

УДК 539.17.01:539.142:539.143

## ИЗУЧЕНИЕ ОСНОВНЫХ СОСТОЯНИЙ ЯДЕР ${}^6, 7, 9, 10\text{Be}$ МЕТОДОМ ФЕЙНМАНОВСКИХ КОНТИНУАЛЬНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

© 2020 г. В. В. Самарин<sup>1, 2, \*</sup>

<sup>1</sup>Международная межправительственная организация Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Россия

<sup>2</sup>Государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования Московской области “Университет “Дубна”, Дубна, Россия

\*E-mail: samarin@jinr.ru

Поступила в редакцию 30.10.2019 г.

После доработки 25.11.2019 г.

Принята к публикации 27.12.2019 г.

Энергия и квадрат модуля волновой функции основного состояния ядер  ${}^6, 7, 9, 10\text{Be}$  вычислены методом континуальных интегралов Фейнмана в модели взаимодействия альфа-кластеров и внешних нуклонов. Для энергии получено согласие с экспериментальными данными. Продемонстрировано проявление в структуре ядра  ${}^7\text{Be}$  кластера  ${}^3\text{He}$ . Для ядер  ${}^7, 9, 10\text{Be}$  также были проведены расчеты в оболочечной модели деформированного ядра. Обе модели позволили объяснить отрицательное значение параметра квадрупольной деформации ядра  ${}^7\text{Be}$  и положительное значение параметра квадрупольной деформации ядер  ${}^9, 10\text{Be}$ .

DOI: 10.31857/S0367676520040274

### ВВЕДЕНИЕ

Низкоэнергетические реакции с участием ядер трития, гелия, лития и бериллия [1] составляют значительную часть изученных и продолжающих изучаться в настоящее время ядерных реакций. Реакции с изотопами Be представляют значительный интерес с нескольких точек зрения. Радиоактивное ядро  ${}^7\text{Be}$  (с периодом полураспада  $T_{1/2} = 53$  д) является зеркальным по отношению к стабильному ядру  ${}^7\text{Li}$ , которое можно представить состоящим из  $\alpha$ -кластера и тритонного кластера [2–4]. Ядра  ${}^9\text{Be}$  и  ${}^{10}\text{Be}$  представляют состоящими из двух  $\alpha$ -кластеров и, соответственно из одного и двух внешних (валентных) слабосвязанных нейтронов [5–7]. Знание свойств и волновой функции основного состояния нуклидов бериллия необходимо для теоретического описания реакций с их участием.

Уравнение Шредингера в рамках задачи трех тел с ортогональным проектированием впервые было решено для ядра  ${}^6\text{Li}$  в работе [8]. В работе [9] уравнение Шредингера для трехтельной системы  ${}^6\text{He}$  ( $n + n + \alpha$ ) было решено с помощью разложения по гиперсферическим функциям. В работах [10, 11] волновые функции системы трех тел были получены с помощью гауссового базиса и численного решения системы интегральных уравнений Хилла–Уилера (Hill–Wheeler). Более простую

возможность вычисления энергии  $E_0$  и плотности вероятности  $|\Psi_0(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n)|^2$  для основного состояния  $n$ -частичной системы дает метод континуальных интегралов Фейнмана [12–17]. Его универсальность позволила в едином подходе выполнить расчеты для ряда малонуклонных ядер:  ${}^3\text{H}$ ,  ${}^3, 4, 6\text{He}$ ,  ${}^6, 7, 11\text{Li}$  [3, 4, 16, 17]. В данной работе подобные многотельные расчеты проведены для ядер  ${}^7, 9, 10\text{Be}$ .

### МЕТОД КОНТИНУАЛЬНЫХ ИНТЕГРАЛОВ ФЕЙНМАНА

Энергия  $E_0$  и квадрат модуля волновой функции основного состояния  $|\Psi_0|^2$ , зависящей от координаты  $q$ , могут быть найдены с помощью введенных Р. Фейнманом континуальных интегралов (интегралов по траекториям) [12, 13]. Континуальный интеграл (пропагатор) в мнимом (евклидовом) времени  $t = -i\tau$  [14, 15] для частицы массой  $m$  с потенциальной энергией  $V(q)$  можно представить (см. [4, 7]) в виде

$$K_E(q, \tau, q, 0) \approx \left(\frac{m}{2\pi\hbar\tau}\right)^{1/2} \times \left\langle \exp\left[-\frac{\Delta\tau}{\hbar} \sum_{k=1}^N V(q_k)\right] \right\rangle_{0,N}. \quad (1)$$

Здесь  $\tau = N\Delta t$  и угловыми скобками  $\langle \dots \rangle$  обозначено усреднение по случайным  $(N-1)$ -мерным векторам (“траекториям”) [7], которое может быть выполнено методом Монте-Карло. Для реализации расчетов средних по случайным траекториям в данной работе использована технология CUDA параллельных вычислений на графических процессорах [18–20]. Расчеты были выполнены на гетерогенном кластере “HybriLIT” [21] Лаборатории информационных технологий Объединенного института ядерных исследований.

Энергии  $E_0$ ,  $E_1$  и квадраты модуля волновой функции  $|\Psi_0(q)|^2$ ,  $|\Psi_1(q)|^2$  основного и первого возбужденного состояний определяют первые члены асимптотики пропагатора в пределе  $\tau \rightarrow \infty$  [14, 15]

$$K_E(q, \tau, q, 0) \rightarrow |\Psi_0(q)|^2 \times \exp\left(-\frac{E_0\tau}{\hbar}\right) + |\Psi_1(q)|^2 \exp\left(-\frac{E_1\tau}{\hbar}\right) + \dots, \quad (2)$$

$\tau \rightarrow \infty.$

Для удобства расчетов в масштабах действия ядерных сил удобно использовать безразмерные переменные  $\tilde{q} = q/x_0$ ,  $\tilde{V} = V(q)/\varepsilon_0$ ,  $\tilde{E}_0 = E_0/\varepsilon_0$ ,  $\tilde{m} = m/m_0$ ,  $\tilde{\tau} = \tau/t_0$ ,  $\Delta\tilde{\tau} = \Delta\tau/t_0$ ,  $\tilde{K}_E = K_E x_0$ , где  $x_0 = 1$  фм,  $\varepsilon_0 = 1$  МэВ,  $m_0$  – масса нейтрона,  $t_0 = m_0 x_0^2 / \hbar \approx 1.57 \cdot 10^{-23}$  с,  $b_0 = t_0 \varepsilon_0 / \hbar \approx 0.02412$ , тогда в области линейной части графика зависимости пропагатора от  $\tilde{\tau}$

$$b_0^{-1} \ln \tilde{K}_E(\tilde{q}, \tilde{\tau}; \tilde{q}, 0) \approx b_0^{-1} \ln |\Psi_0(\tilde{q})|^2 - \tilde{E}_0 \tilde{\tau}, \quad (3)$$

$$\tilde{K}_E(\tilde{q}, \tilde{\tau}; \tilde{q}, 0) \approx \left(\frac{\tilde{m}}{2\pi\tilde{\tau}}\right)^{1/2} \times \left\langle \exp\left[-\Delta\tilde{\tau} b_0 \sum_{k=1}^N \tilde{V}(\tilde{q}_k)\right] \right\rangle_{0,N}. \quad (4)$$

Наличие линейной части графика зависимости (3) позволяет непосредственно вычислить квадрат модуля ненормированной волновой функции основного состояния  $|\Psi_0(q)|^2$ ,

$$|\Psi_0(\tilde{q})|^2 = \text{const} \tilde{K}_E(\tilde{q}, \tilde{\tau}; \tilde{q}, 0), \quad (5)$$

а с помощью линейной регрессии найти энергию основного состояния  $E_0$  [3, 7, 16, 17].

