УДК 517.958

ТИПИЧНАЯ ПРОВАЛЬНАЯ ОСОБЕННОСТЬ СБОРКИ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ОДНОМЕРНОГО ИЗОЭНТРОПИЧЕСКОГО ГАЗА

© 2020 г. Б. И. Сулейманов[1], *, А. М. Шавлуков[2]

[1]Институт математики с вычислительным центром – обособленное структурное подразделение Федерального государственного бюджетного научного учреждения Уфимского федерального исследовательского центра Российской академии наук, Уфа, Россия

[2]Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования "Башкирский государственный университет", Уфа, Россия

*E-mail: bisul@mail.ru

Поступила в редакцию 28.11.2019 г.
После доработки 19.12.2019 г.
Принята к публикации 27.01.2020 г.

Исследуются решения системы уравнений движения одномерного изоэнтропического газа при малых значениях плотности. Описана типичная особенность таких решений, отвечающая катастрофе сборки. В частном случае уравнений мелкой воды явно выписано эталонное решение с такой особенностью. В терминах данного эталонного решения строится асимптотическое решение уравнений движения одномерного изоэнтропического газа.

DOI: 10.31857/S0367676520050403

ВВЕДЕНИЕ

В последние десятилетия довольно активно стала развиваться тематика, связанная с описанием особенностей решений гидродинамических уравнений, которые являются типичными в математической теории катастроф [1] (см., например, [2–11]). В частности, в [5] было показано, что процессы зарождения ударных волн общего положения, присущих решениям системы уравнений движения изоэнтропического газа ($\rho \geq 0$ – плотность газа)

$$\rho'_T + (\rho v)'_X = 0, \quad v'_T + vv'_X + \alpha(\rho)\rho'_X = 0, \qquad (1)$$

описываются корнями кубического уравнения катастрофы сборки.

В предположении, что при $\rho \to 0$ квадрат скорости звука имеет вид

$$\alpha(\rho) = 4 + \alpha_1\rho + \sum_{j=2}^{\infty}\alpha_j\rho^j, \qquad (2)$$

в настоящей работе мы показываем, что решениям (1) присущи и особенности общего положения типа сборки, которым соответствуют такие точки градиентных катастроф $T = T_*$, $X = X_*$, что $\rho(T_*, X_*) = 0$.

ПРОВАЛЬНАЯ ГРАДИЕНТНАЯ КАТАСТРОФА

Рассматривая X и T как функции независимых переменных ρ и v, получим следующую линейную систему уравнений:

$$X'_\rho = vT'_\rho - \alpha(\rho)T'_v, \quad X'_v = vT'_v - \rho T'_\rho. \qquad (3)$$

Точкам градиентных катастроф (точкам обращения в бесконечность производных решений (1)) отвечают нули якобиана $J = X'_\rho T'_v - T'_\rho X'_v$ гладкого отображения $(\rho, v) \to (X, T)$, который, согласно (3), можно записать в виде

$$J = \rho T'^2_\rho - \alpha(\rho)T'^2_v. \qquad (4)$$

В свою очередь, с помощью соотношений

$$T = B_v, \quad X = -B - \rho B'_\rho + vB'_v \qquad (5)$$

решения (3) выражаются [11] через решения $B(\rho, v)$ уравнения второго порядка

$$\alpha(\rho)B''_{vv} = \rho B''_{\rho\rho} + 2B'_\rho. \qquad (6)$$

Значение $\rho = 0$ особенное для решений уравнения (6). Физически ему соответствует провал плотности газа до нуля. В настоящей работе, исходя из гладких в окрестности точек $v = v_*$, $\rho = 0$ решений уравнения (6)

$$B = b_{00} + \sum_{i+j>0} b_{ij}(v - v_*)^i \rho^j, \tag{7}$$

мы описываем типичные точки нулей якобиана (4) вида $(v_*, 0)$. Поэтому, согласно идеологии теории катастроф [1, гл. 2–4], при рассмотрении ситуации “общего положения” далее можно будет наложить лишь одно ограничение в виде равенства на коэффициенты b_{ij} рядов Тейлора (7), которое не следует из справедливости (6). Эта возможность используется ниже при обнулении (4).

