

УДК 537

ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ЗОНДИРОВАНИЕ ТЕЛ В СЛАБОПРОВОДЯЩИХ СРЕДАХ

© 2020 г. Е. С. Громова¹, Г. М. Николадзе¹, П. А. Поляков¹, * , Н. Е. Русакова¹

¹Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
“Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова”, Москва, Россия

*E-mail: polyakovpa@mail.ru

Поступила в редакцию 26.08.2019 г.

После доработки 13.09.2019 г.

Принята к публикации 28.10.2019 г.

Разработана теория изменения сопротивления сплошной среды между двумя электродами при наличии в среде движущегося тела. Правильность представленных теоретических расчетов подтверждается результатами эксперимента, выполненного в рамках данной работы.

DOI: 10.31857/S0367676520020131

ВВЕДЕНИЕ

Электрорезистивный метод регистрации неоднородностей в проводящих и слабопроводящих средах широко используется, прежде всего, при геологических изысканиях [1–3]. Хорошо известен метод вертикального электростатического зондирования, который позволяет определять расположение пластов в грунте, которые обладают различным удельным сопротивлением [4–7].

В данной работе показана возможность применения электрорезистивного метода для электростатического зондирования движущихся диэлектрических и проводящих твердотельных объектов в проводящих средах. Разработана теория изменения сопротивления сплошной среды между двумя электродами при наличии в среде движущегося тела. Для проверки справедливости представленных теоретических расчетов были выполнены экспериментальные измерения сопротивления.

ОБЩАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Для того чтобы рассчитать сопротивление между двумя электродами, к которым приложена заданная разность потенциалов U при перемещении в среде третьего объемного тела (проводника или диэлектрика), необходимо решить электростатическую задачу для трех заряженных тел в слабопроводящей среде. Эта электростатическая задача в общем случае сводится к решению трехмерного уравнения Лапласа при соблюдении граничных условий на поверхности каждого из этих трех тел. Например, если все тела являются проводниками, то общая постановка задачи нахождения электрического потенциала φ в проводя-

щей среде сводится к решению следующей граничной задачи.

$$\Delta\varphi = 0, \quad \varphi|_{\Sigma_i} = \varphi_i, \quad (1)$$

где индекс $i = 1, 2, 3$ обозначает нумерацию электродов и регистрируемого тела, Σ_i – поверхность i -го тела, φ_i – постоянное значение потенциала i -го тела.

Решение эллиптического уравнения для трехмерной задачи Дирихле представляет собой сложную численную задачу, которая интересна с точки зрения теории. В данной работе разработана приближенная теория решения такой задачи для трех тел сферической формы.

ДИПОЛЬНЫЙ МОМЕНТ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ШАРА, ПОМЕЩЕННОГО ВО ВНЕШНЕЕ ОДНОРОДНОЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ

Рассмотрим задачу о поляризации диэлектрического шара, находящегося в диэлектрической среде и в постоянном электрическом поле. На рис. 1 представлен характерный вид линий напряженности электрического поля.

Пусть вектор поляризации среды \vec{P}_1 , а шара – \vec{P}_2 . Рассмотрим комбинированную среду \vec{P}_1 и эффективный шар с вектором поляризации $\vec{P}_1 - \vec{P}_2$. Поле внутри шара $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$, где \vec{E}_0 – внешнее поле, а

$$\begin{aligned} \vec{E}' &= -\frac{1}{3\epsilon_0\epsilon_1}(\vec{P}_1 - \vec{P}_2) = \\ &= -\frac{1}{3\epsilon_0\epsilon_1}(\epsilon_0\chi_1\vec{E} - \epsilon_0\chi_2\vec{E}) = -\frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{3\epsilon_1}\vec{E}, \end{aligned} \quad (2)$$

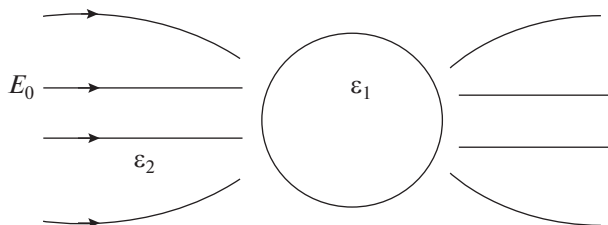


Рис. 1. Характерный вид линий напряженности электрического поля диэлектрического шара, помещенного в однородное электрическое поле E_0 .