Формулы (1)–(5) естественным образом обобщаются на случаи большего числа степеней свободы. Поскольку волновая функция основного состояния не имеет узловых точек (линий или поверхностей) и не меняет знака, ненормированная волновая функция может быть найдена по формуле

$$\Psi_0(q) = \sqrt{K_E(q, \tau; q, 0)}. \quad (6)$$

Точность данного метода для трехмерного изотропного осциллятора с дискретным спектром состояний продемонстрирована в работе [7]. Типичные модельные парные потенциалы взаимодействия нуклонов с нуклонами, нуклонов с  $\alpha$ -кластером и  $\alpha$ -кластера с  $\alpha$ -кластером имеют область притяжения с конечным радиусом и отталкивательный кор на малых расстояниях между частицами. Для проверки применимости и оценки степени точности метода для подобных потенциалов в случаях дискретного и непрерывного спектров рассмотрим модельные системы из нескольких взаимодействующих только с бесконечно тяжелым остовом частиц массы  $m$ , равной массе нейтрона. В качестве парных потенциалов выберем потенциалы, для которых известны аналитические выражения для энергии основного состояния  $E_0$ . В модифицированном потенциале Пешля–Теллера [22], соответствующем притяжению между частицами

$$V_{\text{PT}}(r) = -\frac{\hbar^2 \alpha^2 \lambda(\lambda-1)}{2m \text{ch}^2 \alpha r}, \quad (7)$$

энергия основного состояния равна

$$E_0 = -\frac{\hbar^2 \alpha^2}{2m} (\lambda-2)^2. \quad (8)$$

График потенциала (7), которому соответствует энергия основного состояния частицы  $E_0^{(1)} = -20$  МэВ, показан на рис. 1а. Расчет методом Монте-Карло для  $n = 2 \cdot 10^6$  траекторий с шагом сетки  $\Delta\tilde{\tau} = 0.01$  дал значение  $E_0^{(1)} = 20.7 \pm 0.3$  МэВ достаточно близкое к точному.

В потенциале Морса [22] с отталкивательным кором

$$V_{\text{M}}(r) = D[\exp(-2\alpha x) - 2\exp(-\alpha x)], \quad (9)$$

$$x = \frac{r-r_0}{r_0},$$

энергии  $s$ -состояний находятся из уравнения

$$F(a(E), c(E), y_0) = 0, \quad (10)$$

где  $F$  – вырожденная гипергеометрическая функция,

$$a(E) = \frac{1}{2} + \frac{\beta(E) - \gamma}{\alpha}, \quad c(E) = 1 + 2\frac{\beta(E)}{\alpha}, \quad (11)$$

$$\beta^2 = -\frac{2mr_0^2}{\hbar^2} E, \quad \gamma^2 = \frac{2mr_0^2}{\hbar^2} D, \quad y_0 = \frac{2\gamma}{\alpha} \exp(\alpha). \quad (12)$$

Графики потенциалов (9), которым соответствуют энергии основного состояния частицы  $E_0^{(1)} = -1$  МэВ и  $E_0^{(1)} = -5$  МэВ показаны на рис. 1а. В частности, энергия равна  $E_0^{(1)} = -1$  МэВ для значений параметров  $D = 32.82$  МэВ,  $\alpha = 3.28$ ,  $r_0 =$

= 1.58 фм. Для системы из двух взаимодействующих только с бесконечно тяжелым остовом частиц энергия основного состояния равна  $E_0^{(2)} = 2E_0^{(1)}$ , для потенциалов Морса, показанных на рис. 1а,  $E_0^{(2)} = -2$  МэВ и  $E_0^{(2)} = -10$  МэВ, соответственно. Результаты расчетов пропагатора для  $n = 7 \cdot 10^7$  траекторий с шагом сетки  $\Delta\tilde{\tau} = 0.01$  показаны на рис. 1б. С помощью линейной регрессии, примененной к линейному участку графика, были получены значения  $E_0^{(2)} = -1.7 \pm 0.3$  МэВ и  $E_0^{(2)} = -10.7 \pm 0.7$  МэВ соответственно. Они достаточно хорошо согласуются с точными значениями. Недооценка точного значения  $-2$  МэВ может быть обусловлена заметным вкладом в пропагатор состояний непрерывного спектра с  $E^{(2)} \geq 0$ .

**ОСНОВНОЕ СОСТОЯНИЕ ЯДЕР <sup>6, 7</sup>Be**

Принцип Паули для ядер <sup>6, 7</sup>Be можно не учитывать, если рассматривать их как систему из остова ( $\alpha$ -кластера) и внешних нуклонов с конфигурациями  $\{p, p\}$  и  $\{p, p, n\}$  соответственно. В таком случае в рассматриваемых системах будет не более двух тождественных нуклонов. Ядерная часть потенциальной энергии взаимодействия внешних нуклонов в ядре <sup>7</sup>Be может быть представлена в виде суммы парных взаимодействий нуклонов друг с другом [3, 23]

$$V_{p,p,n}^{(N)} = V_{p-p}^{(0+)}(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) + V_{p-n}^{(1+)}(|\vec{r}_1 - \vec{r}_3|) + V_{p-n}^{(0+)}(|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|). \tag{13}$$

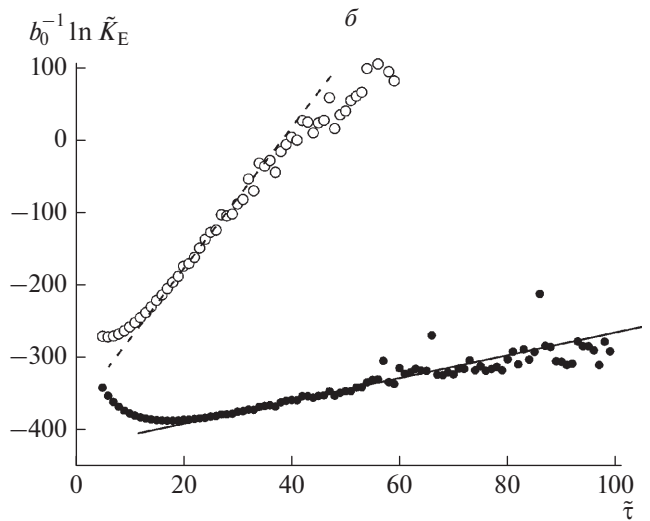
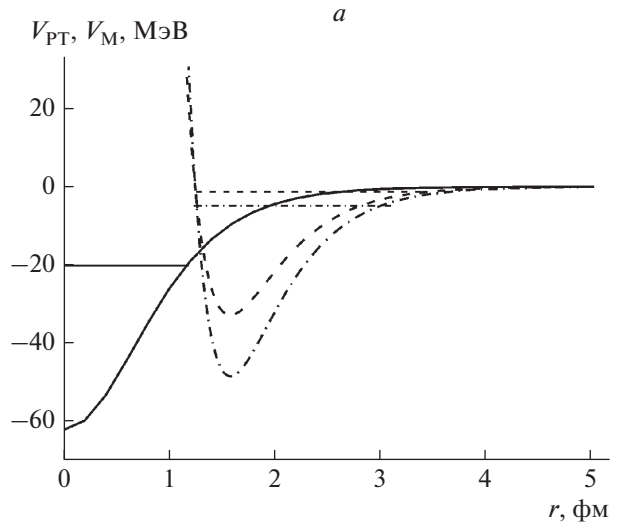
Здесь  $V_{p-n}^{(1+)}(r)$  – триплетный потенциал взаимодействия протона с нейтроном, имеющий место в дейтроне,  $V_{p-n}^{(0+)}(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$  и  $V_{p-p}^{(0+)}(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$  – это не имеющие связанных состояний синглетные потенциалы взаимодействия соответственно протона с нейтроном и протона с протоном.

