

УДК 538.9, 53.08

## ЗАПУТАННЫЕ СОСТОЯНИЯ АТОМНЫХ СОЛИТОНОВ ДЛЯ КВАНТОВОЙ МЕТРОЛОГИИ

© 2020 г. Д. В. Царёв<sup>1</sup>, \*, В. Нго-Тхе<sup>1</sup>, А. П. Алоджанц<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования “Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики”, Санкт-Петербург, Россия

\*E-mail: dmitriy\_93@mail.ru

Поступила в редакцию 20.09.2019 г.

После доработки 15.11.2019 г.

Принята к публикации 27.11.2019 г.

В работе рассматривается формирование многочастичных максимально пространственно-запутанных состояний, известных как N00N-состояния, и их применение в квантовой метрологии. Показано преодоление стандартного квантового предела и достижение предела Гейзенберга при измерении линейного фазового сдвига. Показано преодоление предела Гейзенберга при измерении параметров среды в рамках нелинейной квантовой метрологии.

DOI: 10.31857/S0367676520030278

### ВВЕДЕНИЕ

Благодаря стремительному развитию экспериментальных возможностей квантовых технологий в последнее десятилетие наблюдается стремительный рост интереса к квантовой метрологии [1, 2]. Во многих прикладных технологиях, таких как детектирование гравитационных волн [3], стандартах частоты и времени [4, 5], магнитометрии [6], квантовой гироскопии [7], термометрии живых клеток [8] или изображениях высокого разрешения в биологии [9], требуется чрезвычайно высокая точность измерения некоторых ключевых параметров, определяемая квантовыми ограничениями. Как правило, измерение требуемого параметра осуществляется через измерение фазового сдвига, содержащего всю необходимую информацию [10, 11]. В квантовой оптике такие измерения чаще всего проводятся с помощью интерферометра Маха–Цендера, оперирующего несколькими фотонами, либо световыми пучками, содержащими большое среднее число фотонов (для измерения дискретных и непрерывных переменных соответственно) [9]. В области атомной оптики также используются материально-волновые интерферометры, работающие подобным образом [1].

Ранее было показано, что два слабо связанных конденсата Бозе–Эйнштейна (БЭК) представляют удобную платформу для осуществления фазочувствительных измерений [12]. В частности, взаимодействующие конденсаты в джозефсоновском и фоковском режимах позволяют добиться

точности измерения фазового сдвига, превышающей стандартный квантовый предел (СКП),  $1/\sqrt{N}$ , где  $N$  – среднее число частиц, задействованных в измерении. Также было показано достижение предела Гейзенберга,  $1/N$ , с помощью  $N$ -частичных максимально пространственно-запутанных N00N-состояний [13, 14]. В этой связи получение N00N-состояний со значительным числом частиц (до  $10^3$ ) представляет сложную и актуальную задачу для современной метрологии.

### КВАНТОВАЯ МОДЕЛЬ ФОРМИРОВАНИЯ ЗАПУТАННЫХ СОСТОЯНИЙ

Мы предлагаем модель формирования N00N-состояний с помощью солитонов двух слабосвязанных конденсатов Бозе–Эйнштейна, помещенных в две сигарообразные ловушки, формирующие W-потенциал (рис. 1). Гамильтониан такой системы в форме вторичного квантования состоит из трех слагаемых,  $\hat{H} = \hat{H}_1 + \hat{H}_2 + \hat{H}_{int}$ , где  $\hat{H}_j$  – гамильтониан уединенного конденсата  $j$ -й ямы, а  $\hat{H}_{int}$  – Гамильтониан их взаимодействия:

$$\hat{H}_j = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{a}_j^+(x) \left( -\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{u}{2} \hat{a}_j^+(x) \hat{a}_j(x) \right) \hat{a}_j(x) dx; \quad (1)$$

$$\hat{H}_{int} = \kappa \int_{-\infty}^{\infty} \left( \hat{a}_1^+(x) \hat{a}_2(x) + \hat{a}_2^+(x) \hat{a}_1(x) \right) dx, \quad (2)$$

где  $\hat{a}_j^+$  ( $\hat{a}_j$ ) – оператор рождения (уничтожения) частицы конденсата в  $j$ -й ловушке;  $u$  – коэффициент нелинейного взаимодействия частиц в одной ловушке;  $\kappa$  – скорость туннельного взаимодействия ловушек.

