УДК 517.958

ЯВНЫЕ РЕШЕНИЯ АНАЛОГОВ ВРЕМЕННЫХ УРАВНЕНИЙ ШРЁДИНГЕРА С ГАМИЛЬТОНОВОЙ СИСТЕМОЙ H^{4+1}

© 2020 г. В. А. Павленко[1, 2], Б. И. Сулейманов[3, *]

[1]Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение Высшего образования "Башкирский государственный аграрный университет", Уфа, Россия

[2]Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение Высшего образования "Башкирский государственный университет", Уфа, Россия

[3]Институт математики с вычислительным центром — обособленное структурное подразделение Федерального государственного бюджетного научного учреждения Уфимского федерального исследовательского центра Российской академии наук, Уфа, Россия

*E-mail: bisul@mail.ru

Поступила в редакцию 28.11.2019 г.
После доработки 19.12.2019 г.
Принята к публикации 27.01.2020 г.

Строятся совместные решения двух аналогов временных уравнений Шрёдингера, определяемых гамильтонианами $H_{s_k}(s_1, s_2, q_1, q_2, p_1, p_2)$ $(k = 1,2)$ гамильтоновой системы H^{4+1}, являющейся представителем известной иерархии вырождений системы Гарнье, описанной Х. Кимурой в 1986 г.

DOI: 10.31857/S0367676520050270

Настоящая статья продолжает серию исследований [1–3], в которых построены совместные решения пар эволюционных уравнений вида

$$\varepsilon\frac{\partial\Psi}{\partial s_k} = H_{s_k}\left(s_1, s_2, r, \rho, -\varepsilon\frac{\partial}{\partial r}, -\varepsilon\frac{\partial}{\partial \rho}\right)\Psi\,(k = 1,2), \quad (1)$$

где ε — вещественные постоянные, а дифференциальные операторы правых частей соответствуют гамильтонианам $H_{s_k}(s_1, s_2, q_1, q_2, p_1, p_2)$ совместных систем гамильтоновых обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ)

$$\begin{gathered}(q_j)'_{s_k} = (H_{s_k})'_{p_j}, \quad (p_j)'_{s_k} = \\ = (H_{s_k})'_{q_j} \quad (k = 1,2)(j = 1,2)\end{gathered} \quad (2)$$

иерархии изомонодромных вырождений системы Гарнье из [4]. Данные эволюционные уравнения из временных уравнений Шредингера возникают при формальной замене постоянной Планка h чисто мнимым числом $-2\pi i\varepsilon$.

В представленной работе решения пар аналогов временных уравнений Шрёдингера вида (1), схожие по своим свойствам с решениями из [1–3] и [5], строятся для представителя иерархии изомонодромных вырождений системы Гарнье из первоначального списка Х. Кимуры, которая в терминологии [4] называется гамильтоновой системой H^{4+1}. При построении этих решений (1) важную роль играет выписываемая ниже замена (15). Подобная замена применялась в [1–3, 5] и ранее, в других целях, в [10].

Решения гамильтоновой системы H^{4+1} выражаются через совместные решения расщепленного нелинейного уравнения Шрёдингера (НУШ)

$$ip_t + p_{xx} - 8p^2q = 0, \quad iq_t - q_{xx} + 8pq^2 = 0, \quad (3)$$

и системы ОДУ

$$\begin{gathered}i\beta q_{xxx} - 8tq_{xx} + 64tpq^2 - 24i\beta pqq_x - \\ - 4iq - 4ixq_x + 8i\gamma q = 0,\end{gathered} \quad (4)$$

$$\begin{gathered}i\beta p_{xxx} + 8tp_{xx} - 64tp^2q - 24i\beta pqp_x - \\ - 4ip - 4ixp_x - 8i\gamma p = 0.\end{gathered} \quad (5)$$

(Согласно [6], среди решений (3)–(5) вероятно находится семейство решений НУШ $-ip_t = p_{xx} + 2\delta|p|^2p$, которое было описано в [7]).

