

УДК 534.221,548.1.022

## УГЛЫ ПРЕЛОМЛЕНИЯ И НАПРАВЛЕНИЯ ВЕКТОРОВ ГРУППОВЫХ СКОРОСТЕЙ ВОЛН ТЕ И ТМ ПОЛЯРИЗАЦИИ НА ГРАНИЦЕ ИЗОТРОПНОЙ СРЕДЫ И ПОЛУПРОСТРАНСТВА С МАГНИТОЭЛЕКТРИЧЕСКИМ ЭФФЕКТОМ

© 2020 г. С. К. Тлеукунов<sup>1</sup>, Ж. Н. Суйеркулова<sup>1, \*</sup>, В. Г. Можжев<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Евразийский Национальный университет имени Л.Н. Гумилева, Нур-Султан, Казахстан

<sup>2</sup>Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования  
“Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова”, Москва, Россия

\*E-mail: zhamila\_kudaibergen@mail.ru

Поступила в редакцию 26.08.2019 г.

После доработки 13.09.2019 г.

Принята к публикации 28.10.2019 г.

Определены направления векторов фазовых и групповых скоростей волн ТЕ и ТМ поляризации при преломлении на границе “изотропной диэлектрик—одноосный кристалл с магнитоэлектрическими свойствами”. В аналитической форме получены значения углов, определяющих направления фазовых и групповых скоростей ТЕ и ТМ волн, в зависимости от направления волнового вектора падающей волны. Рассмотрены следствия полученных результатов для одноосных кристаллов при отсутствии магнитоэлектрических свойств.

DOI: 10.31857/S0367676520020416

### ВВЕДЕНИЕ

Магнитоэлектрический эффект описывается соотношениями, приведенными в книге [1]. Интерес к средам с магнитоэлектрическим эффектом связан с возможностями его применения для создания беспроводных источников энергии, использования мультиферроидных структур в логических элементах в постоянных магнитных полях и т.д. [2–6]. Теоретические и экспериментальные исследования ведутся с целью создания гетероструктур композитных материалов, имеющих необходимый для практического применения магнитоэлектрический эффект благодаря сочетанию пьезоэлектрического и магнитострикционного эффектов. Это приводит к необходимости детального изучения волновых процессов в подобных средах и, в частности, в средах с магнитоэлектрическим эффектом.

В данной работе волновые процессы рассматриваются в одноосных кристаллах с магнитоэлектрическим эффектом: тетрагональной (класс 422), тригональной (класс 32) и гексагональной (622) симметрии [2]. Решение поставленных в данной работе задач основано на использовании метода матрицанта. На его основе ранее уже были рассмотрены различные задачи для волновых процессов в анизотропных упругих средах, электромаг-

нитные волны в кристаллах, распространение связанных упругих и электромагнитных волн в пьезоэлектрических и пьезомагнитных средах с магнитоэлектрическим эффектом [7–16].

### УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА И МАТЕРИАЛЬНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Процессы распространения плоских электромагнитных волн в рассматриваемой среде описываются уравнениями Максвелла:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E}(g, t) &= -\frac{d\vec{B}(g, t)}{dt}; \\ \operatorname{rot} \vec{H}(g, t) &= \frac{d\vec{D}(g, t)}{dt}, \\ \operatorname{div} \vec{D}(g, t) &= 0; \quad \operatorname{div} \vec{B}(g, t) = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

и материальными соотношениями

$$\begin{aligned} \vec{D}(g, t) &= \bar{\epsilon} \vec{E}(g, t) - \bar{\alpha} \vec{H}(g, t), \\ \vec{B}(g, t) &= \bar{\mu} \vec{H}(g, t) - \bar{\alpha} \vec{E}(g, t) \end{aligned} \quad (2)$$

здесь  $g \in (x, 0, z) \in R^2$ . Волновой вектор  $\vec{k}$  находится в плоскости  $xz$ .  $\bar{\epsilon}, \bar{\mu}$  – тензоры диэлектриче-

ской и магнитной проницаемостей,  $\bar{\alpha}$  – тензор магнитоэлектрического эффекта,

$$\bar{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_x & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z \end{pmatrix}; \quad \bar{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_x & 0 & 0 \\ 0 & \mu_x & 0 \\ 0 & 0 & \mu_z \end{pmatrix};$$

$$\bar{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_x & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_x & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_z \end{pmatrix}.$$