Подстановка рядов (2) и (7) в (6) с последующим приравниванием коэффициентов при одинаковых степенях $(v - v_*)^n \rho^m$ дает соотношения:

$$\begin{gathered} 4b_{20} = b_{01}, \quad 12b_{30} = b_{11}, \quad \alpha_1 b_{20} + 4b_{21} = 3b_{02}, \\ 4b_{40} = b_{21}, \quad 4b_{31} + \alpha_1 b_{30} = b_{12}, \\ \alpha_2 b_{20} + \alpha_1, b_{21} + 4b_{22} = 6b_{03}, \ldots. \end{gathered} \tag{8}$$

Из (5) следует, что координаты $T_* = T(v_*, 0)$, $X_* = X(v_*, 0)$ и коэффициенты b_{00}, b_{10} разложения Тейлора (7) связаны формулами

$$T_* = b_{10}, \quad b_{00} = T_* v_* - X_*. \tag{9}$$

Рассмотрим ситуацию обращения в нуль якобиана (4) в точке $(v_*, 0)$, которая соответствует равенству

$$b_{20} = 2T'_v(v_*, 0) = 2B''_{vv}(v_*, 0) = 0. \tag{10}$$

В таком случае с учетом соотношений (8)–(10) переменные

$$\tau = T - T_*, \quad \xi = (X - X_*) - (T - T_*)v_*$$

выражаются в виде степенных рядов

$$\begin{gathered} \tau = b_{11}\left(\rho + \frac{(v - v_*)^2}{4}\right) + \frac{3}{2} b_{02}(v - v_*)\rho + \\ + 3b_{02}\frac{(v - v_*)^3}{24} + \left(\frac{\alpha_1}{12} b_{11} + 4b_{31}\right)\rho^2 + \\ + 3b_{31}(v - v_*)^2 \rho + 2b_{22}(v - v_*)\rho^2 + b_{13}\rho^3 + \\ + \sum_{i+j\ge 4} \tau_{ij}(v - v_*)^i h^j, \end{gathered} \tag{11}$$

$$\begin{gathered} \xi = b_{11}(v - v_*)\rho - 3b_{02}\rho^2 + \frac{1}{6} b_{11}(v - v_*)^3 - \\ - \left(\frac{\alpha_1}{6} b_{11} + 8b_{31}\right)(v - v_*)\rho^2 - \left(2\frac{2}{3} b_{22} + \frac{\alpha_1 b_{02}}{2}\right)\rho^3 + \\ + \sum_{i+j\ge 4} \xi_{ij}(v - v_*)^i \rho^j, \end{gathered} \tag{12}$$

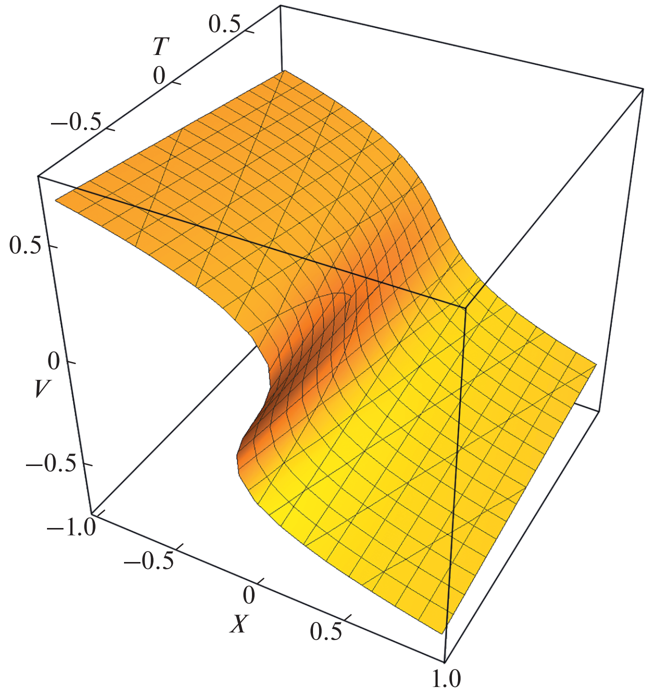

Рис. 1. График уравнения сборки (14).

коэффициенты которых τ_{ij} и ξ_{ij} однозначно выражаются через b_{ij}. В ситуации “общего положения” коэффициент $b_{11} \ne 0$. Тогда из (11) и (12) следует вывод о том, что

$$\begin{gathered} \xi + \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j \tau^j = -\tau(v - v_*) + \beta_{21}\tau(v - v_*)^2 + \\ + \beta_{12}\tau^2(v - v_*)^2 + \frac{5}{12} b_{11}(v - v_*)^3 + \\ + \sum_{i+j\ge 3} \beta_{ij}(v - v_*)^i \tau^j. \end{gathered}$$

А это уравнение заменой $(v - v_*) = C_0(\tau)\tau + Q + \sum_{j=2}^{\infty} C_j(\tau) Q^j$, где $C_j(\tau)$ – ряды вида $C_j(\tau) = \sum_{i+j=0}^{\infty} C_{ij}\tau^j$, сводится [1] каноническому уравнению катастрофы сборки

$$\delta(\xi, \tau) + \sigma(\tau) Q + \frac{5}{12} b_{11} Q^3 = 0 \tag{13}$$

с управляющими параметрами $\delta(\xi, \tau) = \xi\left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \delta_{1j}\tau^i \xi^j\right) + \sum_{j=2}^{\infty} \delta_{0j}\tau^j$ и $\sigma(\tau) = \tau + \sum_{j=2}^{\infty} \sigma_j \tau^j$.

Плотность ρ не может принимать отрицательные значения. Поэтому, исходя из (12), приходим к заключению об отрицательности постоянной b_{11}.

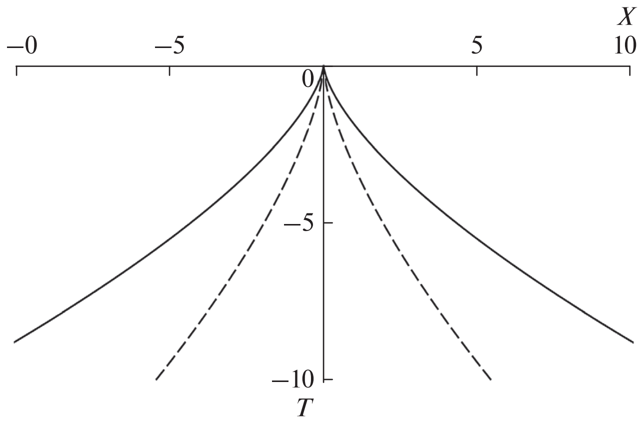

Рис. 2. Кривые провала интенсивности $X = \pm 2(-T/3)^{3/2} (T < 0)$ (сплошная линия) и кривая нулей якобиана (4) (штриховая линия) $X = \pm 10(-T/15)^{3/2}$.

Отметим, что частный случай (1), система уравнений мелкой воды

$$\rho'_T + (\rho v)'_X = 0, \quad v'_T + vv'_X + 4\rho'_X = 0,$$

обладает точным решением, определяемым полиномиальным решением $B(\rho, v) = -v^3 - 12v\rho$ уравнения (6) с $\alpha(\rho) = 4$. В этом частном случае формулы (5) принимают вид соотношений $T = -3v^2 - 12\rho$ и $X = -2v^3 + 12v\rho$, из которых следует, что v тогда определяется из кубического уравнения сборки (см. рис. 1)

$$5v^3 + vT + X = 0. \tag{14}$$

При $T_* = X_* = v_* = 0$, $b_{11} = 12$ уравнение (14) в главном для малых значений τ и ξ порядке совпадает с уравнением сборки (13).

При $T \geq 0$ уравнение (14) имеет единственное решение, а при $T < 0$ его решение единственно лишь вне интервала перехлеста $|X| < 10(-T/15)^{3/2}$. Кроме того, на кривых $X = \pm 2(-T/3)^{3/2} (T < 0)$ плотность ρ, соответствующая этому единственному решению, обращается в нуль и становится отрицательной выше этих кривых (рис. 2).

В заключение укажем на то, что ранее похожая особенность решений эллиптического варианта системы (1) с $\alpha(\rho) < 0$ исследовалась в работе [4]. Однако качественно поведение решений из [4] и поведение асимптотических решений, описанных в данной работе, сильно разнятся.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гилмор Р.* Прикладная теория катастроф. Т. 1. М.: Мир, 1984. 352 с.
2. *Рахимов А.Х.* // Алгебра и анализ. 1992. Т. 4. № 4. С. 217; *Rakhimov A.Kh.* // St. Petersburg Math. J. 1993. V. 27. № 1. P. 39.
3. *Рахимов А.Х.* // Функц. анализ и его прил. 1993. Т. 27. № 1. С. 45; *Rakhimov A.Kh.* // Func. Anal. Appl. 1993. V. 27. № 4. P. 813.
4. *Кудашев В.Р., Сулейманов Б.И.* // Письма в ЖЭТФ. 1995. Т. 62. № 4. С. 358; *Kudashev V.R., Suleimanov B.I.* // JETP Lett. 1995. V. 62. № 4. P. 382.
5. *Кудашев В.Р., Сулейманов Б.И.* // Прикл. мат. и механика. 2001. Т. 65. № 3. С. 456; *Kudashev V.R., Suleimanov B.I.* // J. Appl. Math. Mech. 2001. V. 65. № 3. P. 441.
6. *Гарифуллин Р.Н.,Сулейманов Б.И.* // ЖЭТФ. 2010. Т. 137. № 1. С. 149; *Garifullin R.N., Suleimanov B.I.* // JETP. 2010. V. 110. № 1. P. 135.
7. *Konopelchenko B.G., Ortenzi G.* // Studies Appl. Math. 2013. V. 130. № 2. P. 167.
8. *Konopelchenko B.G., Ortenzi G.* // J. Phys. A. 2017. V. 50. № 21. Art. № 215205.
9. *Konopelchenko B.G., Ortenzi G.* // arXiv:1904.00901. 2019.
10. *Dubrovin B.* // Commun. Math. Phys. 2006. V. 267. P. 117.
11. *Шварцбург А.Б.* Геометрическая оптика в нелинейной теории волн. М.: Наука, 1976. 120 с.