Потенциал взаимодействия протона с  $\alpha$ -кластером  $V_{p-\alpha}(r)$  включал ядерную (N) и кулоновскую (C) части

$$V_{p-\alpha}(r) = V_{p-\alpha}^{(N)}(r) + V_{p-\alpha}^{(C)}(r). \tag{14}$$

Для кулоновской части взаимодействия использовалось известное выражение для энергии точечного заряда в поле равномерно заряженного шара. Ядерная часть эффективного потенциала взаимодействия нуклона с ядерным остовом  $V_{n-\alpha}(r) \equiv V_{p-\alpha}^{(N)}(r)$  в работе [3] была выбрана в виде комбинации

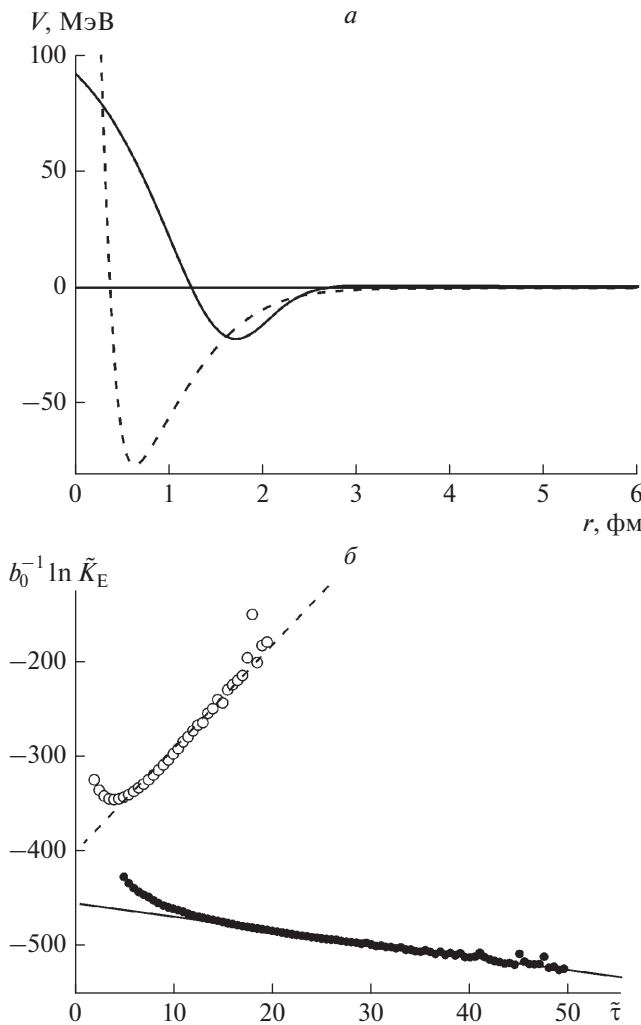
$$U(r) = -U_1 f(r; B_1, a_1) + U_2 f(r; B_2, a_2) - U_3 f(r; B_3, a_3) f(r; B_4, a_4), \tag{15}$$



**Рис. 1.** (а) Графики потенциалов:  $V_{PT}(r)$  (7) для энергии основного состояния частицы  $E_0^{(1)} = -20$  МэВ (сплошная кривая) и  $V_M(r)$  (9) для энергии основного состояния нейтрона  $E_0^{(1)} = -1$  МэВ (штриховая кривая), и  $E_0^{(1)} = -5$  МэВ (штрих-пунктирная кривая), горизонтальные отрезки – соответствующие уровни энергии; (б) Зависимости нормированного логарифма пропагатора  $b_0^{-1} \ln \tilde{K}_E$  от мнимого времени  $\tilde{\tau}$  для системы из двух частиц, взаимодействующих только с бесконечно тяжелым остовом потенциалом  $V_M(r)$  (7), для энергии основного состояния  $E_0^{(2)} = -2$  МэВ (точки), и  $E_0^{(2)} = -10$  МэВ (кружки): прямые – результаты линейной регрессии, примененной к линейному участку графика.

функций типа типа Вудса–Саксона (фермиевского распределения)

$$f(r; B, a) = \left[ 1 + \exp\left(\frac{r-B}{a}\right) \right]^{-1}. \tag{16}$$



**Рис. 2.** (а) Графики ядерного псевдопотенциала  $U(r)$  (15) взаимодействия протона с  $\alpha$ -кластером в ядрах  ${}^6\text{Be}$ ,  ${}^7\text{Be}$  (сплошная линия) и потенциала  $V_{p-n}^{(1+)}$  взаимодействия протона с нейтроном в ядре  ${}^2\text{H}$  (штриховая линия). (б) Зависимости нормированного логарифма пропагатора  $b_0^{-1} \ln \tilde{K}_E$  от мнимого времени  $\tilde{\tau}$  для  ${}^6\text{Be}$  (точки) и  ${}^7\text{Be}$  (кружки): прямые – результаты линейной регрессии, примененной к линейному участку графика.

Графики функции  $U(r)$  взаимодействия протона с  $\alpha$ -кластером в ядрах  ${}^6\text{Be}$ ,  ${}^7\text{Be}$  и потенциала  $V_{p-n}^{(1+)}$  взаимодействия протона с нейтроном в ядре  ${}^2\text{H}$  показаны на рис. 2а. Выражение (15) имеет смысл псевдопотенциала сильного взаимодействия  $\alpha$ -кластера с нейтроном и протоном, аналогичного псевдопотенциалу [24], используемому в физике металлов для описания взаимодействия внешних электронов (из зоны проводимости) с атомными остовами. Второе положительное слагаемое в (15) объясняется наличием отталкивательных ко́ров в

потенциалах нуклон-нуклонного взаимодействия и следствием принципа Паули. Энергия основного состояния в системе остов-нуклон оказывается близкой к энергии самого верхнего заполненного уровня оболочечной модели ядра. При этом состояния нуклонов ядерного остова, соответствующие нижележащим уровням, оказываются исключенными (запрещенными).

Вычисления производились в системе центра масс. Для ядра  ${}^6\text{Be}$  (системы  $p + p + \alpha$ ) с радиус-векторами протонов  $\vec{r}_{p_1}$ ,  $\vec{r}_{p_2}$  и радиус-вектором  $\alpha$ -кластера  $\vec{r}_\alpha$  координаты Якоби (см., например [13]) равны

$$\vec{x} = \vec{r}_{p_2} - \vec{r}_{p_1}, \quad \vec{y} = \vec{r}_\alpha - \frac{1}{2}(\vec{r}_{p_1} + \vec{r}_{p_2}). \quad (17)$$

Для ядра  ${}^7\text{Be}$  (системы  $p + p + n + \alpha$ ) использовались координаты Якоби

$$\begin{aligned} \vec{x} &= \vec{r}_{p_2} - \vec{r}_{p_1}, \quad \vec{y} = \frac{1}{2}(\vec{r}_{p_1} + \vec{r}_{p_2}) - \vec{r}_n, \\ \vec{z} &= \frac{1}{3}(\vec{r}_{p_1} + \vec{r}_{p_2} + \vec{r}_n) - \vec{r}_\alpha, \end{aligned} \quad (18)$$