В методе матрицанта, система уравнений (1), (2) приводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) первого порядка относительно компонент векторов электрического  $\vec{E}$  и магнитного полей  $\vec{H}$  на основе представления решений:

$$f(g, t) = \bar{f}(z) \exp[i\omega t - ik_x x]$$

и имеет вид  $\frac{d\bar{W}}{dz} = B\bar{W}(z)$  (3)

относительно вектора  $\bar{W}(z) = (E_y, H_x, H_y, E_x)^t$

здесь  $t$  – знак транспонирования вектор-строки в вектор-столбец. Матрица  $B = (b_{ij})^4$  имеет следующую структуру:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & 0 & b_{14} \\ b_{21} & 0 & b_{23} & 0 \\ 0 & -b_{14} & 0 & b_{34} \\ -b_{23} & 0 & b_{43} & 0 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Элементы  $b_{ij}$  имеет вид:  $b_{(12)} = i\omega\mu_x$ ;  $b_{(14)} = -i\omega\alpha_x$ ;

$$b_{(21)} = i\omega \left( \epsilon_x - \frac{k_x^2}{\omega^2\beta} \epsilon_z \right);$$

$$b_{(23)} = -i\omega \left( \alpha_x - \frac{k_x^2}{\omega^2\beta} \alpha_z \right); \quad b_{(34)} = -i\omega\epsilon_x; \quad (5)$$

$$b_{(43)} = -i\omega \left( \mu_x - \frac{k_x^2\mu_z}{\omega^2\beta} \right); \quad \beta = \epsilon_z\mu_z - \alpha_z^2.$$

Поскольку система ОДУ в данном случае рассматривается относительно переменной  $z$ , имея в виду поперечность электромагнитных волн, уравнения (1)–(2) позволяют исключить компоненты полей  $E_z$  и  $H_z$ , направленных вдоль оси  $z$ .

### УГЛЫ ПРЕЛОМЛЕНИЯ ВОЛН ТЕ И ТМ ПОЛЯРИЗАЦИИ

Индикатрисы волновых векторов волн ТЕ и ТМ поляризации в одноосных кристаллах с магнито-

электрическим эффектом описываются уравнениями [16]:

$$k_{TE}^2 = \frac{\omega^2\beta_x}{\cos^2\theta + (A+B)\sin^2\theta}, \quad (6)$$

$$k_{TM}^2 = \frac{\omega^2\beta_x}{\cos^2\theta + (A-B)\sin^2\theta}. \quad (7)$$

Здесь:

$$\beta_x = \epsilon_x\mu_x - \alpha_x^2; \quad \beta_z = \epsilon_z\mu_z - \alpha_z^2,$$

$$A = \frac{1}{2\beta_z}(\mu_x\epsilon_z + \epsilon_x\mu_z - 2\alpha_x\alpha_z);$$

$$B = \frac{1}{2\beta_z} \times$$

$$\times \sqrt{(\epsilon_z\mu_x - \epsilon_x\mu_z)^2 - (\alpha_x\mu_z - \mu_x\alpha_z)(\epsilon_x\alpha_z - \alpha_x\epsilon_z)}.$$

При преломлении плоских волн на границе сред необходимо выполнение условий

$$k_{x_0} = k_0 \sin\theta_0 = k_{TE} \sin\theta_{TE}, \quad (9)$$

$$k_{x_0} = k_0 \sin\theta_0 = k_{TM} \sin\theta_{TM}. \quad (10)$$

Из условия (10) на основе (6) имеем:

$$k_0^2 \sin^2\theta_0 = \frac{\omega^2\beta_x \sin^2\theta_{TE}}{\cos^2\theta_{TE} + (A+B)\sin^2\theta_{TE}} = \frac{\omega^2\beta_x \operatorname{tg}^2\theta_{TE}}{1 + (A+B)\operatorname{tg}^2\theta_{TE}}. \quad (11)$$

Разделив (11) на  $\operatorname{tg}^2\theta_{TE}$  получим

$$\operatorname{tg}^2\theta_{TE} = \frac{k_0^2 \sin^2\theta_0}{\omega^2\beta_x - (A+B)k_0^2 \sin^2\theta_0}. \quad (12)$$

Формула (12) определяет угол преломления волны ТЕ поляризации на границе контакта сред направление вектора фазовой скорости. Аналогично, в случае волны ТМ поляризации:

$$\operatorname{tg}^2\theta_{TM} = \frac{k_0^2 \sin^2\theta_0}{\omega^2\beta_x - (A-B)k_0^2 \sin^2\theta_0} \quad (13)$$

на основе (12) и (13) можно определить угол между векторами фазовых скоростей ТЕ и ТМ волн.