где χ_1 и χ_2 – диэлектрические восприимчивости среды и шара, ϵ_1 и ϵ_2 – соответствующие диэлектрические проницаемости. Из этого соотношения следует, что

$$\vec{E}' = -\frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2} \vec{E}_0. \quad (3)$$

Тогда выражение для вектора поляризации шара имеет следующий вид

$$\vec{P} = \frac{3\epsilon_0\epsilon_2(\epsilon_1 - \epsilon_2)}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2} \vec{E}_0. \quad (4)$$

Таким образом во внешнем электрическом поле \vec{E}_0 диэлектрический шар с проницаемостью ϵ_1 , помещенный в однородную среду с диэлектрической проницаемостью ϵ_2 , приобретает дипольный момент [1]:

$$\vec{p} = \frac{4}{3}\pi R^3 \vec{P} = 4\pi R^3 \frac{\epsilon_0\epsilon_2(\epsilon_1 - \epsilon_2)}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2} \vec{E}_0. \quad (5)$$

В частности, если шар будет проводником, для которого можно считать диэлектрическую проницаемость $\epsilon_1 \rightarrow \infty$, то его дипольный момент будет равен $\vec{p} = 4\pi R^2 \epsilon_0 \epsilon_2 \vec{E}_0$.

ИЗМЕНЕНИЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ МЕЖДУ ДВУМЯ СФЕРИЧЕСКИМИ ЭЛЕКТРОДАМИ ПРИ ВНЕСЕНИИ В ОКРУЖАЮЩУЮ СРЕДУ ТРЕТЬЕГО СФЕРИЧЕСКОГО ТЕЛА

Рассмотрим два одинаковых сферических металлических электрода, подключенных к источнику ЭДС (см. рис. 2). Пусть на один электрод перетек электрический заряд $-q$, на другой $+q$, тогда электрическое поле \vec{E}_0 в области третьего шара, создаваемое этими зарядами, будет определяться законом Кулона

$$\vec{E}_0(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_2} \left(-\frac{q\vec{r}}{r^3} + \frac{q(\vec{r} - \vec{l})}{|\vec{r} - \vec{l}|^3} \right). \quad (6)$$

Если считать поле в области третьего шара практически однородным, то оно будет индуцировать на этом шаре электрический дипольный

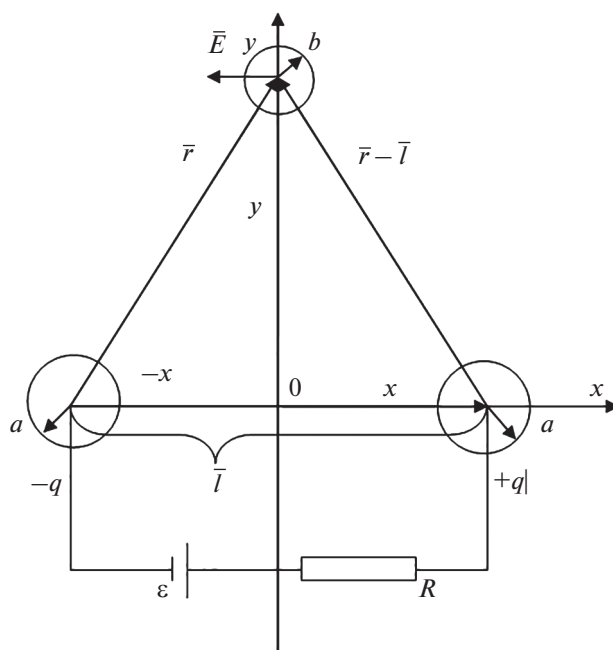


Рис. 2. Схема расположения электродов и третьего шара.

