ИЗВЕСТИЯ РАН. СЕРИЯ ФИЗИЧЕСКАЯ, 2020, том 84, № 2, с. 214–218

УДК 537.2

ВЗАИМОСВЯЗЬ ПЛОТНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЗАРЯДА С КРИВИЗНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ОБЪЕМНОГО ПРОВОДНИКА

© 2020 г. П. А. Поляков[1, *], Н. Е. Русакова[1], Ю. В. Самухина[1]

[1]Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования "Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова", Москва, Россия

*E-mail: polyakovpa@mail.ru

Поступила в редакцию 26.08.2019 г.
После доработки 13.09.2019 г.
Принята к публикации 28.10.2019 г.

Исследована кривизна поверхности твердого проводящего тела сложной формы. Проведено сравнение полученной зависимости с распределением зарядов по поверхности проводящего тела. Показано, что для такого тела максимальные значения кривизны и поверхностной плотности распределения зарядов достигаются в разных точках поверхности.

DOI: 10.31857/S0367676520020325

ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим соответствие между величиной плотности распределения заряда по поверхности твердого проводящего тела вращения сложной формы и кривизной поверхности. Известно, что в общем случае распределение заряда по поверхности проводника не является равномерным. Согласно некоторым классическим учебникам (см., например, [1, 2]) максимальное значение плотности распределения заряда по поверхности соответствует максимальной кривизне данной поверхности. Исследования по установлению зависимости поверхностной плотности заряда от кривизны поверхности проводятся до настоящего времени. В более ранних работах [3–6] значение плотности заряда в любой точке проводящей поверхности считается пропорциональным корню четвертой степени из гауссовой кривизны в данной точке. Однако в более поздней публикации [7] доказано, что это не совсем так. В настоящей работе установлена частичная зависимость между поверхностной плотностью электрического заряда и корнем четвертой степени из гауссовой кривизны. Поверхностная плотность электрического заряда зависит и от других функций, поверхностных координат. На основе аналитических расчетов можно показать, что в точках, где плотность заряда максимальна, кривизна поверхности не достигает максимальных значений.

ФОРМА ИССЛЕДУЕМОЙ ПРОВОДЯЩЕЙ ПОВЕРХНОСТИ И ПОВЕРХНОСТНАЯ ПЛОТНОСТЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЗАРЯДА ПО ДАННОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Ранее была разработана методика расчета аналитических выражений для плотности распределения заряда и формы поверхности нового класса тел вращения, для которых возможно точное решение задачи электростатики. Эта методика представлена в работах [8–11]. Для рассматриваемых тел потенциал на поверхности тела зависит только от полярного угла и не зависит от азимутального, то есть поверхности данных тел являются поверхностями вращения относительно оси Z.

Рассмотрим одно из проводящих тел вращения, принадлежащих этому классу. Пусть постоянный потенциал φ_Σ на поверхности этого тела задается формулой [8–11]:

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{a_0}{r} \pm \frac{a_1}{r^2}P_1(\cos\theta)\right) = \varphi_\Sigma, \quad \phi \in [0;2\pi), \qquad (1)$$

где ε_0 – электрическая постоянная, a_1 и a_0 – некоторые постоянные, $P_1(\cos\theta)$ – полином Лежандра первой степени. Параметр a_0 имеет смысл суммарного электрического заряда q, распределенного по поверхности, задаваемой уравнением (1).

Введем безразмерные параметры:

$$\xi = r/r_0, \quad \Psi = \frac{\varphi_\Sigma}{\varphi_0} = \frac{\varphi_\Sigma}{a_0/4\pi\varepsilon_0 r_0}, \qquad (2)$$

где r_0 и $q = a_0$ – радиус и заряд заряженной проводящей сферы, ξ – безразмерный радиус-вектор, нормированный на радиус этой сферы, и Ψ – безразмерный потенциал, нормированный на потенциал сферы $\varphi_0 = a_0/(4\pi\varepsilon_0 r_0)$.

В терминах безразмерных параметров (2) выражение для потенциала принимает следующий вид

$$\Psi\xi^2 - \xi \mp k_1\cos\theta = 0, \qquad (3)$$

где $k_1 = a_1/(a_0 r_0)$ – безразмерный коэффициент.