Поскольку

$$A + B > A - B, \quad A > 0, \quad B > 0 \quad A > B \quad (14)$$

то:

$$\theta_{TE} > \theta_{TM}. \quad (15)$$

Для разности углов  $\Delta\theta = \theta_{TE} - \theta_{TM}$  имеем

$$\operatorname{tg}(\theta_{TE} - \theta_{TM}) = \frac{\operatorname{tg}\theta_{TE} - \operatorname{tg}\theta_{TM}}{1 + \operatorname{tg}\theta_{TE}\operatorname{tg}\theta_{TM}}. \quad (16)$$

Подставив (16) формулы на (12) и (13) получим:

$$\operatorname{tg} \Delta \theta = \frac{k_0 \sin \theta_0 \left[ \sqrt{\omega^2 \beta_x - (A - B) k_0^2 \sin^2 \theta_0} - \sqrt{\omega^2 \beta_x - (A + B) k_0^2 \sin^2 \theta_0} \right]}{\sqrt{(\omega^2 \beta_x - A k_0 \sin \theta_0)^2 - B^2 k_0^2 \sin^2 \theta_0 + k_0^2 \sin^2 \theta_0}}. \quad (17)$$

Угол полного внутреннего отражения можно определить используя формулы (12) и (13) при  $\sin \theta_0 = 1$ ,  $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ :

$$\operatorname{tg}^2 \theta_{\text{TE}} = \frac{k_0^2}{\omega^2 \beta_x - (A + B) k_0^2}, \quad (18)$$

$$\operatorname{tg}^2 \theta_{\text{TM}} = \frac{k_0^2}{\omega^2 \beta_x - (A - B) k_0^2}.$$

Также для  $\Delta \theta = \theta_{\text{TE}} - \theta_{\text{TM}}$ :

$$\operatorname{tg} \Delta \theta = \frac{k_0 \left[ \sqrt{\omega^2 \beta_x - (A - B) k_0^2} - \sqrt{\omega^2 \beta_x - (A + B) k_0^2} \right]}{\sqrt{(\omega^2 \beta_x - A k_0)^2 - B^2 k_0^2 + k_0^2}} \quad (19)$$

формула (19) позволяет определить угол между векторами фазовых скоростей ТЕ и ТМ волн при угле полного внутреннего отражения.

#### НАПРАВЛЕНИЕ ВЕКТОРОВ ГРУППОВЫХ СКОРОСТЕЙ ВОЛН ТЕ И ТМ ПОЛЯРИЗАЦИИ

В работе [16] из анализа индикатрис фазовых скоростей на основе соотношения Релея для определения групповой скорости было получено:

$$\operatorname{tg} \beta_{\text{TE}} = (A + B) \operatorname{tg} \beta_{\text{TE}}, \quad (20)$$

$$\operatorname{tg} \beta_{\text{TM}} = (A - B) \operatorname{tg} \beta_{\text{TM}}.$$

Угол  $\beta_{\text{TE}}$  определяет направление групповой скорости ТЕ волны в одноосных кристаллах с магнитоэлектрическим эффектом. Аналогично, (20) — для волн ТМ поляризации. Подстановка (20) формулы (12) и (13) приводит к соотношениям:

$$\operatorname{tg} \beta_{\text{TE}} = (A + B) \frac{k_0 \sin \theta_0}{\sqrt{\omega^2 \beta_x - (A + B) k_0^2 \sin^2 \theta_0}}, \quad \operatorname{tg} \beta_{\text{TM}} = (A - B) \frac{k_0 \sin \theta_0}{\sqrt{\omega^2 \beta_x - (A - B) k_0^2 \sin^2 \theta_0}}. \quad (21.1)$$

Формулы (21.1) определяют зависимости групповых скоростей волн ТЕ и ТМ поляризации от угла падения волн  $\theta_0$ . При  $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$  из (20) и (21.1) можно определить значения углов  $\beta_{\text{TE}}$  и  $\beta_{\text{TM}}$

при полном внутреннем отражении. Кроме того, можно определить зависимость  $\beta_{\text{TE}} - \beta_{\text{TM}} = \Delta \beta$  от угла падения волны  $\theta_0$ , используя соотношение, аналогичное (16):

$$\operatorname{tg} \Delta \beta = \frac{k_0 \sin \theta_0 \left[ (A + B) \sqrt{\omega^2 \beta_x - (A - B) k_0^2 \sin^2 \theta_0} - (A - B) \sqrt{\omega^2 \beta_x - (A + B) k_0^2 \sin^2 \theta_0} \right]}{\sqrt{(\omega^2 \beta_x - A k_0 \sin \theta_0)^2 - B^2 k_0^2 \sin^2 \theta_0 + k_0^2 \sin^2 \theta_0}}. \quad (21.2)$$

Из (21.2) можно получить значения  $\Delta \beta$  при полном внутреннем отражении ( $\sin \theta_0 = 1$ ,  $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ ).