при этом из-за небольшой разницы масс протона и нейтрона их массы считались одинаковыми. Вычисление плотности вероятности по формуле (5) для ядра  ${}^6\text{Be}$  с потенциальной энергией, симметричной по отношению к перестановке протонов, дает координатную волновую функцию, симметричную по отношению к перестановке протонов. Для ядра  ${}^7\text{Be}$  с потенциальной энергией

$$\begin{aligned} V_{p,p,n,\alpha} &= V_{p,p,n}^{(N)} + V_{p-\alpha}(|\vec{r}_{p_1} - \vec{r}_\alpha|) + \\ &+ V_{p-\alpha}(|\vec{r}_{p_2} - \vec{r}_\alpha|) + U(|\vec{r}_n - \vec{r}_\alpha|), \end{aligned} \quad (19)$$

симметричную по отношению к перестановке протонов волновую функцию можно получить, образовав симметричную комбинацию в координатах Якоби

$$\Psi_S(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = \Phi_0(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) + \Phi_0(-\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}), \quad (20)$$

где

$$\Phi_0(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = \sqrt{K_E(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \tau; \vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, 0)}. \quad (21)$$

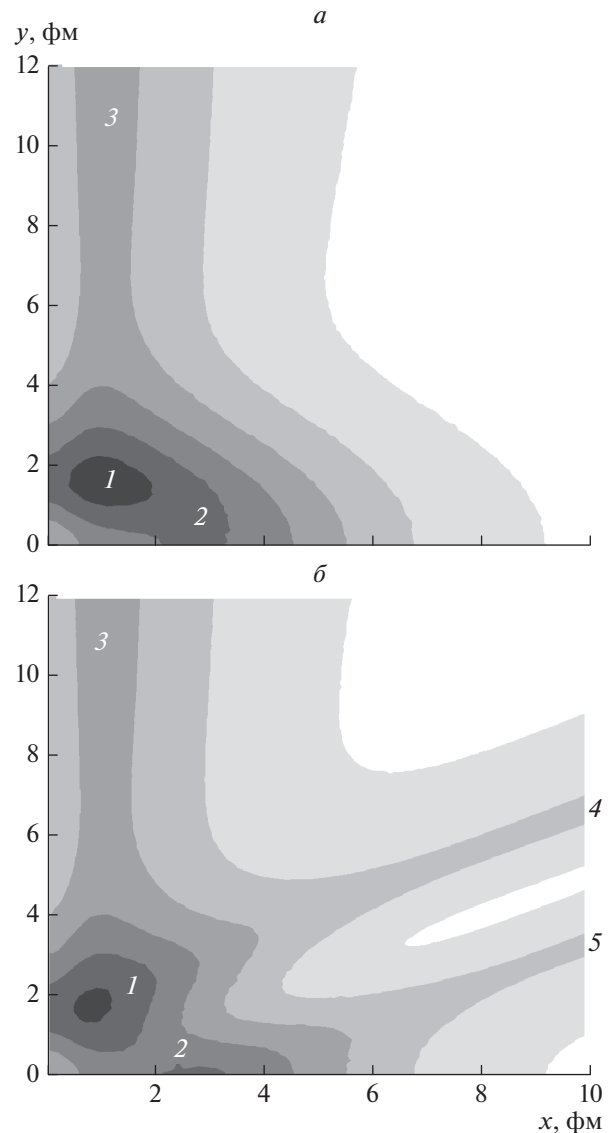
Для определения энергии  $E_0$  основного состояния ядер  ${}^6, {}^7\text{Be}$  численные расчеты пропагатора (4) проводились с числом траекторий  $n \sim 10^6 - 10^8$  и шагом сетки по мнимому времени  $\Delta\tilde{\tau} = 0.01$ . Результаты показаны на рис. 2. Экспериментальное значение энергии разделения  $E_s$  ядра  ${}^7\text{Be}$  на  $\alpha$ -кластер, два протона и нейтрон равно 9.31 МэВ [25]. Ядро  ${}^6\text{Be}$  нестабильно, энергия системы из  $\alpha$ -кластера и двух протонов положительна  $E_0 = 0.593$  МэВ [25]. Результаты расчетов пропагатора для  $n = 7 \cdot 10^7$  траекторий с шагом сетки  $\Delta\tilde{\tau} = 0.01$  показаны на рис. 2б. С помощью линейной регрес-

сии, примененной к линейному участку графика, были получены достаточно близкие к экспериментальным значения  $E_0 = 1.3 \pm 0.5$  МэВ для  ${}^6\text{Be}$  и  $E_0 = -9.5 \pm 0.5$  МэВ для  ${}^7\text{Be}$ .

Распределение плотности вероятности  $\tilde{K}_E(x, y; \tilde{\tau})$  для трехтельной конфигурации короткоживущего ядра  ${}^6\text{Be}$  ( $p + p + \alpha$ ) с положительной энергией основного состояния (см. рис. 2б) показано на рис. 3. Во время существования короткоживущего ядра  ${}^6\text{Be}$  (резонанса при тройном столкновении) наиболее вероятными являются конфигурации с объединением протонов в двухпротонный кластер и сигарообразная конфигурация ( $p - \alpha - p$ ).

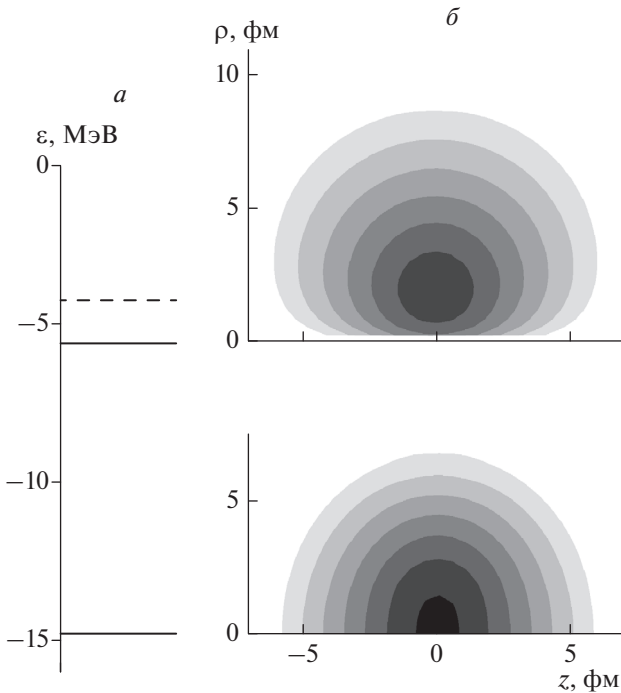
Плотность вероятности  $|\Psi_0|^2$  для четырехтельной конфигурации ядра  ${}^7\text{Be}$  ( $p + p + n + \alpha$ ) сходна с приведенной в работах [3, 4] плотностью вероятности для ядра  ${}^7\text{Li}$  ( $n + n + p + \alpha$ ). Наиболее вероятным является расположение внешних нуклонов в виде кластера  ${}^3\text{He}$  [3, 7] (правильного треугольника), тесно соединенного с почти сферическим кластером  ${}^4\text{He}$ . Это позволяет заключить, что ядро  ${}^7\text{Be}$  также сильно деформировано, как и сильно деформированное ядро  ${}^7\text{Li}$  с параметром квадрупольной деформации  $\beta_2 \approx -1$  [26]. Сплюснутая форма ядра  ${}^7\text{Be}$  может соответствовать усреднению по всевозможным поворотам системы  ${}^3\text{He} + \alpha$  вокруг направления, перпендикулярного межкластерной оси.