Совместные решения (3)–(5) относятся к классу изомонодромных [8] решений расщепленного НУШ (3), так как на них линейные уравнения

$$\begin{gathered}\Psi_x = \begin{pmatrix} -i\lambda & 2ip \\ -2iq & i\lambda \end{pmatrix}\Psi, \\ \Psi_t = \begin{pmatrix} -2i\lambda^2 - 4ipq & 4i\lambda p - 2p_x \\ -4i\lambda q - 2q_x & 2i\lambda^2 + 4ipq \end{pmatrix}\Psi,\end{gathered} \quad (6)$$

совместны также с линейной системой ОДУ

$$\Psi_\lambda = \lambda^2\begin{pmatrix}-i\beta & 0\\ 0 & i\beta\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}-4it & 2i\beta p\\ -2i\beta q & 4it\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-2i\beta pq - ix & 8itp - \beta p_x\\ -8itq - \beta q_x & 2i\beta pq + ix\end{pmatrix} + \frac{1}{\lambda}A_3, \quad (7)$$

где

$$A_3 = \begin{pmatrix}-\beta pq_x + \beta p_x q - 8itpq + \gamma & -\frac{i\beta p_{xx}}{2} - 4tp_x + 2ixp + 4i\beta p^2 q\\ \frac{i\beta q_{xx}}{2} - 4tq_x - 2ixq - 4i\beta pq^2 & \beta pq_x - \beta p_x q + 8itpq - \gamma\end{pmatrix}.$$

Определитель матрицы-коэффициента A_3 постоянен: $\mathrm{Det}A_3 = -\frac{k_0^2 - 1}{4}$.

В статье [4] система H^{4+1} представлена в двух видах:

1) в виде пары совместных между собой изомонодромных гамильтоновых систем (2) с гамильтонианами

$$\begin{gathered}H_1 = K_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}\mu_1^2 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}\mu_2^2 - \\ - \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\left(\lambda_1^3 + t_2\lambda_1^2 + t_1\lambda_1 + \kappa_0\right)\mu_1 + \\ + \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\left(\lambda_2^3 + t_2\lambda_2^2 + t_1\lambda_2 + \kappa_0\right)\mu_2 + \\ + \kappa_\infty(\lambda_1 + \lambda_2),\end{gathered} \quad (8)$$

$$\begin{gathered}H_2 = K_2 = \frac{(\lambda_1 + t_2)\left(\lambda_2\mu_2^2 - \lambda_1\mu_1^2\right)}{2(\lambda_1 - \lambda_2)} + \frac{\lambda_2 + t_2}{2(\lambda_1 - \lambda_2)}\times \\ \times\left(\lambda_1^3 + t_2\lambda_1^2 + t_1\lambda_1 + \kappa_0 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2 + t_2}\right)\mu_1 - \\ - \frac{\lambda_1 + t_2}{2(\lambda_1 - \lambda_2)}\left(\lambda_2^3 + t_2\lambda_2^2 + t_1\lambda_2 + \kappa_0 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + t_2}\right)\times \\ \times\mu_2 + \frac{\kappa_\infty}{2}(\lambda_1\lambda_2 + t_2(\lambda_1 + \lambda_2)),\end{gathered} \quad (9)$$

с координатами $q_i = \lambda_i$, импульсами $p_i = \mu_i$ и временами $s_i = t_i$;