#### СЛЕДСТВИЯ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ ДЛЯ ОДНООСНЫХ КРИСТАЛЛОВ ПРИ ОТСУТСТВИИ МАГНИТОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ЭФФЕКТА

При отсутствии магнитоэлектрического эффекта в величинах  $\beta_x$ ,  $\beta_z$ ,  $A$ ,  $B$  необходимо положить  $\alpha_x = 0$ ,  $\alpha_z = 0$ . В этом случае имеем:

$$\beta_x = \epsilon_x \mu_x, \quad \beta_z = \epsilon_z \mu_z,$$

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mu_x + \epsilon_x \\ \mu_z \\ \mu_z \\ \epsilon_z \end{pmatrix}, \quad B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mu_x - \epsilon_x \\ \mu_z \\ \mu_z \\ \epsilon_z \end{pmatrix} \quad (22)$$

формулы (6) и (7) принимают следующий вид:

$$k_{TE}^2 = \frac{\omega^2 \varepsilon_x \mu_x \mu_z}{\mu_z \cos^2 \theta + \mu_x \sin^2 \theta}, \quad (23)$$

$$k_{TM}^2 = \frac{\omega^2 \mu_x \varepsilon_x \varepsilon_z}{\varepsilon_z \cos^2 \theta + \varepsilon_x \sin^2 \theta}.$$

Учитывая (22), (23) получим:

$$\operatorname{tg}^2 \theta_{TE} = \frac{\mu_z k_0^2 \sin^2 \theta_0}{\mu_x (\omega^2 \varepsilon_x \mu_z - k_0^2 \sin^2 \theta_0)}, \quad (24)$$

$$\operatorname{tg}^2 \theta_{TM} = \frac{\varepsilon_z k_0^2 \sin^2 \theta_0}{\varepsilon_x (\omega^2 \varepsilon_z \mu_x - k_0^2 \sin^2 \theta_0)},$$

$$\operatorname{tg} \beta_{TE} = \sqrt{\frac{\mu_x}{\mu_z} \frac{k_0 \sin \theta_0}{\omega^2 \varepsilon_x \mu_z - k_0^2 \sin^2 \theta_0}}, \quad (25)$$

$$\operatorname{tg} \beta_{TM} = \sqrt{\frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_z} \frac{k_0 \sin \theta_0}{\omega^2 \varepsilon_z \mu_x - k_0^2 \sin^2 \theta_0}},$$

$$\operatorname{tg} \Delta \theta = \frac{k_0 \sin \theta_0 \left[ \sqrt{\frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_z} \omega^2 \varepsilon_z \mu_x - k_0^2 \sin^2 \theta_0} - \sqrt{\frac{\mu_x}{\mu_z} \omega^2 \varepsilon_x \mu_z - k_0^2 \sin^2 \theta_0} \right]}{\sqrt{\frac{\varepsilon_x \mu_x}{\varepsilon_z \mu_z} \omega^2 \varepsilon_z \mu_x - k_0^2 \sin^2 \theta_0} \sqrt{\omega^2 \varepsilon_x \mu_z - k_0^2 \sin^2 \theta_0} + k_0^2 \sin^2 \theta_0}, \quad (26)$$

$$\operatorname{tg} \Delta \beta = \frac{k_0 \sin \theta_0 \left[ \sqrt{\frac{\mu_x}{\mu_z} \omega^2 \varepsilon_z \mu_x - k_0^2 \sin^2 \theta_0} - \sqrt{\frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_z} \omega^2 \varepsilon_x \mu_z - k_0^2 \sin^2 \theta_0} \right]}{\sqrt{(\omega^2 \varepsilon_z \mu_x - k_0^2 \sin^2 \theta_0)(\omega^2 \varepsilon_x \mu_z - k_0^2 \sin^2 \theta_0)} + \sqrt{\frac{\varepsilon_z \mu_z}{\varepsilon_x \mu_x} k_0^2 \sin^2 \theta_0}}. \quad (27)$$

Формулы (24)–(27) при  $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ ,  $\sin \theta_0 = 1$  определяют соответствующие величины при полном внутреннем отражении. В частности, формула (24) определяет угол полного внутреннего отражения для одноосных кристаллов.

Кроме того, в случае однородных изотропных сред из (24) следует:

$$\operatorname{tg}^2 \theta_{TE} = \frac{k_0^2 \sin^2 \theta_0}{k^2 \cos^2 \theta} \Rightarrow \frac{\sin^2 \theta}{\sin^2 \theta_0} = \frac{k_0^2}{k^2} = \frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{n^2},$$

$$\operatorname{tg}^2 \theta_{TM} = \frac{k_0^2 \sin^2 \theta_0}{k^2 \cos^2 \theta} \Rightarrow \frac{\sin^2 \theta}{\sin^2 \theta_0} = \frac{1}{n^2},$$

$$\operatorname{tg}^2 \theta_{TE} = \operatorname{tg}^2 \theta_{TM} = \operatorname{tg}^2 \beta_{TE} = \operatorname{tg}^2 \beta_{TM} =$$

$$= \frac{k_0^2 \sin^2 \theta_0}{k^2 \cos^2 \theta}, \quad \operatorname{tg} \Delta \theta = 0; \quad \operatorname{tg} \Delta \beta = 0.$$

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Определены углы преломления волн ТЕ и ТМ поляризации на границе однородного изотропного диэлектрика и одноосных кристаллов с магнитоэлектрическим эффектом в зависимости от угла падающей волны. Эти зависимости определяют

направления фазовых скоростей ТЕ и ТМ волн. Определены зависимости направлений групповых скоростей этих волн от угла падающей волны  $\theta_0$ . Получены формулы, определяющие разности углов между фазовой и групповой скоростями для волн ТЕ и ТМ поляризаций. Рассмотрены следствия полученных результатов для одноосных кристаллов в отсутствие магнитоэлектрического эффекта и следствия при изотропности обеих сред. Получены значения углов полного внутреннего отражения для ТЕ и ТМ волн. Определены направления групповых скоростей для углов полного внутреннего отражения.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 620 с.
2. Rivera J.-P. // Eur. Phys. J. B. 2009. V. 71. P. 299.
3. Nan C-W. // J. Appl. Phys. 2008. V. 103. № 3. Art. № 031101.
4. Osaretin A., Rojas R.G. // Phys. Rev. B. 2010. V. 82. № 17. Art. № 174415.
5. Zhang T., Yang X., Ouyang J. et al. // Appl. Compos. Mater. 2014. V. 21. № 4. P. 579.

6. *Filippov D.A., Galichyan T.A., Laletin V.M.* // Appl. Phys. A. 2014. V. 115. № 3. P. 1087.
7. *Тлеуменов С.К., Оспанов А.Т.* Изучение электромагнитных полей в анизотропных средах. Алматы: Кенже пресс, 2001. 67с.
8. *Тлеуменов С.К., Айтбаев А.Б.* // Акуст. журн. 2015. Т. 61. № 2. С. 161; *Tleukenov S.K., Aitbaev A.B.* // Acoust. Phys. 2015. V. 61. № 2. P. 144.
9. *Tleukenov S.K.* // Acta Mechan. 2014. V. 225. № 12. P. 3535.
10. *Tleukenov S.K., Zhakiyev N.K., Yeltinova L.A.* // 2013 IEEE Int. Ultrason. Symp. (Prague, 2013). P. 1025.
11. *Tleukenov S.K., Assilbekova A.M.* // Telecommun. Radio Engin. 2017. V. 76. № 14. P. 1231.
12. *Тлеуменов С.К.* Электромагнитные волны в анизотропных средах. Алматы: Эпиграф, 2017. 72 с.
13. *Tleukenov S., Bobeev A., Sabitova D.* // Int. J. Appl. Math. Stat. 2018. V. 57. № 1. P. 209.
14. *Тлеуменов С.К., Казбекова А.А. Жанат З.Ж.* Волны в средах с магнитоэлектрическим эффектом. Алматы: Эпиграф, 2017. 96 с.
15. *Tleukenov S.K., Zhalgasbekova Z.K., Sirenk Y.K.* // Telecommun. Radio Engin. 2019. V. 78. № 1. P. 1.
16. *Tleukenov S.K., Suierkulova Zh.N.* // Telecommun. Radio Engin. 2019. V. 78. № 6. P. 465.