Дальнейшее решение основано на стандартном вариационном подходе. Во-первых, необходимо выбрать вариационный анзац. В отсутствие туннелирования,  $\kappa = 0$ , нелинейное уравнение Шрёдингера с гамильтонианом (1) имеет солитонное решение в форме гиперболического секанса:

$$\Psi_j = \frac{N_j}{2} \sqrt{\frac{u}{N}} \operatorname{sech} \left[ \frac{N_j u}{2} (x - X_j) \right] e^{i\theta_j + iP_j(x - X_j)}, \quad (3)$$

где  $N = N_1 + N_2$  – число частиц в двух ловушках (полагается постоянной величиной);  $\theta_j$  – фаза  $j$ -го солитона;  $X_j$  и  $P_j$  – координата центра массы солитона и его безразмерный импульс соответственно. При наличии слабого туннелирования,  $\kappa \geq 0$ , можно использовать решение (3) в качестве вариационного анзаца волновой функции конденсата в  $j$ -й ловушке.

Во-вторых, усредняя гамильтониан (1), (2) по когерентному базису, подставляя анзац (3) и интегрируя по всему пространству, получим эффективный лагранжиан:

$$L = -\dot{\theta}z + 0.5\delta\dot{P} - 0.25P^2 + \kappa(\Lambda + 1)I - \kappa I. \quad (4)$$

В (4) вводятся четыре вариационные параметра, минимально необходимые для описания динамики рассматриваемой системы:  $z = (N_2 - N_1)/N$ ;  $\theta = \theta_2 - \theta_1$ ;  $\delta = X_2 - X_1$  и  $P = P_2 - P_1$ . Кроме того,  $\Lambda = N^2 u^2 / 16\kappa$  – основной параметр среды, определяющий режимы динамики системы. Наконец, под  $I$  скрывается функционал следующего вида:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos[\theta + 2Px/Nu] dx'}{\cosh[x' - z\delta Nu/4] + \cosh[zx' - \delta Nu/4]} \quad (5)$$

С помощью уравнения Эйлера–Лагранжа с лагранжианом (4) можно получить четыре уравнения динамики основных параметров:

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \Lambda z - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} [(1 - z^2)I]; \\ \dot{z} = \frac{1}{2} (1 - z^2) \frac{\partial I}{\partial \theta}; \\ \dot{\delta} = \frac{1}{2\kappa} P + (1 - z^2) \frac{\partial I}{\partial P}; \\ \dot{P} = -(1 - z^2) \frac{\partial I}{\partial \delta}. \end{cases} \quad (6)$$

Точки в (6) обозначают дифференцирование по нормированному времени  $\tau = 2\kappa t$ . Нас интересует особый предел, при котором разность населенностей ловушек максимальна,  $z^2 = 1$ . В этом

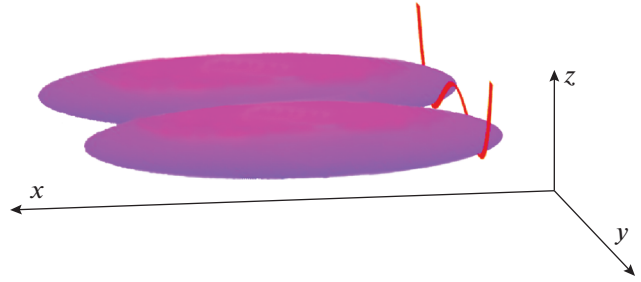


Рис. 1. БЭК в двух сигарообразных ловушках, образующих W-потенциал.

пределе уравнения (6) и функционал (5) значительно упрощаются:

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \operatorname{sign}(z)(\Lambda + I); \\ \dot{z} = 0; \\ \dot{\delta} = P/2\kappa; \\ \dot{P} = 0 \end{cases} \quad (7)$$

и

$$I = A \cos[\theta], \quad (8)$$

где

$$A = 0.5\pi \operatorname{sech}[\pi P/Nu] \cos[0.5P\delta_0] \quad (9)$$

и  $\operatorname{sign}(z) = \pm 1$  – знак разности населенностей;  $\delta_0$  – расстояние между солитонами в начальный момент времени.

Из уравнений (7) можно видеть, что максимальная разность населенностей сохраняется, при этом солитоны движутся друг относительно друга с постоянным импульсом. Можно видеть, что предельному случаю (7) удовлетворяют два решения, различающиеся знаком  $z = \pm 1$ . Эти решения представляют собой моды N00N-состояния, а само суперпозиционное N00N-состояние имеет вид:

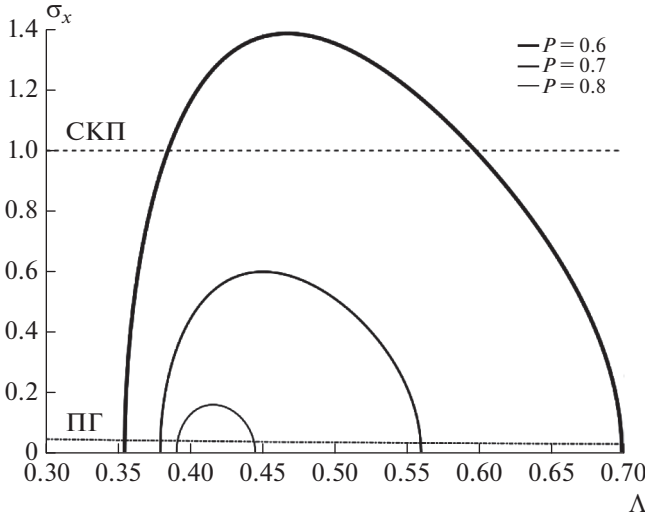
$$|N00N\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle + e^{-iN\theta_0} |-\rangle), \quad (10)$$

где

$$|\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}!} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x) a_{2,1}^{\pm}(x) e^{\pm Px/2} dx \right]^N; \quad (11)$$

$$\Phi(x) = \frac{\sqrt{Nu}}{4} \operatorname{sech} \left[ \frac{Nu}{4} x \right]; \quad (12)$$

$$\theta_0 = \arccos[-\Lambda/A]. \quad (13)$$



**Рис. 2.** Зависимость  $\sigma_\chi = \Delta\chi/\Delta\chi_{СКП}$  ( $\chi \equiv \delta_0$ ) от параметра  $\Lambda$ . Для всех кривых  $\delta_0 \approx 0.1$ .  $\Lambda$  варьировалась через изменение  $N$ . Значение  $\kappa$  выбиралось для каждой кривой индивидуально таким образом, чтобы максимальное значение  $\Lambda$  достигалось при  $N = 1000$ , при этом  $Nu = 1.3$  для всех кривых.

**ПРОЦЕДУРА ИЗМЕРЕНИЯ И ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ**

$N00N$ -состояние (10)–(13) может быть использовано в измерительной схеме на основе интерферометра Маха–Цендера в качестве состояния на входе. При этом в зависимости от задачи могут измеряться как внутренние параметры среды, зашифрованные в фазе (13), так и внешние параметры схемы, связанные с разностью хода мод и зашифрованные в дополнительном фазовом сдвиге,  $\phi$  [15]. Этот дополнительный фазовый сдвиг вводится простой заменой в (10)  $\theta_0 \rightarrow \theta = \theta_0 + \phi$ .

Оценим точность измерения фазовых параметров. Набег ошибки при измерении параметра  $\chi$  с помощью оператора  $X$  определяется по формуле [16]:

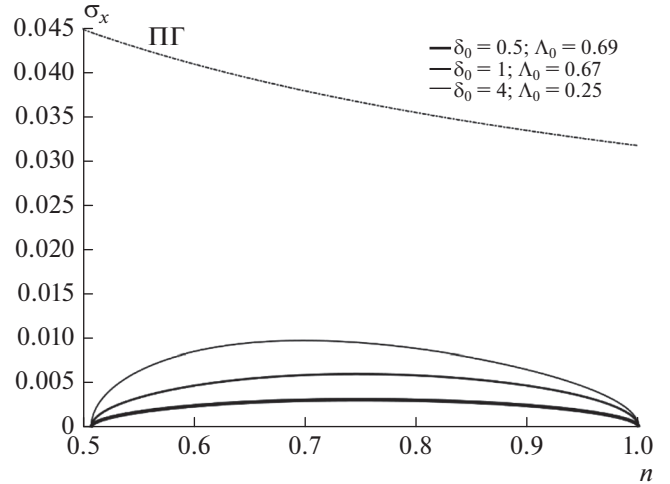
$$\langle(\Delta\chi)^2\rangle = \frac{\langle(\Delta\hat{X})^2\rangle}{|\partial\langle\hat{X}\rangle/\partial\chi|^2}. \tag{14}$$

Для получения оценки погрешности будем использовать известный подход, основанный на измерении среднего значения проекционного оператора [17]:

$$\hat{X} = |+\rangle\langle-| + |- \rangle\langle+|, \tag{15}$$

что дает

$$\Delta\chi = \sqrt{\langle(\Delta\chi)^2\rangle} = \frac{1}{N} \left| \frac{\partial\theta}{\partial\chi} \right|^{-1}. \tag{16}$$



**Рис. 3.** Зависимость  $\sigma_\chi = \Delta\chi/\Delta\chi_{СКП}$  с  $\chi \equiv P$  от нормированного числа частиц  $n = N/N_0$ . Для всех кривых  $P \approx 0.6$ ,  $N = 1000$ ,  $Nu = 1.3$ .

Заметим, что аналогичный результат можно получить при измерении с помощью оператора четности [18].

Теперь с помощью выражения (16) получим оценки точности некоторых конкретных измерений. Так, при измерении любых внешних параметров, зашифрованных в фазовом сдвиге  $\phi$ , достигается предел Гейзенберга:

$$\Delta\phi = \frac{1}{N}. \tag{17}$$

При измерении внутренних параметров с помощью фазы  $\theta_0$  (при этом полагается  $\phi = 0$ ) погрешность измерения имеет более сложный вид. Так, для измерения  $\delta_0$  при известном  $P$  (рис. 2) достигается точность

$$\Delta\delta_0 = \frac{32\kappa}{N^3 u^2 P} \left| \frac{\sqrt{A^2 - \Lambda^2}}{\text{tg}[0.5P\delta_0]} \right|. \tag{18}$$

Для измерения  $P$  при известном  $\delta_0$  (рис. 3) можно достичь точности

$$\Delta P = \frac{32\kappa}{N^3 u^2 \delta_0} \left| \frac{\sqrt{A^2 - \Lambda^2}}{\text{tg}[0.5P\delta_0] + \frac{2\pi}{Nu\delta_0} \text{th}\left[\frac{\pi P}{Nu}\right]} \right|. \tag{19}$$

Наконец, при измерении внутреннего параметра среды, связанного с длиной рассеяния частиц,  $u^2$ , достигаемая точность составляет

$$\Delta u^2 = \frac{16\kappa}{N^3} \left| \frac{\sqrt{A^2 - \Lambda^2}}{1 - \frac{\pi P}{2Nu\delta_0} \text{th}\left[\frac{\pi P}{Nu}\right]} \right|. \tag{20}$$

Точность последнего измерения существенно превышает предел Гейзенберга, за исключением случая, когда знаменатель в правой части выражения (20) обращается в нуль. При такой комбинации параметров солитонов измерение по предлагаемой схеме не представляется возможным. Что касается точности измерения кинематических параметров (18) и (19), здесь будет полезно сравнить полученную оценку точности с соответствующими СКП, определяемыми как  $\Delta\delta_{СКП} = 1/\sqrt{NP}$  и  $\Delta P_{СКП} = 1/\sqrt{N}\delta_0$ , соответственно. На рис. 2 и 3 представлены зависимости  $\sigma_\chi = \Delta\chi/\Delta\chi_{СКП}$  ( $\chi \equiv \delta_0$  и  $\chi \equiv P$  соответственно) от нормированного числа частиц  $n = N/N_0$ , где  $N_0$  – максимальное число частиц, при котором выражение (13) имеет смысл. Эта граница области допустимых значений материальных параметров определяется как  $\Lambda_0 = N_0^2 u^2 / 16\chi = A$ . Использовались следующие параметры симуляции:  $N_0 = 10^3$  и  $N_0 = 1.3$ ;  $\delta_0 \approx 0.1$  для рис. 2 и  $P \approx 0.6$  для рис. 3. На обоих рисунках штрих-пунктирной линией обозначен предел Гейзенберга (ПГ). Точечная линия на рис. 2 соответствует СКП. Из рис. 2 можно видеть, что точность измерения  $\delta_0$  при заданных параметрах превышает СКП и достигает предела Гейзенберга на границах области допустимых значений. В то же время, как видно из рис. 3, точность измерения  $P$  превышает предел Гейзенберга на всей области определения.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе кратко представлена модель формирования максимально-запутанных N00N-состояний солитонов БЭК и применение этих состояний в квантовой метрологии. При измерении параметров, связанных с разностью хода солитонов в плечах интерферометра Маха–Цендера, достигается точность на уровне предела Гейзенберга. При измерении кинематических параметров – расстояния между солитонами в начальный момент времени и постоянного импульса их относительного движения – достигаемая точность превышает стандартный квантовый предел, а при определенных комбинациях параметров, точность также достигает предела Гейзенберга. Наконец, при измерении параметров, нелинейно зависящих от

числа частиц (в рамках нелинейной метрологии), например,  $u^2$ , точность превышает предел Гейзенберга на два порядка  $N$ . Более подробно с полученными результатами, включая подробные математические выкладки, можно ознакомиться в наших работах [15, 19].

Мы благодарим за финансовую поддержку Российский фонд фундаментальных исследований (проект № 19-52-52012), и Правительство Российской Федерации (грант № 08-08).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Pezzè L., Smerzi A., Oberthaler M.K. et al. // Rev. Mod. Phys. 2018. V. 90. Art. № 035005.
2. Degen C.L., Reinhard F., Cappellaro P. et al. // Rev. Mod. Phys. 2017. V. 89. Art. № 035002.
3. Schnabel R. // Phys. Rep. 2017. V. 684. P. 1.
4. Huelga S.F., Macchiavello C., Pellizzari T. et al. // Phys. Rev. Lett. 1997. V. 79. P. 3865.
5. Ludlow A.D., Boyd M.M., Ye J. et al. // Rev. Mod. Phys. 2015. V. 87. P. 637.
6. Kitching J., Knappe S., Donley E.A. // IEEE Sens. J. 2011. V. 11. P. 1749.
7. Berg P., Abend S., Tackmann G. et al. // Phys. Rev. Lett. 2015. V. 114. Art. № 063002.
8. Kucsko G., Maurer P.C., Yao N.Y. et al. // Nature. 2013. V. 500. P. 54.
9. Taylor M.A., Bowen W.P. // Phys. Rep. 2016. V. 615. P. 1059.
10. Hentschel A., Sanders B.S. // Phys. Rev. Lett. 2010. V. 104. Art. № 063603.
11. Kolodynski J., Demkowicz-Dobrzanski R. // New J. Phys. 2013. V. 15. Art. № 073043.
12. Pezzè L., Collins L.A., Smerzi A. et al. // Phys. Rev. A. 2005. V. 72. Art. № 043612.
13. Boto A.N., Kok P., Abrams D.S. et al. // Phys. Rev. Lett. 2000. V. 85. P. 2733.
14. Dowling J.P. // Contemp. Phys. 2008. V. 49. P. 125.
15. Tsarev D.V., Arakelian S.M., Chuang Y.L. et al. // Opt. Exp. 2018. V. 26. Art. № 19583.
16. Helstrom C.W. Quantum detection and estimation theory. Academic Press, 1976.
17. Kok P., Braunstein S.L., Dowling J.P. et al. // J. Opt. B. 2004. V. 6. P. 811.
18. Gerry C.C., Benmoussa A., Campos R.A. // J. Mod. Opt. 2007. V. 54. P. 2177.
19. Tsarev D.V., Arakelian S.M., Chuang Y.-L. et al. // New J. Phys. 2019. V. 21. Art. № 083041.