ИЗВЕСТИЯ РАН. СЕРИЯ ФИЗИЧЕСКАЯ, 2020, том 84, № 5, с. 714–715

УДК 537.624,537.632

ВЗАИМНАЯ ОРИЕНТАЦИЯ ВЕКТОРА ПОЙНТИНГА И ВЕКТОРА ГРУППОВОЙ СКОРОСТИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В БИГИРОТРОПНОЙ СРЕДЕ

Э. Г. Локк[1], *, С. В. Герус[1], А. Ю. Анненков[1]

[1]*Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт радиотехники и электроники имени В.А. Котельникова Российской академии наук, Фрязинский филиал, Фрязино, Россия*

**E-mail: edwin@ms.ire.rssi.ru*

Поступила в редакцию 02.12.2019 г.
После доработки 23.12.2019 г.
Принята к публикации 27.01.2020 г.

Теоретически доказана коллинеарность вектора Пойнтинга и вектора групповой скорости электромагнитных волн, распространяющихся в бигиротропной среде с эрмитовыми тензорами диэлектрической и магнитной проницаемостей.

DOI: 10.31857/S0367676520050191

Распространение электромагнитных волн в неограниченной бигиротропной среде (частным случаем которой является ферромагнитное пространство) уже исследовалось ранее [1–5] (подробнее см. гл. 5 в [1] и гл. 5 в [2]). Ниже на основе уравнений Максвелла для бигиротропной среды исследована взаимная ориентация вектора Пойнтинга и вектора групповой скорости электромагнитных волн с помощью метода, использованного ранее в [6].

Пусть имеется неограниченная бигиротропная среда, намагниченная до насыщения однородным постоянным магнитным полем, направленным вдоль оси z. В общем случае такую намагниченную бигиротропную среду можно охарактеризовать диэлектрической и магнитной проницаемостями, описываемыми эрмитовыми тензорами второго ранга:

$$\overleftrightarrow{\mu} = \begin{vmatrix} \mu & i\nu & 0 \\ -i\nu & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{zz} \end{vmatrix}, \quad \overleftrightarrow{\varepsilon} = \begin{vmatrix} \varepsilon & ig & 0 \\ -ig & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{vmatrix}. \tag{1}$$

Электромагнитное поле с частотой ω, распространяющееся в данной среде и изменяющееся во времени по гармоническому закону $\exp(i\omega t)$, должно удовлетворять системе уравнений Максвелла для комплексных амплитуд:

$$\begin{cases} \operatorname{rot}\vec{E} + i\vec{B}\omega/c = 0, \\ \operatorname{div}\vec{B} = 0, \\ \operatorname{rot}\vec{H} - i\vec{D}\omega/c = 0, \\ \operatorname{div}\vec{D} = 0, \end{cases} \tag{2}$$

где c – скорость света в вакууме; $\vec{E}$ и $\vec{H}$ – комплексные амплитуды векторов напряженностей СВЧ электрического и магнитного полей; $\vec{D}$ и $\vec{B}$ – комплексные амплитуды векторов напряженностей СВЧ электрической и магнитной индукций, которые связаны с $\vec{E}$ и $\vec{H}$ соотношениями

$$\vec{D} = \overleftrightarrow{\varepsilon}\vec{E} \quad \text{и} \quad \vec{B} = \overleftrightarrow{\mu}\vec{H}. \tag{3}$$

Будем искать решения системы уравнений (2) в виде однородной плоской электромагнитной волны с волновым вектором $\vec{k}$, т.е., будем считать, что все компоненты полей $\vec{E}$ и $\vec{H}$ (E_x E_y, E_z, H_x, H_y и H_z) изменяются в пространстве (также как и во времени) по гармоническому закону в соответствии с выражениями

$$\vec{E} = \overrightarrow{E_0}\exp(-i\vec{k}\vec{r}), \tag{4}$$

$$\vec{H} = \overrightarrow{H_0}\exp(-i\vec{k}\vec{r}). \tag{5}$$

Подставив выражения (4) и (5) для векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ (и аналогичные выражения для векторов $\vec{D}$ и $\vec{B}$) непосредственно в первое и третье уравнения системы (2) и выполнив операцию rot, получим

$$\vec{B} = \left[\vec{k}\vec{E}\right]/k_0, \tag{6}$$

$$\vec{D} = -\left[\vec{k}\vec{H}\right]/k_0, \tag{7}$$

где введено обозначение $k_0 = \omega/c$.