В качестве дополнительной модели ядра  ${}^7\text{Be}$  была использована оболочечная модель с аксиально-симметричной ядерной частью потенциала в форме Вудса–Саксона (см. например, [25]). Кулоновская часть потенциала для протонов представляла собой электрическое поле однородно заряженного сплюснутого эллипсоида и вычислялась численно. Численное решение уравнения Шредингера для нуклонов при  $\beta_2 = -1$  выполнялось методом, приведенным в [27]. Значения параметров потенциала определялись из условия равенства энергий отделения нуклонов с верхних заполненных уровней экспериментальным значениям энергии отделения. Полученная схема уровней протонов (энергия отделения протона равна 5.61 МэВ, [25]) приведена на рис. 4а, плотности вероятности для заполненных низших уровней с квантовыми числами  $|m_j| = 1/2$ ,  $|m_j| = 3/2$  ( $|m_j|$  – модуль проекции полного углового момента нуклона на ось симметрии ядра) показаны на рис. 4б. Уровни и плотность вероятности для нейтронов имеют аналогичный вид. Двум нейтронам и двум протонам на глубоких низших уровнях, соответствующих уровню  $1s_{1/2}$  сферического ядра с проекцией полного момента на ось симметрии ядра  $|m_j| = 1/2$ , отвечает ядерный остов, близкий к поляризованному  $\alpha$ -кластеру. Внешние нейтрон и два протона



**Рис. 3.** Топография (в логарифмическом масштабе) пропагатора  $\tilde{K}_E(x, y; \tilde{\tau})$  системы  ${}^6\text{Be}$  ( $p + p + \alpha$ ) для  $\tilde{\tau} = 20$  в координатах Якоби  $\tilde{x} \perp \tilde{y}$  (а) и  $\tilde{x} \parallel \tilde{y}$  (б). Наиболее вероятными являются конфигурации с объединением протонов в двухпротонный кластер 1 и сигарообразная конфигурация 2. Область 3 соответствует короткоживущему состоянию (резонансу) при столкновении протонов вдали от  $\alpha$ -кластера. Областям 4 и 5 соответствуют аналогичные резонансы при столкновениях протона с  $\alpha$ -кластером вдали от другого протона.

ядра  ${}^7\text{Be}$  на подуровне с проекцией полного момента на ось симметрии ядра  $|m_j| = 3/2$ , соответствующем уровню  $1p_{3/2}$  сферического ядра, определяют сплюснутую форму ядра  ${}^7\text{Be}$ . Таким образом, и четырехтельная и оболочечная модели объясняют отрицательное значение параметра квадрупольной деформации ядра  ${}^7\text{Be}$ .

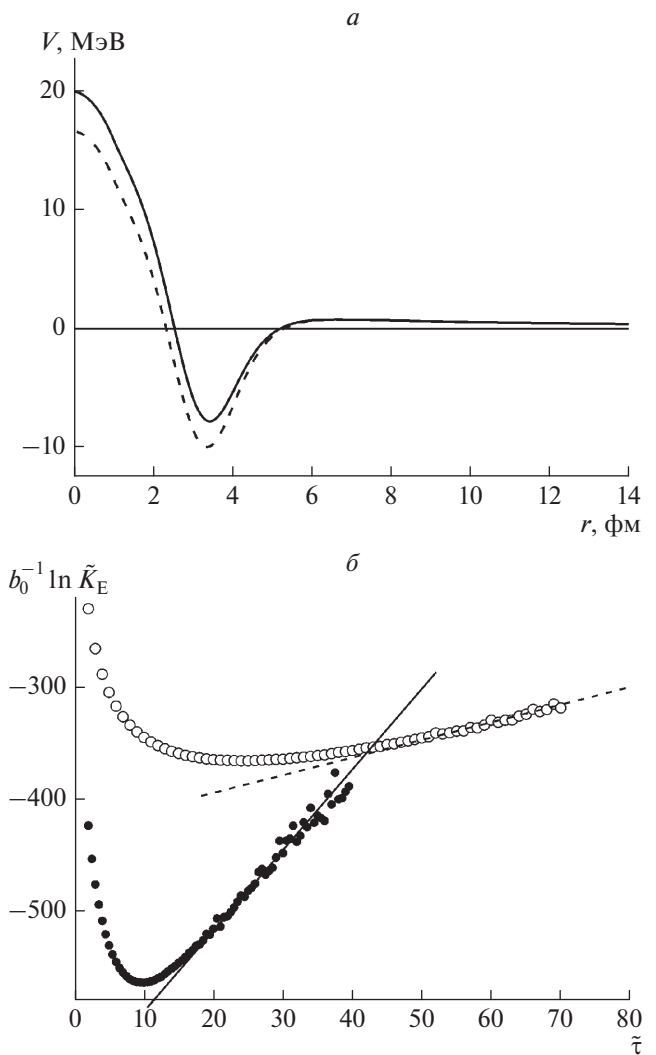


**Рис. 4.** (а) Схемы уровней энергии протонов ядра  ${}^7\text{Be}$  в оболочечной модели деформированного ядра с параметром квадрупольной деформации  $\beta_2 \approx -1$ , сплошные отрезки – занятые уровни, штриховой – свободный. (б) Плотности вероятности (в логарифмическом масштабе) в цилиндрических координатах (по горизонтали – ось симметрии) для двух заполненных уровней протонов с квантовыми числами модуля проекции полного углового момента нуклона на ось симметрии ядра  $|m_j| = 1/2$  (внизу) и  $|m_j| = 3/2$  (вверху).

**ОСНОВОЕ СОСТОЯНИЯ ЯДЕР  ${}^9, {}^{10}\text{Be}$**

Ядра  ${}^9\text{Be}$  и  ${}^{10}\text{Be}$  представим состоящими из двух  $\alpha$ -кластеров и из одного и двух нейтронов соответственно. Потенциальная энергия взаимодействия двух  $\alpha$ -кластеров на расстояниях, превышающих удвоенный среднеквадратичный зарядовый радиус ядра  ${}^4\text{He}$  (1.68 фм, см. например [25]), может быть выбрана в форме комбинации потенциала Вудса–Саксона с параметрами Акюзэ–Винтера [28] и потенциала кулоновского отталкивания двух точечных зарядов  $V_{\alpha-\alpha}(r) = V_{\alpha-\alpha}^{(N)}(r) + V_{\alpha-\alpha}^{(C)}(r)$ . На малых расстояниях кулоновская часть  $V_{\alpha-\alpha}^{(C)}(r)$  может быть представлена в форме потенциала взаимодействия двух равномерно заряженных шаров. Ядерную часть взаимодействия  $\alpha$ -кластеров с учетом усредненного действия отталкивательного кора нуклон-нуклонного взаимодействия и принципа Паули можно описать с помощью псевдопотенциала  $V_{\alpha-\alpha}^{(N)}(r)$  в форме суммы двух функций типа Вудса–Саксона

$$V_{\alpha-\alpha}^{(N)}(r) = -U_{\alpha 1} f(r; B_{\alpha 1}, a_{\alpha 1}) + U_{\alpha 2} f(r; B_{\alpha 2}, a_{\alpha 2}), \tag{22}$$



**Рис. 5.** а) Графики псевдопотенциала (22) взаимодействия двух  $\alpha$ -кластеров в ядрах  ${}^9\text{Be}$  (сплошная линия) и  ${}^{10}\text{Be}$  (штриховая линия) б) Зависимости нормированного логарифма пропагатора  $b_0^{-1} \ln \tilde{K}_E$  от мнимого времени  $\tilde{\tau}$  для ядер  ${}^9\text{Be}$  (кружки) и  ${}^{10}\text{Be}$  (точки), прямые – результаты линейной регрессии, примененной к линейному участку графика.

