ИЗВЕСТИЯ РАН. СЕРИЯ ФИЗИЧЕСКАЯ, 2020, том 84, № 3, с. 387–391

УДК 530.145

ЭВОЛЮЦИЯ МАТРИЦЫ ПЛОТНОСТИ КУБИТА В ВЕРОЯТНОСТНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ КВАНТОВЫХ СОСТОЯНИЙ

© 2020 г. О. В. Манько[1, 2, *], В. Н. Чернега[1]

[1]Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Физический институт имени П.Н. Лебедева Российской академии наук, Москва, Россия

[2]Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования "Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)", Москва, Россия

*E-mail: mankoov@lebedev.ru

Поступила в редакцию 20.09.2019 г.
После доработки 15.11.2019 г.
Принята к публикации 27.11.2019 г.

Для обобщенной матрицы плотности кубита, зависящей от двух моментов времени, получена система уравнений, которая определяет эволюцию квантового состояния кубита и переходит в уравнение фон Неймана для матрицы плотности кубита при совпадающих временах. В вероятностном представлении квантовых состояний рассмотрены состояния гармонического осциллятора и получены кинетические уравнения для вероятностей проекций спина $+1/2$ на три перпендикулярных направления в пространстве, определяющие состояние кубита.

DOI: 10.31857/S0367676520030205

ВВЕДЕНИЕ

Чистое состояние квантовой системы определяется вектором состояния $|\psi(t)\rangle$ в гильбертовом пространстве H или оператором плотности $\hat{\varrho}(t)$, действующем в этом пространстве для смешанных состояний [1]. Вектор состояния $|\psi(t)\rangle$ определяет волновую функцию $\psi(x,t) = \langle x|\psi(t)\rangle$, например, волновую функцию осциллятора в координатном представлении, введенную Шредингером [2] (см. [3]). Оператор плотности $\hat{\varrho}(t)$ определяет матрицу плотности $\varrho(x,x',t) = \langle x|\hat{\varrho}(t)|x'\rangle$ в координатном представлении, введенную Ландау [4] и фон Нейманом [5]. Матрица плотности может быть задана в других представлениях квантовой механики, например, функцией Вигнера [6], функцией Хусими-Кано [7, 8] или функцией Глаубера-Сударшана [9, 10]. При заданном гамильтониане системы $\hat{H}$ волновая функция удовлетворяет уравнению эволюции Шредингера, а матрица плотности – уравнению фон Неймана. С самого начала развития квантовой механики делались попытки построить формализм квантовой теории, в котором состояния систем, например, осциллятора задаются распределениями вероятностей, как в классической статистической механике. В работах [11–15] было предложено задавать квантовые состояния томографическими распределениями вероятности, используемыми для восстановления функции Вигнера состояний фотонов [16] при измерении квантовых томограмм. При анализе процедуры измерений используется обсуждение поведения системы, описываемое векторами состояний $|\psi(t_1)\rangle, |\psi(t_2)\rangle$ в разные моменты времени [17]. В [18] для систем с непрерывными координатами обсуждено уравнение для обобщенной матрицы плотности в координатном представлении $R(x,x',t,t') = \langle x|\psi(t)\rangle\langle\psi(t')|x'\rangle$, переходящее при $t = t'$ в уравнение фон Неймана для матрицы плотности $\varrho(x,x',t) = \langle x|\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|x'\rangle$. Для систем с дискретными переменными (например, спина-1/2 или кубита) матрица плотности задается тремя вероятностями $0 \le p_1,\ p_2,\ p_3 \le 1$ проекций спина на направления x, y, z [19–21]. В работах [22, 23] была исследована связь между томографическими представлениями квантовых состояний и схемами квантования на основе звездочного произведения функций – символов операторов.

Целью настоящей работы является обсуждение вероятностного представления для систем с дискретными переменными – кубита и получение кинетического уравнения для вероятностей $p_1(t_1),\ p_2(t_1),\ p_3(t_1),\ p_1(t_2),\ p_2(t_2),\ p_3(t_2)$, определяющих обобщенную матрицу плотности кубита $R(m_1,m_2,t_1,t_2) = \langle m_1|\psi(t_1)\rangle\langle\psi(t_2)|m_2\rangle$, $m_1, m_2 = \pm 1/2$. Используя эти вероятности, мы получим новые неравенства для матричных элементов матрицы плотности кубита и их зависимость от моментов времени t_1 и t_2. Эти новые неравенства могут быть проверены экспериментально.

Статья организована следующим образом. Во втором параграфе представлен обзор вероятностного представления квантовых состояний на примере осциллятора и частицы со спином 1/2 (кубита). В третьем параграфе введено уравнение эволюции для вероятностей, задающих обобщенную матрицу плотности кудита. В четвертом параграфе даны выводы и сформулированы задачи, которые мы намерены решить в будущих публикациях.

ВЕРОЯТНОСТНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СОСТОЯНИЙ КВАНТОВОГО ОСЦИЛЛЯТОРА

В этом параграфе сделан обзор построения вероятностного представления квантовых состояний систем с непрерывными переменными (координатами) на примере осциллятора. Волновая функция $\psi(x)$ задает томографические распределения вероятности $w(X,\mu,\nu)$ квадратурной компоненты X, зависящие от двух действительных параметров μ и ν с помощью дробного преобразования Фурье [24]

$$w(X,\mu,\nu) = \frac{1}{2\pi|\nu|}\left|\int \psi(y)\exp\left(\frac{i\mu}{2\nu}y^2 - i\frac{xy}{\nu}\right)dy\right|^2. \quad (1)$$

Оператор плотности состояния $\hat{\varrho}$ выражается через распределение вероятности следующим образом [22]

$$\hat{\varrho} = \frac{1}{2\pi}\int w(X,\mu,\nu)\exp[i(X\hat{1} - \mu\hat{q} - \nu\hat{p})], \quad (2)$$

где $\hat{q}$ и $\hat{p}$ операторы координаты и импульса, $\hat{q}\psi(x) = x\psi(x)$, $\hat{p}\psi(x) = -i\dfrac{d\psi(x)}{dx}$ $(\hbar = 1)$. Таким образом, состояние частицы с волновой функцией $\psi(x)$ полностью определено распределением вероятности $w(X,\mu,\nu) \ge 0$, удовлетворяющим для нормированных волновых функций условию нормировки

$$\int w(X,\mu,\nu)\,dX = 1. \quad (3)$$

Для состояний гармонического осциллятора с волновыми функциями $\psi_n(x), n = 0,1,2,\ldots$, отвечающими состояниям с энергиями $E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)$, томографические распределения вероятностей имеют вид

$$w_n(X,\mu,\nu) = \frac{\exp\left(-\dfrac{X^2}{\nu^2+\mu^2}\right)}{2^n n!\sqrt{\pi\left(\mu^2+\nu^2\right)}}\left|H_n\left(\frac{X}{\sqrt{\mu^2+\nu^2}}\right)\right|^2, \quad (4)$$

где $H_n(y)$ – полиномы Эрмита. Обобщенная матрица плотности чистого состояния $R_n(x,x',t,t') = \langle x|\psi_n(t)\rangle\langle\psi_n(t')|x'\rangle$ имеет вид

$$R_n(x,x',t,t') = \exp\left[-i\left(n+\frac{1}{2}\right)t + i\left(n+\frac{1}{2}\right)t'\right]\times \\ \times\frac{\exp\left[-\frac{1}{2}\left(x^2+x'^2\right)\right]}{2^n n!\sqrt{\pi}}H_n(x)H_n(x') \quad (5)$$

Томограмма обобщенного оператора плотности состояния с заданной энергией

$$\widehat{R_n}(t,t') = |\psi_n(t)\rangle\langle\psi_n(t')|$$

определенная как [22]

$$w(X,\mu,\nu,t,t') = Tr\widehat{R_n}(t,t')\delta(X - \mu\hat{q} - \nu\hat{p})$$

имеет вид

$$w(X,\mu,\nu,t,t') = w_n(X,\mu,\nu)\times \\ \times\exp\left[-i\left(n+\frac{1}{2}\right)t + i\left(n+\frac{1}{2}\right)t'\right]. \quad (6)$$

Матрица плотности (5) является решением системы уравнений [18]

$$-i\frac{\partial}{\partial t}R_n(x,x',t,t') = \hat{H}(x)R_n(x,x',t,t'); \\ -i\frac{\partial}{\partial t'}R_n(x,x',t,t') = \hat{H}(x')R_n(x,x',t,t'), \quad (7)$$

где $\hat{H}(x)$ является гамильтонианом осциллятора $(\hbar = m = \omega = 1)$ в координатном представлении

$$\hat{H}(x) = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{x^2}{2}.$$

ВЕРОЯТНОСТНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СОСТОЯНИЙ ЧАСТИЦЫ СО СПИНОМ 1/2

Цель данного параграфа – изучение систем с дискретными переменными и построение вероятностного представления состояний кубита на примере состояний частицы со спином 1/2. Для частицы со спином 1/2 матрица плотности $\varrho_{mm'} = \langle m|\hat{\varrho}|m'\rangle$, где m, $m' = \pm 1/2$ имеет вид

$$\varrho = \begin{pmatrix} \varrho_{1/2\,1/2} & \varrho_{1/2\,-1/2} \\ \varrho_{-1/2\,1/2} & \varrho_{-1/2\,-1/2}\end{pmatrix}. \quad (8)$$

Матричные элементы этой матрицы выражаются через вероятности проекций спина $0 \le p_1$, p_2, $p_3 \le 1$ равные $+1/2$ на оси x, y, z, т.е., $p_1 = Tr(\varrho\varrho_x)$, $p_2 = Tr(\varrho\varrho_y)$, $p_3 = Tr(\varrho\varrho_z)$. Здесь матрицы

$$\varrho_x = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2\end{pmatrix}, \quad \varrho_y = \begin{pmatrix} 1/2 & -i/2 \\ i/2 & 1/2\end{pmatrix}, \quad \varrho_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix} \quad (9)$$

являются матрицами плотности соответствующих чистых состояний $|\psi\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $|\psi\rangle_y = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}$, $|\psi\rangle_z = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$. Таким образом матрица плотности (8) задается тремя вероятностями, то есть,

$$\varrho = \begin{pmatrix} p_3 & p_1 - \frac{1}{2} - i(p_2 - 1/2) \\ p_1 - \frac{1}{2} + i(p_2 - 1/2) & 1 - p_3 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Эта матрица удовлетворяет условию эрмитовости $\varrho = \varrho^+$, а $Tr\varrho = 1$, и ее собственные значения неотрицательны, что выражается неравенством

$$(p_1 - 1/2)^2 + (p_2 - 1/2)^2 + (p_3 - 1/2)^2 \le \frac{1}{4}. \quad (11)$$

Для гамильтониана $\hat{H}(t)$ с матрицей

$$H(t) = \begin{pmatrix} H_{11}(t) & H_{12}(t) \\ H_{21}(t) & H_{22}(t) \end{pmatrix} \quad (12)$$

обобщенная матрица плотности, отвечающая оператору плотности чистого состояния $\hat{R}(t,t') = |\psi(t)\rangle\langle\psi(t')|$, с вектором состояния

$$|\psi(t)\rangle = \begin{pmatrix} \psi_1(t) \\ \psi_2(t) \end{pmatrix}, \quad (13)$$

удовлетворяет системе уравнений

$$\begin{gathered} i\frac{\partial}{\partial t}R(t,t') = H(t)R(t,t'), \\ -i\frac{\partial}{\partial t'}R(t,t') = R(t,t')H(t'). \end{gathered} \quad (14)$$

Эти уравнения вытекают из уравнения Шрёдингера на вектор состояния $i\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle = H(t)|\psi(t)\rangle$.

Поэтому при любых значениях t, t' уравнения (14) адекватно описывают эволюцию квантовой системы. В уравнениях (14) обобщенная матрица плотности $R(t,t')$ выражается через две компоненты вектора $|\psi(t)\rangle$

$$R(t,t') = \begin{pmatrix} \psi_1(t)\psi_1^*(t') & \psi_1(t)\psi_2^*(t') \\ \psi_2(t)\psi_1^*(t') & \psi_2(t)\psi_2^*(t') \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Как можно проверить, эта матрица выражается через вероятности $p_1(t)$, $p_2(t)$, $p_3(t)$, $p_1(t')$, $p_2(t')$, $p_3(t')$ и вероятности $\Pi_1(t)$, $\Pi_2(t)$, $\Pi_3(t)$, $\Pi_1(t')$, $\Pi_2(t')$, $\Pi_3(t')$, которые задают компоненты спиноров Паули, а именно,

$$\begin{gathered} \psi_1(t) = \sqrt{p_3(t)}e^{i\varphi_1(t)}, \\ \cos\varphi_1(t) = \frac{\Pi_1(t) - 1/2}{\sqrt{\Pi_3(t)(1 - \Pi_3(t))}}; \\ \psi_2(t) = \sqrt{1 - p_3(t)}e^{i\varphi_2(t)}, \\ \cos\varphi_2(t) = \frac{\wp_1(t) - 1/2}{\sqrt{\wp_3(t)(1 - \wp_3(t))}}, \end{gathered} \quad (16)$$

где вероятности $0 \le \Pi_j(t)$; $\wp_j(t) \le 1$, $j = 1,2,3$ являются вероятностями дихотомных случайных величин (аналогов ”орла” и ”решки” шести классических неидеальных монеток), состояния которых в момент времени t задаются распределениями вероятности $(\Pi_j(t), 1 - \Pi_j(t))$ и $(\wp_j(t), 1 - \wp_j(t))$. Эти вероятности удовлетворяют соотношениям, справедливым для чистых состояний

$$\sum_{j=1}^{3}(\Pi_j(t) - 1/2)^2 = \sum_{j=1}^{3}(\wp_j(t) - 1/2)^2 = \frac{1}{4}, \quad (17)$$

которые отвечают квантовым корреляциям проекций спина на различные направления, описываемые коммутационными соотношениями операторов углового момента (матриц Паули). Таким образом система уравнений (14) на обобщенную матрицу плотности $R(t,t')$ состояния кубита задает соотношения на вероятности $p_j(t)$, $\Pi_j(t)$, $\wp_j(t)$ $(j = 1,2,3)$, определяющие вектор состояния $|\psi(t)\rangle$. В случае стационарной системы с независящим от времени гамильтонианом $H(t) = H$ система уравнений (14) приводится к виду

$$\begin{gathered} i\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t'}\right)R(t,t') = [H, R(t,t')], \\ i\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t'}\right)R(t,t') = \{H, R(t,t')\}. \end{gathered} \quad (18)$$

Введя переменные $T = t + t'$, $\tau = t - t'$ и матрицу $r(T,\tau) = R\left(\frac{T+\tau}{2}, \frac{T-\tau}{2}\right)$, мы сведем систему уравнений (18) к системе уравнений

$$\begin{gathered} i\frac{\partial}{\partial T}r(T,\tau) = \frac{1}{2}[H, r(T,\tau)], \\ i\frac{\partial}{\partial \tau}r(T,\tau) = \frac{1}{2}\{H, r(T,\tau)\}, \end{gathered} \quad (19)$$

то есть, к системе уравнений, содержащей коммутатор и антикоммутатор обобщенной матрицы плотности с гамильтонианом и задающей эволюцию состояния кубита.

Уравнение (14) в случае $t = t'$ приводит к уравнению эволюции фон Неймана на матрицу плотности состояния кубита (10) вида

$$\begin{pmatrix} \dot{p}_3 & \dot{p}_1 - i\dot{p}_2 \\ \dot{p}_1 + i\dot{p}_2 & -\dot{p}_3 \end{pmatrix} = \\ = -i\left[\begin{pmatrix} H_{11}(t) & H_{12}(t) \\ H_{12}^*(t) & H_{22}(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p_3 & p_1 - \frac{1}{2} - i\left(p_2 - \frac{1}{2}\right) \\ p_1 - \frac{1}{2} + i\left(p_2 - \frac{1}{2}\right) & 1 - p_3 \end{pmatrix}\right]. \quad (20)$$

Это матричное соотношение является системой кинетических уравнений для вероятностей $p_1(t)$, $p_2(t)$, $p_3(t)$

$$\dot{p}_3 - 2Im\left\{H_{12}(t)\left[p_1 - \frac{1}{2} + i\left(p_2 - \frac{1}{2}\right)\right]\right\} = 0, \quad (21)$$

$$\dot{p}_1 - i\,\dot{p}_2 + i\left\{H_{11}(t)\left[p_1 - \frac{1}{2} - i\left(p_2 - \frac{1}{2}\right)\right] + \\ + H_{12}(t)(1 - p_3) - \left[p_3 H_{12}(t) + \\ + \left(p_1 - \frac{1}{2} - i\left(p_2 - \frac{1}{2}\right)\right)H_{22}(t)\right]\right\} = 0. \quad (22)$$

Решения кинетических уравнений (21), (22) описывают эволюцию квантовых состояний систем со спином 1/2. В случае стационарных состояний, когда гамильтониан не зависит от времени и имеет матричные элементы $H_{jk}(t) = h_{jk}$, получаем решения, которые задают уровни энергии (как собственные значения матрицы h) и собственные функции системы, причем вероятности $p_1(t)$, $p_2(t)$, $p_3(t)$ удовлетворяют условию $\dot{p}_1 = \dot{p}_2 = \dot{p}_3 = 0$. Решения кинетических уравнений удовлетворяют энтропийным неравенствам. Можно проверить, что относительная информация Шеннона

$$I = p_{j_1}(t_1)\ln\left(p_{j_1}(t_1)/p_{j_2}(t_2)\right) + \\ + \left(1 - p_{j_1}(t_1)\right)\ln\left(\left(1 - p_{j_1}(t_1)\right)/\left(1 - p_{j_2}(t_2)\right)\right), \quad (23)$$

$j_1 = 1, 2, 3$, $j_2 = 1, 2, 3$ для любых времен t_1 и t_2 и всех вероятностей, являющихся решениями найденных кинетических уравнений, есть неотрицательная величина: $I \geq 0$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы вывели кинетические уравнения для вероятностей, задающих квантовые состояния на примере частицы со спином 1/2 или двухуровневого атома. Полученные соотношения позволяют, измеряя вероятности проекций спина на три перпендикулярные оси (или средние значения этих проекций), проверить экспериментально информационно-энтропийные соотношения.

Продемонстрированный подход распространяется на случай произвольных N-уровневых атомов и произвольных спинов. Мы наметили метод обобщения полученных результатов для спина 1/2 на случай N-мерных гильбертовых пространств. Вектор состояния $|\psi(t)\rangle$ имеет в этом случае N компонент. Матрица плотности $\varrho_\psi(t) = |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|$ является $N \times N$ матрицей с диагональными матричными элементами $(|\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|)_{jj} = p_3^{(j)}(t)$, $j = 1, 2, \ldots N - 1$ со следом $Tr\varrho_\psi(t) = 1$ и неотрицательными собственными значениями. Недиагональные элементы в вероятностном представлении квантовых состояний имеют вид $(|\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|)_{jk} = p_1^{(jk)}(t) - \frac{1}{2} - i\left(p_2^{(jk)}(t) - \frac{1}{2}\right)$, $j < k$, где числа $0 \leq p_1^{(jk)}$, $p_2^{(jk)} \leq 1$ являются вероятностями дихотомных случайных величин, аналогов положений монеток “орел” или ”решка”. Введя матрицу $R(t_1, t_2) = |\psi(t_1)\rangle\langle\psi(t_2)|$, мы, в случае системы с гамильтонианом $H(t)$, получаем систему кинетических уравнений для вероятностей $p_3^{(jj)}(t_k)$, $p_{1,2}^{(jj')}(t_k)$, $k = 1, 2$. Решения этих уравнений определяют при $t_1 = t_2 = t$ вектора $|\psi(t)\rangle$, которые являются решениями уравнения Шредингера. Можно также получить обобщение данного подхода на случай открытых систем, для которых матрица плотности $\varrho(t) = \sum_k \lambda_k |\psi(t_k)\rangle\langle\psi(t_k)|$ подчиняется уравнению Горини–Коссаковского–Сударшана–Линдблада [25, 26]. Здесь $0 \leq \lambda_k \leq 1$, $\sum_k \lambda_k = 1$. Для матричных элементов матрицы $|\psi(t_1)\rangle\langle\psi(t_2)|$ условия на энтропию Шеннона для распределений вероятности дихотомных переменных $\left(p_{1,2,3}^{(jk)}(t), 1 - p_{1,2,3}^{(jk)}(t)\right)$ задают неравенства, которые экспериментально можно проверить. Эти задачи могут быть распространены на эксперименты со сверхпроводящими цепочками, основанными на работе устройств с джозефсоновскими контактами [27–30], и использовавшимися при обнаружении динамического эффекта Казимира, обсуждавшегося в [31].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *P. Dirac*. The principles of quantum mechanics. Oxford University Press, 1930.

2. *Schrodinger E.* // Ann. Phys. 1926. V. 79. P. 489.
3. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Курс теоретической физики: Учеб. пособ.: Для вузов. В 10 т. Т. III. Квантовая механика (нерелятивистская теория). М.: Физматлит, 2004.
4. *Landau L.D.* // Zeitschr. Phys. 1927. V. 45. P. 430.
5. *Von Neumann J.* // Nach. Ges. Wiss. Göttingen. 1927. V. 11. P. 245.
6. *Wigner E.* // Phys. Rev. 1932. V. 40. P. 749.
7. *Husimi K.* // Proc. Phys. Math. Soc. Japan. 1940. V. 23. P. 264.
8. *Kano Y.* // J. Math. Phys. 1986. V. 6. P. 1913.
9. *Glauber R.J.* // Phys. Rev. Lett. 1963. V. 10. P. 84.
10. *Sudarshan E.C.G.* // Phys. Rev. Lett. 1963. V. 10. P. 277.
11. *Mancini S., Man'ko V.I., Tombesi P.* // Phys. Lett. A. 1996. V. 213. P. 1.
12. *Манько В.И., Манько О.В.* // ЖЭТФ. 1997. Т. 112. № 3. С. 796; *Man'ko V.I., Man'ko O.V.* // JETP. 1997. V. 85. P. 430.
13. *Man'ko O.V., Man'ko V.I.* // J. Russ. Las. Res. 1997. V. 18. P. 407.
14. *Dodonov V.V., Man'ko V.I.* // Phys. Lett. A. 1997. V. 239. P. 335.
15. *Man'ko O.V.* // Proc. Int. Conf. Symmetries in Science X (Bregenz, 1997). P. 207.
16. *Smithey D.T., Beck M., Raymer M.G. et al.* // Phys. Rev. Lett. 1993. V. 70. P. 1244.
17. *Aharonov Y., Vaidman L.* // Lect. Notes Phys. 2008. V. 734. P. 399.
18. *Chernega V.N., Manko O.V., Man'ko V.I.* // J. Russ. Las. Res. 2015. V. 36. P. 135.
19. *Chernega V.N., Man'ko O.V., Man'ko V.I.* // J. Russ. Las. Res. 2017. V. 38. P. 416.
20. *Chernega V.N., Man'ko O.V., Man'ko V.I.* // J. Russ. Las. Res. 2018. V. 39. P. 128.
21. *Man'ko V.I., Marmo G., Ventriglia F., Vitale P.* // J. Phys. A. 2017. V. 50. Art. № 335302.
22. *Man'ko O.V., Man'ko V.I., Marmo G.* // J. Phys. A. 2002. V. 35. P. 699.
23. *Man'ko O.V., Man'ko V.I., Marmo G., Vitale P.* // Phys. Lett. A. 2007. V. 360. P. 522.
24. *Manko V.I., Mendes R.V.* // Phys. Lett. A. 1999. V. 263. P. 53.
25. *Gorini V., Kossakowski A., Sudarshan E.C.G.* // J. Math. Phys. 1976. V. 17. P. 821.
26. *Lindblad G.* Non-equilibrium entropy and irreversibility. Springer, 1983. 180 p.
27. *Dodonov V.V., Man'ko O.V., Man'ko V.I.* // J. Sov. Las. Res. 1989. V. 10. P. 413.
28. *Fujii T., Matsuo S., Hatakenaka N. et al.* // Phys. Rev. B. 2011. V. 84. Art. № 174521.
29. *Wang S.C., Curtis J.C., Lester B.J. et al.* // arXiv: 1908.03598. 2019.
30. *Bliokh K.Y., Dennis M.R., Nori F.* // Phys. Rev. Lett. 2011. V. 107. Art. № 174802.
31. *Man'ko O.V.* // J. Korean Phys. Soc. 1994. V. 27. P. 1.