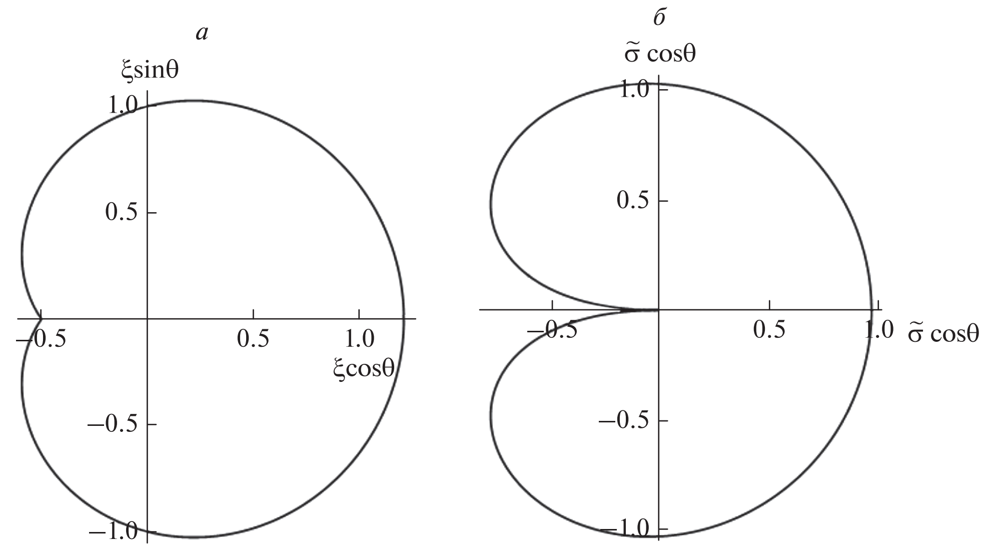

Рис. 1. *а* – Сечение поверхности вращения, задаваемой формулой (3), плоскостью, проходящей через ось Oz перпендикулярно координатной плоскости Oxy; *б* – распределение заряда (6) по поверхности фигуры вращения, задаваемой (3).

При выборе в (3) знаков “+” и “–” имеем две идентичные фигуры, зеркально симметричные относительно друг друга. Решение уравнения (3) со знаком “–” позволяет получить уравнение поверхности рассматриваемого тела в безразмерных сферических координатах (ξ, θ, ϕ) в следующем виде [8, 9, 11]:

$$\xi(\theta) = \frac{1 + \sqrt{1 + 4\Psi k_1 \cos\theta}}{2\Psi}, \quad \phi \in [0; 2\pi), \tag{4}$$

где Ψk_1 должно удовлетворять условию:

$$\Psi k_1 \le 1/4. \tag{5}$$

Если значение произведения Ψk_1 не удовлетворяет этому условию, величина $\xi(\theta)$ будет комплексной, и полученная поверхность будет иметь разрывы.

Тогда поверхностная плотность распределения заряда, в соответствии с уравнением может быть записана в следующем безразмерном виде [8, 9, 11]:

$$\tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{\sigma_0} = \sqrt{\frac{64\Psi^6 k_1^2 \sin^2\theta}{\left(1 + \sqrt{1 + 4\Psi k_1 \cos\theta}\right)^6} + \left(\frac{16\Psi^3 k_1 \cos\theta + 4\Psi^2\left(1 + \sqrt{1 + 4\Psi k_1 \cos\theta}\right)}{\left(1 + \sqrt{1 + 4\Psi k_1 \cos\theta}\right)^3}\right)^2}, \tag{6}$$

где σ – плотность распределения зарядов по поверхности проводника, $\sigma_0 = a_0 / \left(4\pi r_0^2\right)$ – поверхностная плотность зарядов для заряженной сферы, используемой в нормировке (2).

Для графического представления формы поверхности и распределения заряда зададим систему координат:

$$\begin{cases} X = \xi \sin\theta \sin\phi \\ Y = \xi \sin\theta \cos\phi. \\ Z = \xi \cos\theta \end{cases} \tag{7}$$

На рис. 1*а* и 1*б* приведены, соответственно, форма поверхности (4) и распределение заряда (6) по поверхности рассматриваемого проводящего тела при значениях параметров $\Psi = 1$ и $k_1 = 0.25$ в сечении плоскостью, проходящей через ось Oz перпендикулярно плоскости Oxy.

КРИВИЗНА ПОВЕРХНОСТИ ПРОВОДЯЩЕГО ТЕЛА

Рассчитаем зависимость кривизны для нашего тела вращения. Уравнение поверхности определяется формулой (3), а поверхностная плотность распределения заряда имеет вид (6).