его типичные графики показаны на рис. 5а.

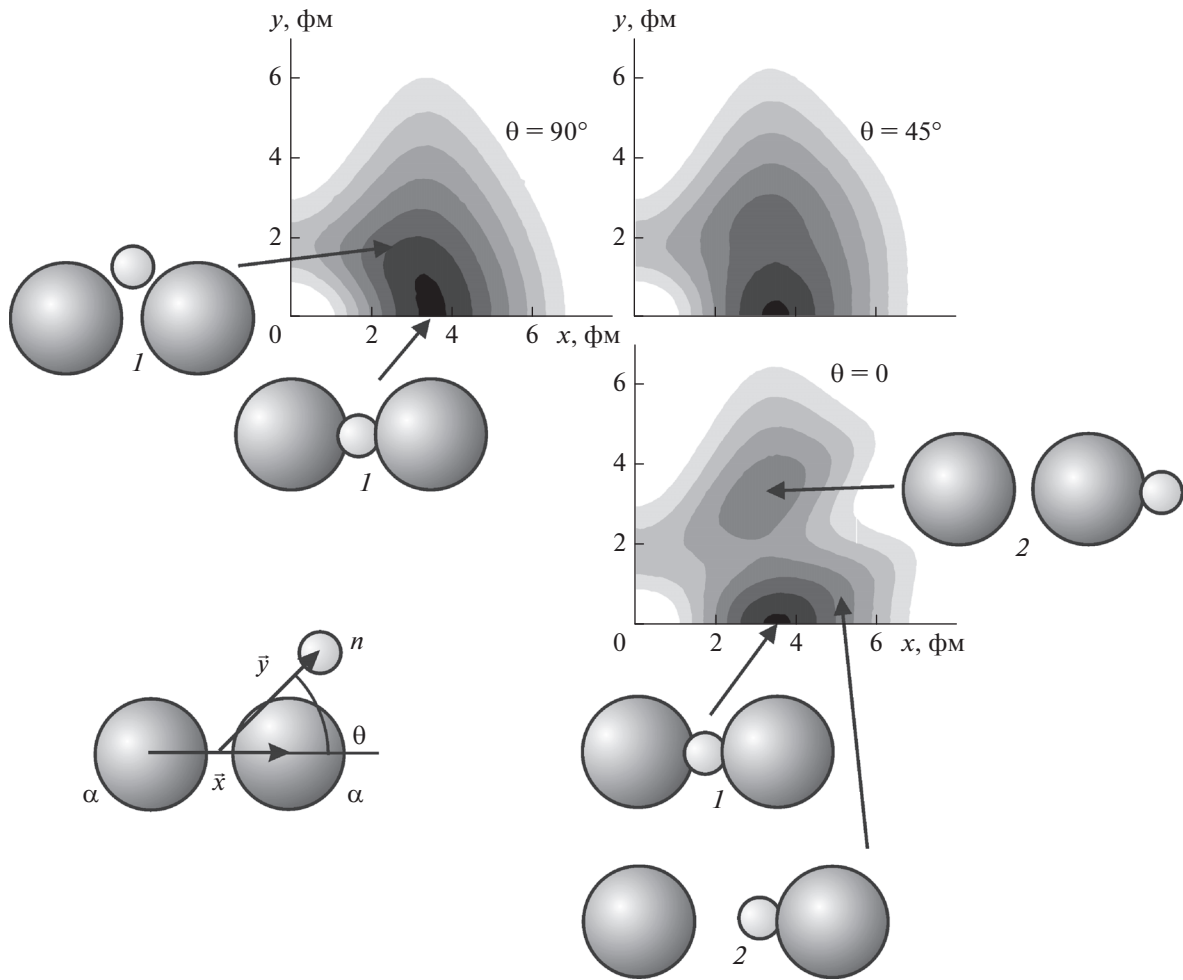
Для ядра  ${}^9\text{Be}$  (системы  $\alpha + n + \alpha$ ) с радиус-векторами  $\vec{r}_{\alpha_1}$ ,  $\vec{r}_{\alpha_2}$  и радиус-вектором нейтрона  $\vec{r}_n$  координаты Якоби равны

$$\vec{x} = \vec{r}_{\alpha_2} - \vec{r}_{\alpha_1}, \quad \vec{y} = \vec{r}_n - \frac{1}{2}(\vec{r}_{\alpha_1} + \vec{r}_{\alpha_2}). \tag{23}$$

Для ядра  ${}^{10}\text{Be}$  (системы  $\alpha + n + n + \alpha$ ) использовались координаты Якоби

$$\vec{x} = \vec{r}_{\alpha_2} - \vec{r}_{\alpha_1}, \quad \vec{y} = \vec{r}_{n_2} - \vec{r}_{n_1}, \tag{24}$$

$$\vec{z} = \frac{1}{2}(\vec{r}_{n_1} + \vec{r}_{n_2}) - \frac{1}{2}(\vec{r}_{\alpha_2} + \vec{r}_{\alpha_1}).$$



**Рис. 6.** Топография (в логарифмическом масштабе) плотности вероятности  $|\Psi_0(x, y, \theta; \bar{\tau})|^2$  основного состояния ядра  ${}^9\text{Be}$  для  $\bar{\tau} = 30$ . Указаны векторы  $\bar{x}, \bar{y}$  в координатах Якоби и примеры положения нейтронов (маленькие кружки) и  $\alpha$ -кластеров (большие кружки). Наибольшую вероятность имеет конфигурация 1 с валентным нейтроном между  $\alpha$ -кластерами  $\alpha + n + \alpha$ , конфигурация 2  $\alpha + {}^5\text{He}$  имеет меньшую вероятность.