2) в виде пары совместных гамильтоновых систем с гамильтонианами

$$\begin{gathered}H_1 = p_1^2 - 2s_2p_1p_2 - \left(q_2 + s_2q_1 + s_1 - \frac{s_2^2}{2}\right)p_2^2 - \\ - (q_1(q_1 + s_2) - q_2)\,p_1 - \\ - \left(q_1q_2 + \left(s_1 - \frac{s_2^2}{2}\right)q_1 + s_2q_2 + 1 - \kappa_0\right)p_2 + \kappa_\infty q_1,\end{gathered} \quad (10)$$

$$\begin{gathered}H_2 = -s_2p_1^2 - 2\left(q_2 + s_2q_1 + s_1 - \frac{s_2^2}{2}\right)p_1p_2 - \\ - \left((q_1 - s_2)\left(q_2 + s_2q_1 + s_1 + \frac{s_2^2}{2}\right) - s_2^3\right)p_2^2 - \\ - \left(q_1q_2 + \left(s_1 - \frac{s_2^2}{2}\right)q_1 + s_2q_2 + 1 - \kappa_0\right)p_1 - \\ - \left(q_2^2 - \left(\kappa_0 - 1 + s_2\left(s_1 - \frac{s_2^2}{2}\right)\right)q_1 + \left(s_1 - \frac{s_2^2}{2}\right)q_2\right)\times \\ \times p_2 + \kappa_\infty q_2.\end{gathered} \quad (11)$$

В [4] приведено преобразование, связывающее эти две системы:

$$\begin{gathered}q_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + t_2, \\ q_2 = \lambda_1\lambda_2 + \frac{t_2}{2}(\lambda_1 + \lambda_2 + t_2) - t_1, \\ s_1 = t_1 - \frac{t^2}{2},\ s_2 = -\frac{t_2}{2}.\end{gathered} \quad (12)$$

А в [9] приведено еще одно представление системы H^{4+1} в виде пары совместных гамильтоновых систем (2) с временами $s_i = y_i$, координатами $q_i = Q_i$, импульсами $p_i = P_i$ и гамильтонианами

$$\begin{gathered}H_1 = \Lambda_1 = P_1^2 - (Q_1 + y_1)\,p_1 + \theta_1^\infty Q_1 + \\ + P_2Q_2(Q_1 - Q_2 + y_2) + P_1P_2 + \theta^0 Q_2,\end{gathered} \quad (13)$$

$$\begin{gathered}H_2 = \Lambda_2 = -P_2^2Q_2 - y_2P_2Q_2^2 + y_2^2P_2Q_2 + \\ + \theta^0T_2Q_2 - \theta_1^\infty P_2 + P_1P_2(Q_1 - 2Q_2 + y_2) + \\ + Q_1Q_2\left(P_2Q_2 - \theta^0\right) + \theta^0P_1 + y_1P_2Q_2.\end{gathered} \quad (14)$$

Для соответствующих гамильтоновых систем ОДУ (2) в [9] выписаны три линейных ОДУ, для которых эти гамильтоновы системы являются условием совместности. Выписанная выше совместная система линейных ОДУ (6), (7) легко сводится к данной системе трех линейных ОДУ из [8]. В результате этого сведения устанавливается возможность явного выражения P_i и Q_i через совместные решения $p(x,t)$, $q(x,t)$ уравнений (3)–(5).

Гамильтоновы системы с гамильтонианами (8), (9) и (13), (14) связаны друг с другом каноническим преобразованием (мы благодарим Х. Каваками за личное сообщение, в котором он указал это преобразование)

$$Q_1 = -\lambda_1 - \lambda_2 - \frac{t_2}{2},$$
$$P_1 = \frac{\lambda_1^3 - \lambda_2^3 - \mu_1\lambda_1 + \mu_2\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} + t_1 + $$
$$+ (\lambda_1 + \lambda_2)t_2, \quad y_1 = t_1 - \frac{t_2^2}{4},$$
$$Q_2 = \frac{\kappa_0}{\lambda_1\lambda_2} - \lambda_1 - \lambda_2 - t_2 + \frac{\mu_1 - \mu_2}{\lambda_1 - \lambda_2},$$
$$P_2 = \lambda_1\lambda_2, \quad y_2 = -\frac{t_2}{2}.$$