Заметим теперь, что, поскольку концы всех волновых векторов лежат на изочастотной поверхности (или поверхности волновых векторов), то вектор, равный разности двух очень близко лежащих волновых векторов $\vec{k}$ и $\vec{k}'$, будет соединять между собой две очень близкие точки изочастотной поверхности. То есть в пределе, когда вектор $\vec{k}'$ стремиться к вектору $\vec{k}$, разность этих двух волновых векторов – вектор (дифференциал) $d\vec{k}$ – будет лежать в плоскости, которая является касательной к изочастотной поверхности в точке, соответствующей вектору $\vec{k}$ (в точке, в которую направлен вектор $\vec{k}$). Поэтому, если мы докажем, что скалярное произведение вектора Пойнтинга на любой произвольно выбранный вектор $d\vec{k}$ равно нулю, то это будет означать, что вектор Пойнтинга $\vec{P}$ всегда перпендикулярен изочастотной поверхности. Здесь под термином любой произвольно выбранный вектор подразумевается следующее: какой бы произвольный вектор $d\vec{k}$ мы ни выбрали, этот вектор всегда будет лежать в плоскости, касательной изочастотной поверхности в данной точке. Поэтому, если доказать перпендикулярность вектора Пойнтинга к любому произвольному вектору $d\vec{k}$, то это фактически будет означать, что вектор Пойнтинга перпендикулярен к данной плоскости и, соответственно, к изочастотной поверхности.

Полагая, что исследуемая волна монохроматическая ($\omega = \mathrm{const}$), и дифференцируя уравнения (6) и (7) (чтобы в этих уравнениях появилась величина $d\vec{k}$), получим:

$$d\vec{B} = \left[\vec{k}d\vec{E}\right]/k_0 + \left[d\vec{k}\vec{E}\right]/k_0, \tag{8}$$

$$d\vec{D} = -\left[\vec{k}d\vec{H}\right]/k_0 + \left[\vec{H}d\vec{k}\right]/k_0. \tag{9}$$

Теперь, чтобы в соотношениях (8) и (9) появилось векторное произведение $\vec{E}$ и $\vec{H}$, определяющее вектор Пойнтинга, умножим скалярно уравнение (8) на комплексно-сопряженную величину $\overrightarrow{H^*}$, а уравнение (9) – на комплексно-сопряженную величину $\overrightarrow{E^*}$:

$$\overrightarrow{H^*}d\vec{B} = \overrightarrow{H^*}\left[\vec{k}d\vec{E}\right]/k_0 + \overrightarrow{H^*}\left[d\vec{k}\vec{E}\right]/k_0, \tag{10}$$

$$\overrightarrow{E^*}d\vec{D} = -\overrightarrow{E^*}\left[\vec{k}d\vec{H}\right]/k_0 + \overrightarrow{E^*}\left[\vec{H}d\vec{k}\right]/k_0. \tag{11}$$

Используя правила перемножения векторов и учитывая выражения (6) и (7), уравнения (10) и (11) можно записать в виде

$$\overrightarrow{H^*}d\vec{B} = \overrightarrow{D^*}d\vec{E} + \left[\vec{E}\overrightarrow{H^*}\right]d\vec{k}\,/k_0, \tag{12}$$

$$\overrightarrow{E^*}d\vec{D} = \overrightarrow{B^*}d\vec{H} + \left[\overrightarrow{E^*}\vec{H}\right]d\vec{k}\,/k_0. \tag{13}$$

Так как тензоры диэлектрической и магнитной проницаемостей исследуемой бигиротропной среды являются эрмитовыми, то справедливы соотношения (14) и (15):

$$\overrightarrow{E^*}d\vec{D} = \overrightarrow{E^*}d\left(\ddot{\varepsilon}\vec{E}\right) = \overrightarrow{D^*}d\vec{E}, \tag{14}$$

$$\overrightarrow{H^*}d\vec{B} = \overrightarrow{H^*}d\left(\ddot{\mu}\vec{H}\right) = \overrightarrow{B^*}d\vec{H}. \tag{15}$$

Поскольку $\mathrm{Re}\left[\vec{E}\overrightarrow{H^*}\right] \equiv \mathrm{Re}\left[\overrightarrow{E^*}\vec{H}\right]$, то, складывая уравнения (12) и (13) с учетом (14) и (15), получим

$$\left[\vec{E}\overrightarrow{H^*}\right]d\vec{k} = 0 \quad \text{или} \quad \vec{P}d\vec{k} = 0. \tag{16}$$

Итак, мы доказали, что вектор Пойнтинга $\vec{P}$ и любой произвольно выбранный вектор $d\vec{k}$ (лежащий в плоскости, касательной к изочастотной поверхности в точке, соответствующей вектору $\vec{k}$) перпендикулярны или, что вектор Пойнтинга $\vec{P}$ всегда перпендикулярен изочастотной поверхности.

Поскольку вектор групповой скорости волны $\vec{V}$ определяется выражением[1] [7]

$$\vec{V} = \frac{d\omega}{d\vec{k}} = \mathrm{grad}_{\vec{k}}\,\omega = \frac{\partial\omega}{\partial k_x}\overrightarrow{x_0} + \frac{\partial\omega}{\partial k_y}\overrightarrow{y_0} + \frac{\partial\omega}{\partial k_z}\overrightarrow{z_0}, \tag{17}$$

то, очевидно, что вектор $\vec{V}$ тоже всегда перпендикулярен изочастотной поверхности по определению (как градиент изочастотной поверхности).

Таким образом, мы доказали, что векторы $\vec{P}$ и $\vec{V}$ всегда коллинеарны.

Следует, однако, отметить, что коллинеарность векторов $\vec{P}$ и $\vec{V}$ означает, что они всегда либо ориентированы одинаково, либо ориентированы противоположно друг другу. Доказать, что векторы $\vec{P}$ и $\vec{V}$ всегда ориентированы одинаково приведенным выше способом невозможно.

Отметим также, что поскольку выполнение соотношений (14) и (15) обеспечивают эрмитовые свойства тензоров $\ddot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ и $\ddot{\boldsymbol{\mu}}$ бигиротропной среды, то всё сказанное выше справедливо для любой анизотропной среды, у которой тензоры диэлектрической и магнитной проницаемостей являются либо эрмитовыми, либо симметричными.

Работа выполнена за счет бюджетного финансирования в рамках государственного задания по теме № 0030-2019-0014 и при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 17-07-00016).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гуревич А.Г.* Ферриты на сверхвысоких частотах. М.: ГИФМЛ, 1960. 407 с.
2. *Гуревич А.Г., Мелков Г.А.* Магнитные колебания и волны. М.: Наука, 1994. 464 с.
3. *Зубков В.И., Щеглов В.И.* // Радиотехн. и электрон. 2002. Т. 47. № 9. С. 1101; *Zubkov V.I., Shcheglov V.I.* // J. Commun. Techn. Electron. 2002. V. 47. № 9. P. 1002.
4. *Зубков В.И., Щеглов В.И.* // Радиотехн. и электрон. 2003. Т. 48. № 10. С. 1186; *Zubkov V.I., Shcheglov V.I.* // J. Commun. Techn. Electron. 2003. V. 48. № 10. P. 1087.
5. *Локк Э.Г.* // Радиотехн. и электрон. 2017. Т. 62. № 3. С. 259; *Lokk E.G.* // J. Commun. Techn. Electron. 2017. V. 62. № 3. P. 251.
6. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, ГИФМЛ, 1982. 620 с.
7. *Мандельштам Л.И.* Лекции по оптике, теории относительности и квантовой механике. М.: Наука, 1972. 440 с.

[1] Используя для групповой скорости формулу (17), мы подразумеваем, что введение понятия “групповая скорость” возможно для рассматриваемой бигиротропной среды в соответствии с физическим смыслом, вкладываемым в это понятие в работе [7].