момент, описываемый формулой (6). Дипольный момент этого шара будет создавать в области первого и второго электродов электрические потенциалы ϕ'_1 и ϕ'_2 , определяемые формулами

$$\phi'_1 = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_2} \frac{(\vec{p}\vec{r})}{r^3}, \quad \phi'_2 = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_1} \frac{(\vec{p}(\vec{l} - \vec{r}))}{|\vec{l} - \vec{r}|^3}. \quad (7)$$

Вследствие того, что шаровые электроды подключены к источнику постоянного напряжения, заряды на шарах должны измениться на величины q_1 и q_2 , чтобы оставить неизменными значения потенциалов на этих электродах. Следовательно, имеем:

$$\begin{aligned} \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_1 a} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_2} \frac{(\vec{p}\vec{r})}{r^3} &= 0, \\ \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0\epsilon_2 a} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_1} \frac{(\vec{p}(\vec{l} - \vec{r}))}{|\vec{l} - \vec{r}|^3} &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Отсюда находим, что при внесении третьего шарика на электроды должны перетечь дополнительные заряды q_1 и q_2 с источника ЭДС.

$$q_1 = \frac{a}{r^3} (\vec{p}\vec{r}), \quad q_2 = -\frac{a}{|\vec{l} - \vec{r}|^3} (\vec{p}(\vec{l} - \vec{r})). \quad (9)$$

Так как величина зарядов на каждом из двух электродов изменится при внесении третьего шара на значения, определяемые приведенными выше формулами, то изменится напряженность электрического поля в среде, а, следовательно, и электрический ток, протекающий от одного электрода

к другому. Зная это изменение электрического тока, можно определить результирующее изменение сопротивления всей среды при внесении в него третьего шара.

В проекции на ось Ox электрическое поле в центре третьего шара будет равно:

$$E_{0x} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_2} \left[-\frac{2qx}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \right], \quad (10)$$

а проекция электрического дипольного момента будет иметь вид

$$p_x = -\frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2} \frac{2qb^3x}{(x^2 + y^2)^{3/2}}. \quad (11)$$

Это приводит к изменению зарядов на электродах на величины:

$$\Delta q_1 = q' = \frac{a}{r^3 (\vec{p} \cdot \vec{r})} = -\frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2} \frac{2qab^3x^2}{(x^2 + y^2)^3} \quad (12)$$

$$\text{и } \Delta q_2 = -q'$$

соответственно.

В случае, когда третий шар является проводником и $\epsilon_1 \rightarrow \infty$:

$$q' = -\frac{2qab^3x^2}{(x^2 + y^2)^3}, \quad (13)$$

заряд первого электрода будет равен:

$$q_1 = -q \left(1 + \frac{2qab^3x^2}{(x^2 + y^2)^3} \right), \quad (14)$$

а заряд второго будет равен заряду первого по модулю, но с противоположным знаком: $q_2 = -q_1$. Потенциалы первого и второго электродов относительно бесконечности будут равны:

$$\varphi_{1,\infty} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_2} qa; \quad \varphi_{2,\infty} = -\varphi_{1,\infty}. \quad (15)$$

Тогда разность потенциалов между электродами

$$U = \varphi_{1,\infty} - \varphi_{2,\infty} = 2\varphi_{1,\infty} = -2\frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_2} qa. \quad (16)$$

Напряжение электрического поля около шаров также будет определяться зарядом шара $q_1 = -q + \Delta q_1$:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_2} \frac{q_1}{a^2}. \quad (17)$$

Согласно дифференциальной форме закона Ома плотность электрического тока вблизи поверхности первого электрода будет равна $J = \frac{E}{\rho}$. Соот-

ветственно, полный электрический ток через поверхность электрода $I = JS = J4\pi a^2$.

Принимая во внимание рассмотренные выше формулы для этого случая, получим связь между полным током и напряжением между электродами

$$I = \frac{E}{\rho} 4\pi a^2 = \frac{2\pi a}{\rho} \left(1 + 2\frac{ab^3x^2}{(x^2 + y^2)^3} \right) U = \frac{1}{R} U, \quad (18)$$

где для сопротивления среды между двумя шаровыми электродами при наличии третьего металлического шара получим следующее выражение

$$R = \frac{\rho}{2\pi a \left(1 + 2\frac{ab^3x^2}{(x^2 + y^2)^3} \right)}. \quad (19)$$

В частности, для конкретного случая $a = b = 1$ см, $x = 3$ см, $y = 3$ см, величина дополнительного слагаемого в выражении для сопротивления:

$$2 \cdot \frac{1 \cdot 1^3 \cdot 3^2}{(3^2 + 3^2)^3} = 2 \cdot \frac{9}{2^3 \cdot 9^3} = \frac{1}{18^2} = 0.003. \quad (20)$$

Если $y = 0$ см, то имеем

$$2 \cdot \frac{ab^3x^2}{x^6} = 2 \cdot \frac{ab^3}{x^4} = 2 \cdot \frac{1 \cdot 1}{3^4} = \frac{2}{9^2} = \frac{2}{81} = 0.025. \quad (21)$$

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ СОПРОТИВЛЕНИЯ СРЕДЫ

Установка состоит из емкости, в которую заливается дистиллированная вода. На дно емкости опускали пластинку из текстолита, на которую помещали электроды диаметром 2.6 см. Третий шар помещали в плоскости симметрии между измерительными электродами. На электроды подавали низкочастотное переменное напряжение с амплитудой 10 В, чтобы исключить осаждение на поверхности шарика продуктов электролиза, которые могут резко изменить сопротивление между шарами. Далее измеряли электрический ток, протекающий между электродами, при различных положениях третьего шара.

По результатам измерений вычисляли отношение сопротивления сплошной среды в отсутствие третьего шарика к сопротивлению среды при его наличии

$$\frac{\rho}{2\pi a R} = 1 + 2\frac{ab^2x^2}{(x^2 + y^2)^3}. \quad (22)$$

На рис. 3 представлена кривая, определяемая этой формулой, на которую нанесены экспериментально измеренные значения сопротивления сре-

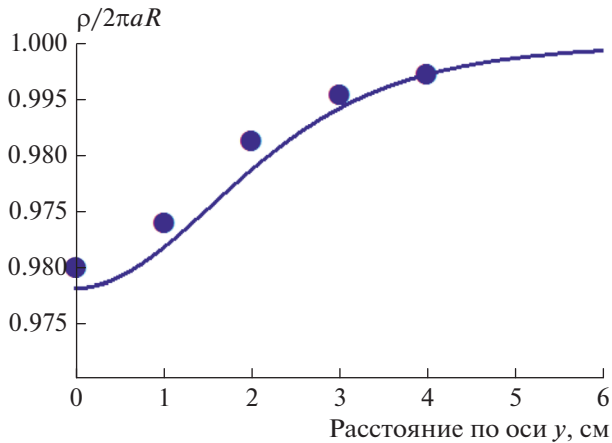


Рис. 3. График зависимости отношения сопротивлений в отсутствии третьего шара к сопротивлению при наличии третьего шара в указанной координате.

ды. Видно, что экспериментальные данные хорошо описываются расчетной кривой.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе разработана теория электростатического зондирования и регистрации объемного тела в проводящей среде. Получена формула

для сопротивления среды между двумя шаровыми электродами при наличии третьего проводящего шара. Данные, полученные в результате проведенного экспериментального исследования, хорошо согласуются с разработанной теорией.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Иванов М.И., Катешов В.А., Кремер И.А., Урев М.В. // Автометрия. 2007. Т. 43. № 2. С. 33.
2. Титлинов В.С., Человечков А.И., Астафьев П.Ф., Вишнев В.С. Индуктивный способ электромагнитного мониторинга процесса оттайки грунта. Пат. РФ № 2156986, кл. G01V3/08. 2000.
3. Персова М.Г., Соловейчик Ю.Г., Тригубович Г.М. и др. // Автометрия. 2007. № 2. С. 45.
4. Каринский А.Д. Теория полей, применяемых в разведочной геофизике (Статические поля. Стационарное электрическое поле). М.: Рассмот, 2014. 105 с.
5. Джурик В.И., Серебренников С.П., Ескин А.Ю., Брыжак Е.В. // Усп. совр. естеств. 2016. № 12-2. С. 380.
6. Tang X., Chen Zh., Li Yue, Yang Yo. // Adv. Mech. Engin. 2016. V. 8. № 8.
7. Гринберг Г.А. Избранные вопросы математической теории электрических магнитных явлений. М.: Рипол Классик, 2013. 731 с.
8. Стрэттон Дж.А. Теория электромагнетизма. М.-Л.: Гостехиздат. 1948. 540 с.