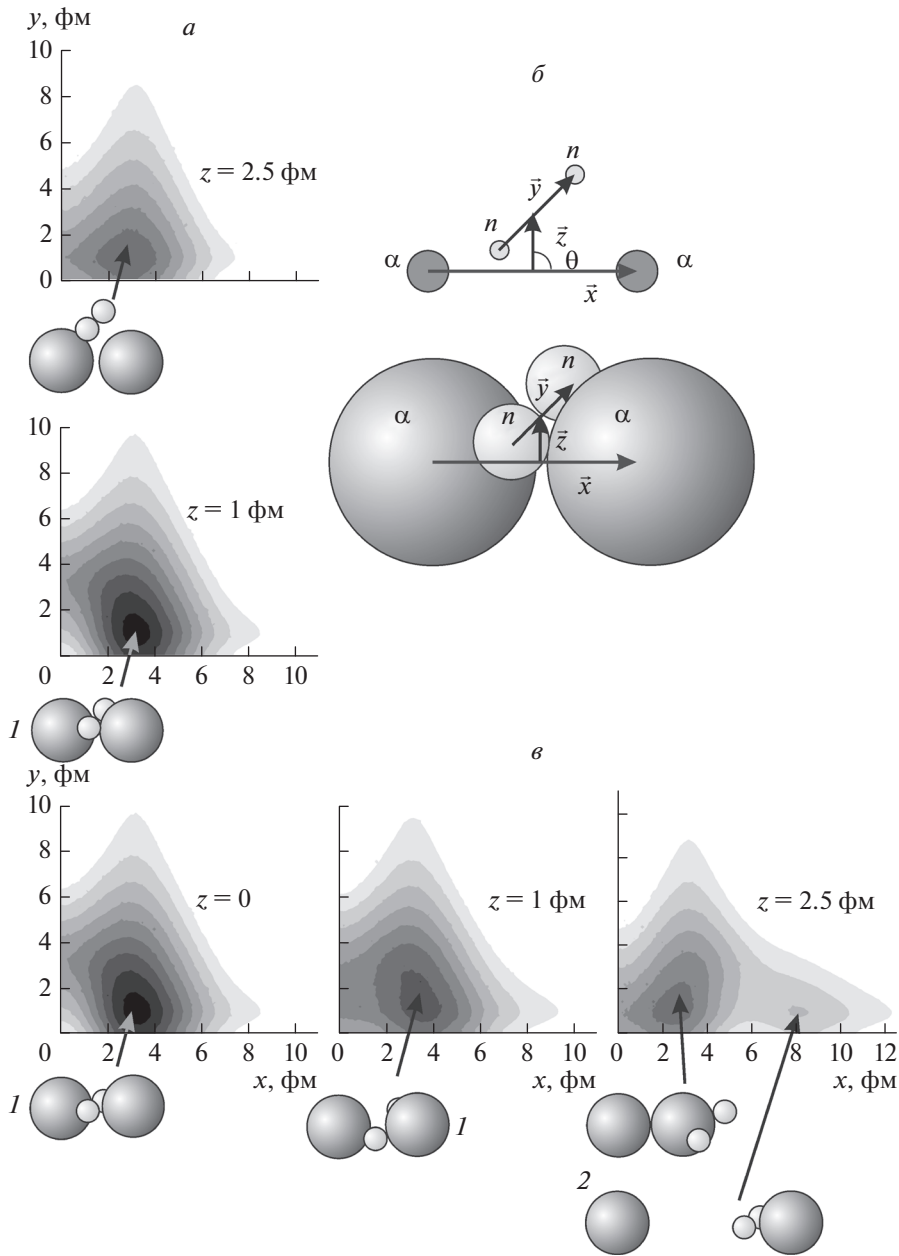
Вычисление плотности вероятности по формуле (5) с потенциальной энергией, симметричной по отношению к перестановке  $\alpha$ -кластеров (и нейтронов для ядра  ${}^{10}\text{Be}$ ), дает координатную волновую функцию, симметричную по отношению к перестановке  $\alpha$ -кластеров (и нейтронов для ядра  ${}^{10}\text{Be}$ ).

Экспериментальные значения энергии разделения ядер  ${}^9\text{Be}$  и  ${}^{10}\text{Be}$  на  $\alpha$ -кластеры и нейтроны равны 1.57 МэВ для ядра  ${}^9\text{Be}$  и 8.38 МэВ для ядра  ${}^{10}\text{Be}$  [25]. Результаты расчетов пропагатора для  $n = 7 \cdot 10^7$  траекторий с шагом сетки  $\Delta\bar{\tau} = 0.01$  показаны на рис. 5б. С помощью линейной регрессии, примененной к линейному участку графика, были получены близкие к экспериментальным значения  $E_0 = -1.57 \pm 0.3$  МэВ и  $E_0 = -8.3 \pm 0.7$  МэВ соответственно. Значения параметров потенциала (22) составили:  $B_{\alpha 1} = 3.73$  фм,  $B_{\alpha 2} = 2.71$  фм,  $a_{\alpha 1} = a_{\alpha 2} = 0.512$  фм,  $U_{\alpha 2} = 38$  МэВ для обоих ядер,

$U_{\alpha 1} = 27.44$  МэВ для  ${}^9\text{Be}$  и  $U_{\alpha 1} = 33$  МэВ для  ${}^{10}\text{Be}$ . Небольшие различия в значениях последнего параметра можно объяснить различной поляризацией  $\alpha$ -кластеров в ядрах  ${}^9\text{Be}$  и  ${}^{10}\text{Be}$ . Графики псевдопотенциалов (22) для ядер  ${}^9\text{Be}$  и  ${}^{10}\text{Be}$  показаны на рис. 5а, пропагаторы показаны на рис. 5б. Потенциалы взаимодействия  $\alpha$ -кластеров с отталкивательным кором, подобные, показанным на рис. 5а рассматривались в работах [29, 30].

Распределение плотности вероятности для трехтельных конфигураций  ${}^9\text{Be}$  ( $\alpha + n + \alpha$ ) показано на рис. 6. Наибольшую вероятность имеет конфигурация с валентным нейтроном между  $\alpha$ -кластерами  $\alpha + n + \alpha$ , конфигурация  $\alpha + {}^5\text{He}$  имеет меньшую вероятность. Для веса  $w$  конфигурации  $\alpha + {}^5\text{He}$  можно использовать оценку

$$w = C^{-1} \iiint_G dx dy d\theta \sin \theta x^2 y^2 |\Psi(x, y, \theta)|^2, \quad (25)$$



**Рис. 7.** Топография (в логарифмическом масштабе) плотности вероятности  $|\Psi_0(x, y, z, \theta; \bar{\tau})|^2$  (а, б) основного состояния ядра  $^{10}\text{Be}$  при  $\bar{\tau} = 18$  в координатах Якоби  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ , для частной конфигурации  $\bar{y} \perp \bar{x}, \bar{y} \perp \bar{z}$  (б) при  $\theta = 90^\circ$  (а) и  $\theta = 0^\circ$  (б) с примерами положения нейтронов (маленькие кружки) и  $\alpha$ -кластеров (большие кружки). Наибольшую вероятность имеет конфигурация 1 с валентными нейтронами (динейтронным кластером  $n^2$ ) между  $\alpha$ -кластерами ( $\alpha + n^2 + \alpha$ ), конфигурация 2 ( $\alpha + {}^6\text{He}$ ) менее вероятна.

где  $\theta$  – угол между векторами  $\bar{x}, \bar{y}$ ,

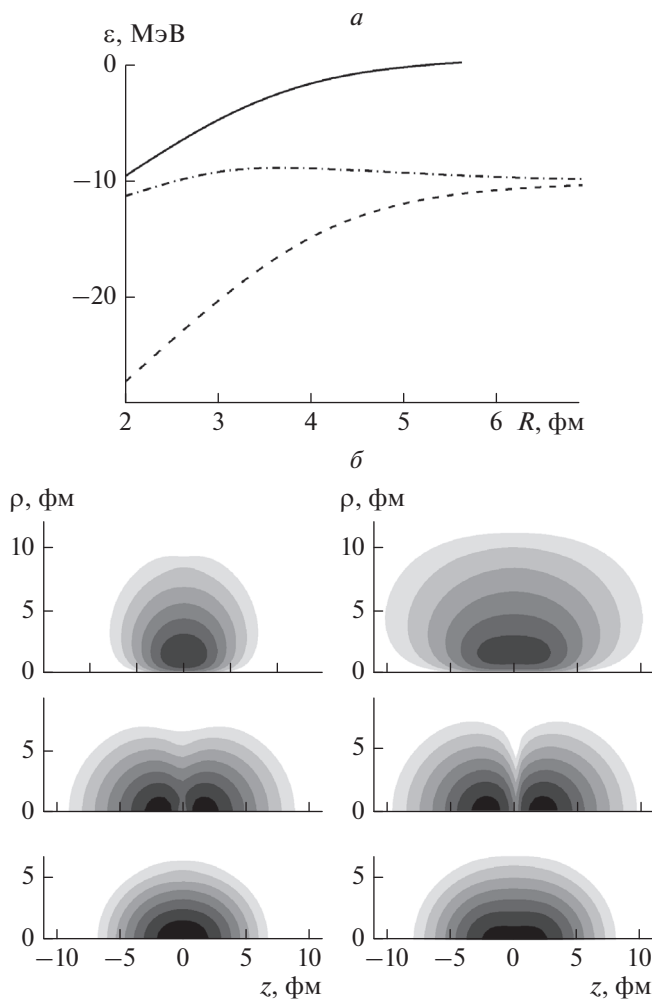
$$C = \int_0^\infty dx x^2 \int_0^\infty dy y^2 \int_0^\pi d\theta \sin \theta |\Psi(x, y, \theta)|^2, \quad (26)$$

и область  $G$  – множество точек  $(\bar{x}, \bar{y})$ , удовлетворяющих условиям  $|y \cos \theta| > x/2$  при  $0 \leq x \leq d$  и  $|y \cos \theta| > x/2 - c$  при  $x > d$ . Для значений параметров  $c = 2$  фм,  $d = 5$  фм расчет дал оценку

$w_{\text{theor}} \approx 0.27$ , которая согласуется с экспериментальным значением  $w_{\text{exp}} \approx 0.25$  из работы [31].

Распределение плотности вероятности для четырехтельных конфигураций  $^{10}\text{Be}$  ( $\alpha + n + n + \alpha$ ) показано на рис. 7. Видно, что наибольшую вероятность имеет конфигурация с близко расположенными валентными нейтронами (динейтронным кластером  $n^2$ ) между  $\alpha$ -кластерами ( $\alpha + n^2 + \alpha$ ),





**Рис. 8.** (а) Энергии занятых нейтронных уровней ядер <sup>9,10</sup>Be в оболочечной двуцентровой модели в зависимости от расстояния  $R$  между центрами двух потенциальных ям типа Вудса–Саксона, сплошная кривая для  $|m_j| = 3/2$ , штриховая и штрих-пунктирная кривые для  $|m_j| = 1/2$ . (б, в) Плотности вероятности (в логарифмическом масштабе) в цилиндрических координатах (по горизонтали – ось симметрии) для трех низших уровней нейтронов для  $R = 3$  (б) и  $R = 4$  фм (в).

конфигурация  $\alpha + {}^6\text{He}$  имеет меньшую вероятность.

Представленные на рис. 6, 7 модели согласуются с представлениями о форме ядер <sup>9,10</sup>Be как о ядерной молекуле [32–35], состоящей из двух  $\alpha$ -кластеров и внешних (валентных) нейтронов.

Результаты расчетов состояний нейтронов в двуцентровой оболочечной модели ядер <sup>9,10</sup>Be представлены на рис. 8. Распределение плотности вероятности двух низших заполненных уровней соответствует нуклонам в двух близких видоизмененных (поляризованных)  $\alpha$ -кластерах. Распреде-

ление плотности вероятности для третьего уровня сходно с распределениями валентных нейтронов на рис. 6, 7. Таким образом, и модель ядерной молекулы и оболочечная модель объясняют положительное значение параметра квадрупольной деформации ядер <sup>9,10</sup>Be.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенный подход к расчетам характеристик основного состояния ядер <sup>6, 7, 9, 10</sup>Be может служить полезным дополнением к существующим более сложным теоретическим методам. Он позволяет достаточно просто определить зависимость энергии основного состояния от параметров потенциалов и вероятности различных конфигураций составляющих систему частиц.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пенионжкевич Ю.Э. // ЯФ. 2011. Т. 74. С. 1641; Penionzhkevich Yu.E. // Phys. Atom. Nucl. 2011. V. 74. P. 1615.
2. Пенионжкевич Ю.Э., Соболев Ю.Г., Самарин В.В. и др. // ЯФ. 2017. Т. 80. С. 525; Penionzhkevich Yu.E., Sobolev Yu.G., Samarin V.V. et al. // Phys. Atom. Nucl. 2017. V. 70. P. 928.
3. Самарин В.В., Науменко М.А. // Изв. РАН Сер. физ. 2019. Т. 83. С. 460; Samarin V.V., Naumenko M.A. // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2019. V. 83. P. 411.
4. Samarin V.V., Naumenko M.A. // Nuovo Cimento C. 2019. V. 42. P. 130.
5. von Oertzen W., Freer M., Kanada En'yo Y. // Phys. Rep. 2006. V. 432. P. 43.
6. Freer M. // Rep. Prog. Phys. 2007. V. 70. P. 2149.
7. Самарин В.В., Науменко М.А. // ЯФ. 2017. V. 80. С. 473; Naumenko M.A., Samarin V.V. // Phys. Atom. Nucl. 2017. V. 80. P. 877.
8. Voronchev V.T., Krasnopol'sky V.M., Kukulin V.I. // J. Phys. G. 1982. V. 8. P. 649.
9. Zhukov M.V., Danilin B.V., Fedorov D.V. et al. // Phys. Rep. 1993. V. 231. P. 151.
10. Кукулин В.И., Краснополский В.М., Миселхи М.А. и др. // ЯФ. 1981. Т. 34. С. 21; Kukulin V.I., Krasnopol'sky V.M., Miselkhi M.A. et al. // Sov. J. Nucl. Phys. 1981. V. 34. № 1. P. 21.
11. Kukulin V.I., Krasnopol'sky V.M., Voronchev V.T. et al. // Nucl. Phys. A. 1986. V. 453. P. 365.
12. Фейнман Р., Хибс А. Квантовая механика и интегралы по траекториям. М.: Мир, 1968
13. Блохинцев Д.И. Основы квантовой механики. М.: Наука, 1976.
14. Шуряк Э.В. // УФН. 1984. Т. 143. С. 309; Shuryak E.V. // Sov. Phys. Usp. 1984. V. 27. P. 448.
15. Shuryak E.V., Zhironov O.V. // Nucl. Phys. B. 1984. V. 242. P. 393.
16. Самарин В.В., Науменко М.А. // Изв. РАН Сер. физ. 2016. Т. 80. С. 314; Samarin V.V., Naumenko M.A. // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2016. V. 80. P. 283.

17. *Naumenko M.A., Samarin V.V.* // Supercomp. Front. Innov. 2016. V. 3. P. 80.
18. <https://developer.nvidia.com/cuda-zone/>.
19. *Переёлкин Е.Е., Садовников Б.И., Иноземцева Н.Г.* Вычисления на графических процессорах (GPU) в задачах математической и теоретической физики. М.: Ленанд, 2014.
20. *Сандерс Д., Кэндрот Э.* Технология CUDA в примерах: введение в программирование графических процессоров. М.: ДМК, 2011.
21. <http://hybrilit.jinr.ru/>.
22. *Флюгге З.* Задачи по квантовой механике. Т. 1. М.: Мир, 1974. С. 106.
23. *Ву Т.Ю., Омура Т.* Квантовая теория рассеяния. М.: Наука, 1969.
24. *Харрисон У.* Псевдопотенциалы в теории металлов. М.: Мир, 1968.
25. <http://nrv.jinr.ru/>.
26. <http://cdfc.sinp.msu.ru/services/radchart/radmain.html>.
27. *Самарин В.В.* // ЯФ. 2015. Т. 78. С. 133; *Samarin V.V.* // Phys. Atom. Nucl. 2015. V. 78. P. 128.
28. *Winther A.* // Nucl. Phys. A. 1994. V. 572. P. 191.
29. *Bando H.* // Nucl. Phys. A. 1986. V. 450. P. 217.
30. *Michel F., Ohkubo S., Reidemeister G.* // Prog. Theor. Phys. Suppl. 1998. V. 132. P. 132.
31. *Lukyanov S.M., Harakeh M.N., