплитудой и фазой имеет место связь [1]:

$$|\beta| = -4\sin\phi. \qquad (5)$$

Геометрическое место точек на комплексной плоскости, соответствующих допустимым значениям (5) комплексного коэффициента рассеяния β^+ для запаздывающего поля, представляет собой окружность, проходящую через начало координат O и имеющую центр в точке C с координатами (0; −2) (рис. 1*а*). В этой точке O будет $\beta^+ = 0$, что означает отсутствие рассеянного поля $u_{sc}^{\pm}(\vec{z})$. Тогда $|\beta| = 0$, $\phi = \pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$; причем случай $\phi = 0$ означает отсутствие рассеивателя, а случай $\phi = \pi n$ при $n \neq 0$ соответствует сильным рассеивателям, которые, однако, не создают рассеянного наружу поля.

Одинаковая амплитуда коэффициента рассеяния $|\beta|$ достигается в двух различных точках окружности (например, точки N_{I} и N_{II} на рис. 1*а*). Поэтому вводятся два семейства рассеивателей: для семейства I выбирается решение уравнения (5) относительно ϕ в виде $\phi_{\mathrm{I}} = \arcsin\left(-|\beta|/4\right) + 2\pi n$; для семейства II – в виде $\phi_{\mathrm{II}} = \pi - \arcsin\left(-|\beta|/4\right) + 2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$. На рис. 1*а* этим семействам I и II соответствуют правая и левая половины окружности. Максимальная амплитуда коэффициента рассеяния $|\beta| = 4$ достигается в точке M (рис. 1*а*) при $\phi = 3\pi/2 + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Представляет интерес обратная задача – восстановление характеристик рассеивателя по проведенным измерениям (вне рассеивателя, т.е. при $\vec{z} \notin \Re$) рассеянного им поля $u_{\mathrm{sc}}^{\pm}(\vec{z})$. Слабые квазиточечные рассеиватели, которые слабо искажают падающее на них поле, обладают близкой к нулевой амплитудой $|\beta|$ и фазой, близкой к 0 для семейства I, и близкой к π для семейства II. При этом коэффициент рассеяния β^{+} лежит вблизи точки O. Именно такое скачкообразное изменение фазы на π обуславливает, с физической точки зрения, деление рассеивателей на два семейства. Слабые рассеиватели должны восстанавливаться хорошо. Квазиточечные рассеиватели с коэффициентом β^{+}, лежащим вблизи точки M, являются, наоборот, очень сильными (сильно искажают падающее поле); как следствие, их восстановление в монохроматическом режиме сталкивается с проблемами неединственности и неустойчивости [6]. Вообще, к сильным относятся и другие рассеиватели – с меньшим $|\beta|$, но $|\phi| > 2\pi$. С другой стороны, на первый взгляд кажется, что рассеиватели семейств I и II с одинаковой амплитудой $|\beta|$ и соответствующей фазой $\phi_{\mathrm{I}} = -\arcsin\left(|\beta|/4\right)$ и $\phi_{\mathrm{II}} = \pi + \arcsin\left(|\beta|/4\right)$ должны иметь близкую силу и, тем самым, восстанавливаться с примерно одинаковым качеством. Однако это не так, и данная ситуация будет обсуждаться ниже.

Для слабых рассеивателей можно применить в исходном уравнении Липпмана–Швингера (1) борновское приближение $u^{\pm}(\vec{r}) \approx u_0^{\pm}(\vec{r})$ и, тем самым, с учетом (3), получить оценку $\beta^{+} \approx \int_{\Re} v(\vec{r})d\vec{r} = \int_{\Re}\left(k_0^2 - k_1^2(\vec{r})\right)d\vec{r} \approx \pi R^2\left(k_0^2 - k_{1\,\mathrm{avg}}^2\right)$. Здесь R и $k_{1\,\mathrm{avg}}$ – характерный радиус неоднородности и среднее волновое число внутри нее. Если скорость звука внутри рассеивателя больше фоновой (рассеиватель дефокусирующий), то $k_{1\,\mathrm{avg}} < k_0$ и получается $\beta^{+} > 0$ – рассеиватель относится к семейству I. Аналогично, если скорость звука внутри рассеивателя меньше фоновой (рассеиватель фокусирующий), то $k_{1\,\mathrm{avg}} > k_0$ и $\beta^{+} < 0$ – рассеиватель относится к семейству II. Меньшая, по сравнению с фоновой, скорость звука приводит к концентрации поля внутри рассеивателя, фокусировке поля, что увеличивает силу рассеивателя. Наоборот, бóльшая скорость звука приводит к дефокусировке поля и, тем самым, уменьшает силу рассеивателя. Поэтому для одного и того же значения $|\beta|$ рассеиватели семейства II при $\phi_{\mathrm{II}} = \pi + \arcsin\left(|\beta|/4\right)$ оказываются более сильными, чем рассеиватели семейства I при $\phi_{\mathrm{I}} = -\arcsin\left(|\beta|/4\right)$, и восстановление рассеивателей семейства II более проблематично. Чем больше фиксированное значение $|\beta|$, тем больше различие по силе между соответствующей парой рассеивателей из семейств I и II.

Возможен подход к анализу рассеянного неоднородностью поля с точки зрения значения дополнительного набега фазы $\Delta\psi$, который создает неоднородность для распространяющегося через нее поля. Этот дополнительный набег при распространении волны вдоль центрального сечения неоднородности оценивается как

$$\Delta\psi = \int_{-R}^{R}\left(k(\vec{r}) - k_0\right)dl_{\vec{r}} \approx 2R\left(k_{1\,\mathrm{avg}} - k_0\right), \qquad (6)$$

где $dl_{\vec{r}}$ – длина элемента траектории в окрестности точки $\vec{r}$. Для дальнейшего рассмотрения важно уточнить понятие “малый волновой размер” неоднородности, поскольку такой размер можно задать двумя различными способами. Так, “внутренний” волновой размер $2k_{1\,\mathrm{avg}}R$ связан с длиной волны внутри неоднородности. “Внешний” волновой размер $2k_0R$ связан с длиной волны в фоновой среде, окружающей неоднородность.

Когда $k_{1\,\mathrm{avg}} \ll k_0$, т.е. рассеиватель относится к семейству I, из (6) вытекает $\Delta\psi \approx -2k_0R$. Тогда, если фиксировать “внешний” волновой размер неоднородности или даже рассматривать область его малых значений $k_0R \ll 1$, то будет $|\Delta\psi| \ll 1$ – не удается получить все допустимые значения набега фазы, которые характерны для семейства I. Таким образом, при рассмотрении семейства I целесообразно фиксировать малое значение именно “внутреннего” волнового размера неоднородности $2k_{1\,\mathrm{avg}}R \ll 1$ и варьировать $\dfrac{k_0}{k_{1\,\mathrm{avg}}} > 1$ (т.е. $\dfrac{k_{1\,\mathrm{avg}}}{k_0} < 1$).

Когда, напротив, $k_{1\,\mathrm{avg}} \gg k_0$, т.е. рассеиватель относится к семейству II, будет $\Delta\psi \approx 2k_{1\,\mathrm{avg}}R$. В этом случае, чтобы иметь возможность получить все значения $\Delta\psi$, характерные для семейства II, следует фиксировать малое значение “внешнего” волнового размера неоднородности $2k_0R \ll 1$ и варьировать $\dfrac{k_{1\,\mathrm{avg}}}{k_0} > 1$.

Вопросы, связанные с восстановлением непоглощающих рассеивателей семейства I, исследовались в [7]. В [8] приведены результаты восстановления непоглощающих рассеивателей обоих семейств с помощью двумерного алгоритма Новикова [9–11] в монохроматическом режиме, однако без обсуждения физических причин, приводящих к различию качества восстановления. В [8] показано, что при фазе $\phi_{\mathrm{II}} = 235.5°$ (точка N_{II} на рис. 1*a*, достаточно далекая от точки M) восстановленная оценка $\hat{v}(\vec{r})$ рассеивателя семейства II представляет собой узкий пик (с шириной $\cong\lambda_0/12$ по уровню 0.7, где λ_0 – длина волны в фоновой среде) с большой амплитудой, причем отрицательной ($\hat{v} < 0$). При незначительном увеличении фазы до $\phi_{\mathrm{II}} = 237.0°$ амплитуда пика увеличивается примерно в три раза. При этом ширина пика сужается до $\cong\lambda_0/20$, что гораздо меньше разрешающей способности двумерного алгоритма Новикова, близкой к $\lambda_0/3$ [12]. Тем самым, полученная оценка рассеивателя не может считаться достоверной. Как показало исследование, причиной ошибки в оценке служит помеха, которая вызвана присутствием существенного рассеяния назад [13], создаваемого квазиточечными рассеивателями, в сочетании с большой силой рассматриваемых рассеивателей семейства II. Негативный фактор в виде помехи такого рода является общим для всех алгоритмов решения обратных задач рассеяния. Уменьшить, в той или иной мере, влияние данной помехи можно, если ввести угловую фильтрацию данных рассеяния. Для этого обобщенная амплитуда рассеяния $h(\varphi, \varphi')$, вычисляемая из экспериментальных данных на одном из этапов алгоритма Новикова, умножается на функцию фильтра $F(|\varphi - \varphi'|)$, т.е. $h_{filtr}(\varphi,\varphi') = h(\varphi,\varphi')F(|\varphi - \varphi'|)$, где φ – угол падения эффективной плоской волны на рассеиватель; φ' – угол приема соответствующей рассеянной волны в дальней зоне. Функция фильтра ослабляет вклад рассеяния назад за счет того, что $F(|\varphi - \varphi'|) \to 0$ при $|\varphi - \varphi'| \to \pi$. Применение такой фильтрации позволяет улучшать результат восстановления рассеивателей средней силы и сильных. В частности, существенно ослабляются заведомо ложные компоненты пространственного спектра восстановленной оценки $\hat{v}(\vec{r})$, лежащие вне круга радиуса $2k_0$. Кроме того, улучшается обусловленность систем уравнений, решаемых при восстановлении, и, как следствие, улучшается устойчивость оценки $\hat{v}(\vec{r})$. При этом вышеупомянутые оценки в виде нефизически узких пиков расширяются.

В то же время, при восстановлении рассеивателей семейства I амплитудное значение оценки $\hat{v}(\vec{r})$ положительно [7, 8], и в [8] был отмечен следующий эффект. Когда амплитуда коэффициента рассеяния $|\beta|$ приближается к максимально допустимой (например, рассеиватель с $|\beta| = 3.99985$, $\phi_{\mathrm{I}} = -89.50°$), амплитудное значение оценки $\hat{v}(\vec{r})$ оказывается больше, чем k_0^2. Поскольку, согласно (2), $v(\vec{r}) = k_0^2 - k_1^2$, то в [8] говорится, что результат $\hat{v} > k_0^2$ означает, что $k_1^2 < 0$, т.е. рассеиватель не может интерпретироваться как непоглощающий рефракционный рассеиватель. Однако применение на этапе восстановления $\hat{v}(\vec{r})$ вышеупомянутого углового фильтра $F(|\varphi - \varphi'|)$ показало, что значение $\hat{v} > k_0^2$ в отсутствие фильтрации обусловлено не особыми физическими свойствами рассеивателя, а, как и для рассеивателей семейства II, помехой в виде сильного рассеяния назад в сочетании с сильно выраженными эффектами многократного рассеяния волновых полей.

Соотношение (5) справедливо в отсутствие поглощения как в фоновой среде, так и внутри неоднородности. В квантовой механике существуют похожие соотношения (оптическая теорема), которые также остаются справедливыми при отсутствии захвата частиц рассеивающим центром. Однако на практике акустические рассеиватели часто обладают поглощением, и, тем самым, встает вопрос о видоизменении соотношения (5) и геометрического места точек на комплексной плоскости, описывающего возможные значения β^+ в этом случае. Соотношение связи (4) между β^+ и β^- для монопольного квазиточечного рассеивателя в присутствии поглощения остается без изменений, позволяя, при необходимости, найти β^- из β^+.

Для анализа этих видоизменений рассматривалась двумерная задача рассеяния падающей акустической волны круглым однородным цилиндром; такая задача имеет точное аналитическое решение [14]. Волновое число внутри цилиндра задавалось как $k_1 = k_1' + ik_1''$, где действительная часть $k_1' = \omega/c_1$ связана со скоростью звука в цилиндре c_1, а мнимая часть k_1'' соответствует амплитудному коэффициенту поглощения цилиндра. Радиус цилиндра $R \to 0$. Если при этом $k_0 = \mathrm{const}$ и $k_1 = \mathrm{const}$, то получается, что набег фазы, рассчитанный согласно (6) как $\Delta\psi = 2R(k_1 - k_0)$, будет очень мал: $\Delta\psi \to 0$ (тогда и $\beta^+ \to 0$), и рассеиватель является очень слабым.

Более интересны результаты, которые можно получить (как в отсутствие поглощения, так и в его присутствии), если при уменьшении радиуса цилиндра фиксировать, в одном случае, $k_1'R$, а в другом k_0R. Тогда можно рассматривать коэффициент рассеяния β^+ как функцию от k_1'/k_0. Одновременно необходимо контролировать рассеянное поле на предмет наличия дипольной, квадрупольной и высших компонент мультипольности, поскольку в случае присутствия таких компонент единственного коэффициента β^+, ответственного за монопольное рассеяние, недостаточно, и требуется уточнение математического аппарата [2, 3].

В первом случае в отсутствие поглощения $\left(k_1'' = 0\right)$ фиксировалось $k_1R = \text{const}$. При $k_1 \geq k_0$ рассеяние монопольное, но коэффициент рассеяния $\beta^+ \approx 0$ (ближайшая левая окрестность точки O на рис. 1*а*); рассеиватель оказывается очень слабым. При уменьшении k_1 $(k_1 < k_0)$ амплитуда коэффициента рассеяния $|\beta|$ растет, а точка, изображающая значение β^+ на рис. 1*а*, двигается по окружности по часовой стрелке, что соответствует значениям β^+ семейства I. Однако, начиная с некоторого значения k_1 (например, $k_1 \approx 0.1k_0$ при $k_1R = 2\pi/128$; соответствующий коэффициент рассеяния имеет $|\beta| = 0.6238$, $\phi \equiv \phi_\text{I} = -8.97°$) и меньших значениях k_1, оказывается существенным рассеяние высших порядков мультипольности; поэтому рассматриваемая модель чисто монопольного рассеяния становится неправомерной. Таким образом, семейство I значений β^+ даже для интервала $-\pi/2 \leq \phi_\text{I} \leq 0$ описывается цилиндрическими рассеивателями не полностью.

Во втором случае в отсутствие поглощения фиксировалось $k_0R = \text{const}$. При $k_1 \leq k_0$ рассеяние монопольное, но $\beta^+ \approx 0$ (ближайшая правая окрестность точки O на рис. 1*а*). С ростом k_1 $(k_1 > k_0)$ амплитуда коэффициента рассеяния $|\beta|$ растет, а точка, изображающая значение β^+ на рис. 1*а*, двигается по окружности против часовой стрелки. Эта точка пробегает целиком значения β^+ семейства II и (например, начиная с $k_1 \approx 15.7k_0$ при $k_0R = 2\pi/128$) часть значений β^+ семейства I. При дальнейшем росте k_1 $(k_1 > 48.9k_0$ при $k_0R = 2\pi/128)$ возникает заметное рассеяние дипольного и квадрупольного порядков.

РАССЕИВАТЕЛЬ С ПОГЛОЩЕНИЕМ

Наличие поглощения $\left(k_1'' \neq 0\right)$ приводит к тому, что коэффициент β^+ перестает лежать на окружности. В первом случае фиксировалось $k_1'R = 2\pi/128$, и варьировалась действительная часть k_1' волнового числа $k_1 = k_1' + 0.5ik_0$ (т.е. здесь $k_1''/k_0 = 0.5$). Геометрическое место точек, изображающих коэффициент β^+ при $k_0/k_1' \in [1;+\infty)$, представляет собой сложную кривую (рис. 1*б*; в том числе, выноска на рис. 1*б*, показывающая фрагмент в увеличенном масштабе). Эта кривая сосредоточена, однако, возле изначальной окружности, т.е. окружности в отсутствие поглощения (на рис. 1*б* и 1*в* правая половина этой окружности по-прежнему изображена пунктирной линией, левая половина – линией, составленной из точек, как на рис. 1*а*). Подобная ситуация практически не изменяется при задании других значений k_1''/k_0.

Во втором случае при фиксированном $k_0R = 2\pi/128$ варьировалась действительная часть k_1' волнового числа $k_1 = k_1' + 0.15ik_0$, т.е. поглощение на расстоянии, равном линейному размеру цилиндра, было фиксированным ($k_1''R = 0.15k_0R$ фиксировано в силу фиксирования k_0R). Тогда точка, изображающая коэффициент β^+, двигается при $k'/k_0 \in [1;+\infty)$ по скручивающейся спирали (рис. 1*в*) с полюсом в точке $\approx 1.64 - 0.85i$ (это значение зависит только от значения $k_0R = 2\pi/128$).

Таким образом, монопольные рассеиватели малого волнового размера могут описываться единственным коэффициентом рассеяния β^+. Возможные значения этого коэффициента на комплексной плоскости лежат внутри круга, а в отсутствие поглощения – на его границе.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 19-12-00098.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Буров В.А., Морозов С.А.* // Акуст. журн. 2001. Т. 47. № 6. С. 751; *Burov V.A., Morozov S.A.* // Acoust. Phys. 2001. V. 47. № 6. P. 659.
2. *Дмитриев К.В.* // Акуст. журн. 2015. Т. 61. № 6. С. 656; *Dmitriev K.V.* // Acoust. Phys. 2015. V. 61. № 6. P. 623.
3. *Дмитриев К.В.* // Акуст. журн. 2018. Т. 64. № 2. С. 125; *Dmitriev K.V.* // Acoust. Phys. 2018. V. 64. № 2. P. 131.
4. *Дмитриев К.В.* // Изв. РАН. Сер. физ. 2015. Т. 79. № 12. С. 1700; *Dmitriev K.V.* // Bull. Russ. Acad. Sci. Physics. 2015. V. 79. № 12. P. 1488.
5. *Novikov R.G.* // Euras. J. Math. Comp. Appl. 2018. V. 6. № 1. P. 52.

6. *Буров В.А., Румянцева О.Д.* // Акуст. журн. 2003. Т. 49. № 5. С. 590; *Burov V.A., Rumyantseva O.D.* // Acoust. Phys. 2003. V. 49. № 5. P. 496.
7. *Бадалян Н.П., Буров В.А., Морозов С.А., Румянцева О.Д.* // Акуст. журн. 2009. Т. 55. № 1. С. 3; *Badalyan N.P., Burov V.A., Morozov S.A., Rumyantseva O.D.* // Acoust. Phys. 2009. V. 55. № 1. P. 1.
8. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01570494.
9. *Novikov R.G.* // Phys. Lett. A. 1998. V. 238. № 2–3. P. 73.
10. *Новиков Р.Г.* // Тр. Матем. инст. им. В.А. Стеклова. Солитоны, геометрия, топология – на перекрестках. 1999. Т. 225. С. 301; *Novikov R.G.* // Proc. V.A. Steklov Inst. Math. 1999. № 2(225). P. 285.
11. *Буров В.А., Алексеенко Н.В., Румянцева О.Д.* // Акуст. журн. 2009. Т. 55. № 6. С. 784; *Burov V.A., Alekseenko N.V., Rumyantseva O.D.* // Acoust. Phys. 2009. V. 55. № 6. P. 843.
12. *Буров В.А., Гришина И.М., Лапшенкина О.И. и др.* // Акуст. журн. 2003. Т. 49. № 6. С. 738; *Burov V.A., Grishina I.M., Lapshenkina O.I. et al.* // Acoust. Phys. 2003. V. 49. № 6. P. 627.
13. *Буров В.А., Вечерин С.Н., Морозов С.А., Румянцева О.Д.* // Акуст. журн. 2010. Т. 56. № 4. С. 516; *Burov V.A., Vecherin S.N., Morozov S.A., Rumyantseva O.D.* // Acoust. Phys. 2010. V. 56. № 4. P. 541.
14. *Бабич В.М., Капилевич М.Б., Михлин С.Г. и др.* Линейные уравнения математической физики. Справочная математическая библиотека. М.: Наука, 1964. 368 с.