Сделаем замены

$$\beta = \frac{i}{2k_1^3}, \quad \gamma = \frac{\kappa_0 + 1}{2}, \quad \zeta = k_1 r,$$
$$\eta = k_1\rho, \quad x = \beta k_1^2 t_1, \quad t = \frac{\beta k_1 t_2}{4},$$

и по фундаментальным совместным решениям ОДУ (6), (7) образуем матрицу

$$\Psi = (r-\rho)^{-1}(r\rho)^{\frac{1-\varkappa_0}{2}} e^{S(x,t) - f(t_1,t_2,r,\rho)} \Phi^{-1} \times \\ \times (x,t,\eta)\Phi(x,t,\zeta), \tag{15}$$

где

$$f(t_1,t_2,r,\rho) = \frac{t_1^3}{12} + \frac{\kappa_0+1}{4}t_1t_2 + \frac{r^3+\rho^3}{6} + \\ + \frac{t_2(r^2+\rho^2)}{4} + \frac{t_1(r+\rho)}{2},$$

а функция S удовлетворяет равенствам ($A_{k,ij}$ — элементы матриц A_k)

$$S_x = -\frac{1}{\beta}\big((A_{2,11})^2 + A_{2,12}A_{2,21} - 8itA_{3,11} -$$
$$- 2i\beta qA_{3,12} + 2i\beta pA_{3,21}\big), \quad S_t = -\frac{2}{\beta}\times$$
$$\times(-2A_{3,11}A_{2,11} + A_{3,12}A_{2,21} + A_{3,12}A_{2,12}) +$$
$$+ \frac{8t}{\beta^2}\big((A_{2,11})^2 + A_{2,12}A_{2,21} + 4itA_{3,11} -$$
$$- 2i\beta qA_{3,12} + 2i\beta A_{3,21}\big) + \frac{8tx^2}{\beta^2} + \frac{4i\gamma x}{\beta}.$$

Матрица Ψ есть совместное решение пары эволюционных уравнений

$$(r-\rho)\Psi_{t_1} = r\Psi_{rr} - \rho\Psi_{\rho\rho} + \\ + \left(r^3 + t_2r^2 + t_1r + \kappa_0\right)\Psi_r - \\ - \left(\rho^3 + t_2\rho^2 + t_1\rho + \kappa_0\right)\Psi_\rho + \kappa_\infty\left(r^2 - \rho^2\right)\Psi, \tag{16}$$

$$2(r-\rho)\Psi_{t_2} = -r(\rho+t_2)\Psi_{rr} + \rho(r+t_2)\Psi_{\rho\rho} + \\ + \left((\rho+t_2)\left(r^3 + t_2r^2 + t_1r + \kappa_0\right) - 1\right)\Psi_r - \\ - \left((r+t_2)\left(\rho^3 + t_2\rho^2 + t_1\rho + \kappa_0\right) - 1\right)\Psi_\rho - \\ - \kappa_\infty(r-\rho)(r\rho + t_2(r+\rho))\Psi. \tag{17}$$

Эти эволюционные уравнения можно символически записать в виде уравнений (1) с $\varepsilon = 1$, которые соответствуют гамильтонианам (3), (4) гамильтоновых систем (2) с временами $s_i = t_i$. А после замены независимых переменных

$$y = r + \rho + t_2, \quad z = r\rho + \frac{1}{2}t_2(r + \rho + t_2) - t_1,$$
$$s_1 = t_1 - \frac{1}{8}t_2^2, \quad s_2 = -\frac{1}{2}t_2,$$

представляющей собой квантовый вариант преобразования (12), уравнения (16), (17) переходят в аналоги временных уравнений Шрёдингера

$$\Psi_{s_1} = \Psi_{yy} - 2s_2\Psi_{yz} - \left(z + s_2y + s_1 - \frac{1}{2}s_2^2\right)\Psi_{zz} + \\ + \left(y^2 + s_2y - z\right)\Psi_y + \\ + \left(zy + y\left(s_1 - \frac{1}{2}s_2^2\right) + s_2z + 1 - \kappa_0\right)\Psi_z + \kappa_\infty y\Psi, \tag{18}$$

$$\Psi_{s_2} = -s_2\Psi_{yy} - 2\left(z + s_2y + s_1 - \frac{1}{2}s_2^2\right)\Psi_{yz} + \\ + \left((s_2 - y)\left(z + s_2y + s_1 + \frac{1}{2}s_2^2\right) - s_2^3\right)\Psi_{zz} + \\ + \left(yz + y\left(s_1 - \frac{1}{2}s_2^2\right) + s_2z + 1 - \kappa_0\right)\Psi_y + \\ + \left(z^2 - y\left(s_1s_2 - \frac{1}{2}s_2^3 + \kappa_0 - 1\right) + z\left(s_1 - \frac{1}{2}s_2^2\right)\right)\Psi_z + \\ + \kappa_\infty z\Psi \tag{19}$$

вида (1) с $\varepsilon = 1$, соответствующих полиномиальным гамильтонианам (10), (11).

В статье [2] решения уравнений вида (1), подобные сконструированным выше решениям пар уравнений (16), (17) и (18), (19), были предъявлены для пар гамильтонианов, определяющих классическую изомонодромную систему Гарнье. Эти явные решения эволюционных уравнений из [2] одновременно задают и решения известных уравнений Белавина—Полякова—Замолодчикова конформной теории поля в случае центрального заряда, равного единице. Решения пар эволюционных уравнений (16), (17) и (18), (19), определяемые гамильтоновыми изомонодромными вырождениями системы Гарнье, задают также и решения уравнений, являющихся, вероятно, некоторыми вырождениями этих уравнений Белавина—Полякова—Замолодчикова. Отметим также то обстоятельство, что решения уравнений вида (1) представляют потенциальный интерес для некоторых задач диффузии проблем теоретико-вероятностного характера (см. по этому поводу Замечание 1 в [2]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сулейманов Б.И.* // Функц. анализ и его прил. 2014. Т. 48. № 3. С. 52; *Suleimanov B.I.* // Func. Anal. Appl. 2014. V. 48. № 3. P. 198.
2. *Новиков Д.П, Сулейманов Б.И.* // ТМФ. 2016. Т. 187. № 1. С. 39; *Novikov D.P., Suleimanov B.I.* // Theor. Math. Phys. 2016. V. 187. № 1. P. 479.
3. *Павленко В.А., Сулейманов Б.И.* // Уфимский мат. журн. 2018. Т. 10. № 4. С. 92; *Pavlenko V.A., Suleimanov B.I.* // Ufa Math. J. 2018. V. 10. № 4. P. 92.
4. *Kimura H.* // Ann. Matem. Pura Appl. IV. 1989. V. 155. № 1. P. 25.
5. *Павленко В.А., Сулейманов Б.И.* // Уфимский мат. журн. 2017. Т. 9. № 4. С. 100; *Pavlenko V.A., Suleimanov B.I.* // Ufa Math. J. 2018. V. 9. № 4. P. 97.
6. *Сулейманов Б.И.* // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обзоры. ВИНИТИ РАН. 2019. Т. 163. С. 81.
7. *Haberman R., Sun Ren-ji.* // Proc. 5th Int. Conf. on Boundary and Interior Layers. (Shanghai, 1988).
8. *Итс А.Р.* // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1985. Т. 49. № 3. С. 530; *Its A.R.* // Math. USSR-Izv. 1986. V. 26. № 3. P. 497.
9. *Kawakami H., Nakamura A., Sakai H.* // arXiv: 1209.3836. 2012.
10. *Новиков Д.П.* // ТМФ. 2009. Т. 161. № 2. С. 191; *Novikov D.P.* // Theor. Math. Phys. 2009. V. 161. № 2. P. 1485.