Введем обозначения:

$$x(\theta) = \xi(\theta)\sin\theta; \quad z(\theta) = \xi(\theta)\cos\theta, \tag{8}$$

где $\xi(\theta)$ определяется формулой (3). Вычислим коэффициенты первой квадратичной формы нашей поверхности вращения [12]. Для этого сначала рассчитаем первые производные $x'(\theta)$ и $z'(\theta)$:

$$\begin{cases} x'(\theta) = \dfrac{\cos\theta(1+\sqrt{1+4\Psi k_1\cos\theta})}{2\Psi} - \dfrac{k_1\sin^2\theta}{\sqrt{1+4\Psi k_1\cos\theta}} \\ z'(\theta) = -\dfrac{k_1\cos\theta\sin\theta}{\sqrt{1+4\Psi k_1\cos\theta}} - \dfrac{(1+\sqrt{1+4\Psi k_1\cos\theta})\sin\theta}{2\Psi} \end{cases}. \tag{9}$$

Запишем уравнение, определяющее нашу поверхность вращения в виде [13]:

$$\vec{r}(\varphi,\theta) = x(\theta)\cos\phi\cdot\vec{i} + x(\theta)\sin\phi\cdot\vec{j} + z(\theta)\cdot\vec{k}, \tag{10}$$

где $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ – единичные векторы вдоль осей x, y, z соответственно.

$$\begin{cases} \vec{r}_\phi = -x(\theta)\sin\phi\cdot\vec{i} + x(\theta)\cos\phi\cdot\vec{j} \\ \vec{r}_\theta = x'(\theta)\cos\phi\cdot\vec{i} + x'(\theta)\sin\phi\cdot\vec{j} + z'(\theta)\cdot\vec{k} \end{cases}. \tag{11}$$

Обозначим коэффициенты первой квадратичной формы поверхности E, F, G и получим выражения для этих коэффициентов:

$$E = \vec{r}_\phi^{\,2} = x'(\theta);\quad F = (\vec{r}_\phi, \vec{r}_\theta) = 0;$$
$$G = \vec{r}_\theta^{\,2} = (x'(\theta))^2 + (z'(\theta))^2. \tag{12}$$

В терминах наших безразмерных параметров получим:

$$\begin{cases} E = \dfrac{\left(1+\sqrt{1+4\Psi k_1\cos\theta}\right)^2\sin^2\theta}{4\Psi^2} \\ F = 0 \\ G = \dfrac{1+\Psi^2 k_1^2(5+3\cos 2\theta) + 6\Psi k_1\cos\theta + (1+4\Psi k_1\cos\theta)^{3/2}}{2\Psi^2(1+4\Psi k_1\cos\theta)} \end{cases}. \tag{13}$$

Для нахождения коэффициентов второй квадратичной формы произведем следующие вычисления:

$$[\vec{r}_\phi, \vec{r}_\theta] = x(\theta)z'(\theta)\cos\phi\cdot\vec{i} + x(\theta)z'(\theta)\sin\phi\cdot\vec{j} - x(\theta)x'(\theta)\cdot\vec{k}. \tag{14}$$

Единичный вектор нормали к поверхности определяется формулой [12]

$$\vec{n} = \frac{[\vec{r}_\phi, \vec{r}_\theta]}{\left\|[\vec{r}_\phi, \vec{r}_\theta]\right\|} = \frac{z'(\theta)\cos\phi\cdot\vec{i} + z'(\theta)\sin\phi\cdot\vec{j} - x'(\theta)\cdot\vec{k}}{\sqrt{(x'(\theta))^2 + (z'(\theta))^2}}, \tag{15}$$

$$\begin{cases} \vec{r}_{\phi\phi} = -x(\theta)\cos\phi\cdot\vec{i} - x(\theta)\sin\phi\cdot\vec{j} \\ \vec{r}_{\phi\theta} = -x'(\theta)\sin\phi\cdot\vec{i} + x'(\theta)\cos\phi\cdot\vec{j} \\ \vec{r}_{\theta\theta} = x''(\theta)\cos\phi\cdot\vec{i} - x''(\theta)\sin\phi\cdot\vec{j} + z'''(\theta)\cdot\vec{k} \end{cases}. \tag{16}$$

Следовательно, коэффициенты второй квадратичной формы поверхности определяются следующими выражениями:

$$\begin{cases} L = (\vec{r}_{\phi\phi}, \vec{n}) = -\dfrac{x(\theta)z(\theta)}{\sqrt{(x'(\theta))^2 + (z'(\theta))^2}} \\ M = (\vec{r}_{\phi\theta}, \vec{n}) = 0 \\ N = (\vec{r}_{\theta\theta}, \vec{n}) = \dfrac{x''(\theta)z'(\theta) - x'(\theta)z''(\theta)}{\sqrt{(x'(\theta))^2 + (z'(\theta))^2}} = -\dfrac{1}{\sqrt{(x'(\theta))^2 + (z'(\theta))^2}}\begin{vmatrix} x'(\theta) & z'(\theta) \\ x''(\theta) & z''(\theta) \end{vmatrix} \end{cases}. \tag{17}$$

С учетом формулы (13) коэффициенты второй квадратичной квадратичной формы в безразмерных координатах имеют вид:

$$\begin{cases} L = \dfrac{\left(1+\sqrt{1+4A}\right)\left(1+6A+\sqrt{1+4A}\right)\sin^2\theta}{2\sqrt{2}\Psi^2\sqrt{1+4A}\sqrt{\dfrac{1+5\Psi^2k_1^2+6A+\sqrt{1+4A}+4A\sqrt{1+4A}+3\Psi^2k_1^2\cos 2\theta}{\Psi^2(1+4A)}}} \\ N = \dfrac{1+11\Psi^2k_1^2+9A+9\Psi^2k_1^2\cos 2\theta+\sqrt{1+4A}\left(1+9\Psi^2k_1^2+7A+3\Psi^2k_1^2\cos 2\theta\right)}{\sqrt{2}\Psi^2(1+4A)^{3/2}\sqrt{\dfrac{1+5\Psi^2k_1^2+6A+\sqrt{1+4A}+4A\sqrt{1+4A}+3\Psi^2k_1^2\cos\theta}{\Psi^2(1+4A)}}} \end{cases}, \tag{18}$$

где $A = \Psi k_1 \cos\theta$. Обозначим через k_1 и k_2 главные кривизны поверхности вращения. Главные кривизны выражаются через коэффициенты первой и второй квадратичной формы [14]:

$$K_1 = \frac{L}{E}, \quad K_2 = \frac{N}{G}, \tag{19}$$

а в безразмерном виде:

$$\begin{cases} K_1 = \dfrac{2\left(1+6A+\sqrt{1+4A}\right)}{\sqrt{1+4A}\left(1+\sqrt{1+4A}\right)\sqrt{\dfrac{1+5\Psi^2k_1^2+6A+\sqrt{1+4A}+4A\sqrt{1+4A}+3\Psi^2k_1^2\cos 2\theta}{\Psi^2(1+4A)}}} \\ K_2 = \dfrac{\sqrt{2}\left(1+11\Psi^2k_1^2+9A+9\Psi^2k_1^2\cos 2\theta+\sqrt{1+4A}\left(1+9\Psi^2k_1^2+7A+3\Psi^2k_1^2\cos 2\theta\right)\right)}{(1+4A)^{1/2}\sqrt{\dfrac{\left(1+5\Psi^2k_1^2+6A+\sqrt{1+4A}+4A\sqrt{1+4A}+3\Psi^2k_1^2\cos 2\theta\right)^3}{\Psi^2}}} \end{cases}.$$

Согласно [14] средняя кривизна определяется формулой:

$$H = \frac{1}{2}(K_1 + K_2). \tag{20}$$

На рис. 2 приведен график зависимости средней кривизны $H(\theta)$ и безразмерной плотности поверхностного распределения зарядов $\tilde{\sigma}(\theta)$ от полярного угла $\theta \in [0, \pi]$ при значениях параметров $\Psi = 1$ и $k = 0.22$.

На рис. 3*а* и 3*б* построены графики зависимостей производных от плотности распределения зарядов по поверхности проводника $\tilde{\sigma}'(\theta)$ и от средней кривизны $H'(\theta)$ при значениях параметров $\Psi = 1$ и $k = 0.22$. Нули этих зависимостей соответствуют экстремумам средней кривизны $H(\theta)$ и безразмерной плотности поверхностного распределения зарядов $\tilde{\sigma}(\theta)$.

Расчеты показывают, что производные функций поверхностного распределения заряда $\tilde{\sigma}'(\theta)$ и средней кривизны поверхности $H(\theta)$ обращаются в ноль при значениях $\theta = 1.82$ и $\theta = 1.99$ соответственно. Поскольку производные функций при переходе через соответствующие точки меняют свой знак с плюса на минус, максимальное значение плотности распределения заряда по поверхности вращения достигается при $\theta = 1.82$, а средняя кривизна имеет максимальное значение при $\theta = 1.99$. Таким образом, максимумы отличаются примерно на 10 градусов (0.17 радиан) по углу θ.

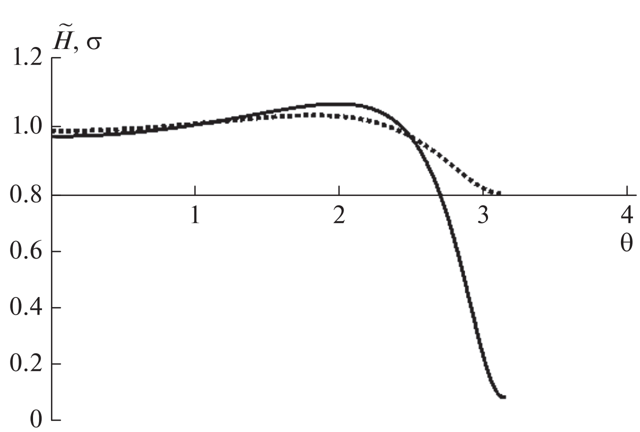

Рис. 2. Зависимость средней кривизны $H(\theta)$ (сплошная кривая) и безразмерной плотности распределения заряда $\tilde{\sigma}(\theta)$ по поверхности (пунктирная кривая) от полярного угла θ.

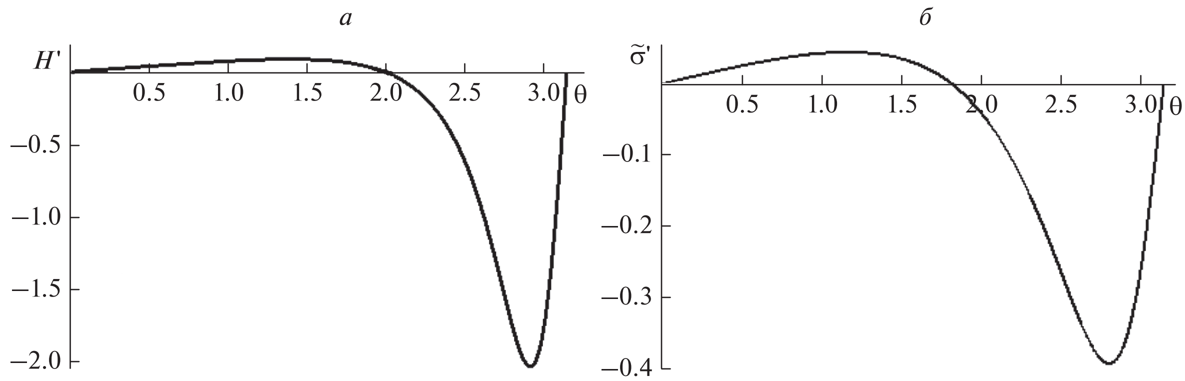

Рис. 3. *а* — Зависимость производной плотности распределения заряда по поверхности $\tilde{\sigma}'$ от угла θ; *б* — зависимость производной средней кривизны H' от угла θ.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом доказано, что для класса тел, описанного в работах [8—11] точки поверхности проводящего тела, в которых достигаются максимальные значения средней кривизны и плотности поверхностного распределения заряда не совпадают. Следовательно, для такого тела нельзя однозначно сказать, что большее значения поверхностной плотности заряда соответствует большему значению кривизны.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Landau L.D.* Electrodynamics of continuous media. Course of theoretical physics. V. 8. Oxford: Pergamon Press, 1984. 460 p.
2. *Smythe W.B.* Static and dynamic electricity. N.Y.: McGgraw-Hill Book Company Inc., 1988. 400 p.
3. *Enze L.* // J. Phys. D. 1986. V. 19. № 1. P. 1.
4. *Enze L.* // J. Phys. D. 1987. V. 20. № 12. P. 160.
5. *Liu K.M.* // Amer. J. Phys. 1987. V. 55. № 9. P. 849.
6. *McAllister I.W.* // J. Phys. D. 1990. V. 23. № 3. P. 359.
7. *Bhattacharya K.* // Phys. Scr. 2016. V. 91. № 3. P. 355.
8. *Поляков П.А., Русакова Н.Е., Самухина Ю.В.* // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физ. Астрон. 2014. № 6. С. 57.
9. *Polyakov P.A., Rusakova N.E., Samukhina Y.V.* // J. Electrostat. 2015. V. 77. P. 147.
10. *Поляков П.А., Русакова Н.Е., Самухина Ю.В., Стока Г.П.* // Сб. тр. XXIV Межд. конф. “Электромагнитное поле и материалы (Фундаментальные физические исследования)". (Москва, 2016). С. 248.
11. *Самухина Ю.В.* Теоретическое исследование статического и динамического самосогласованного электромагнитного поля. Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. Москва: МГУ им. М.В. Ломоносова. 2016
12. *Ильин В.А., Позняк Э.Г.* Основы математического анализа. Часть 2. М.: Физматлит, 2004. 464 с.
13. *Погорелов А.В.* Дифференциальная геометрия. М.: Наука, 1974. 176 с.
14. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. Т. 2. М.: Наука, 1974. 656 с.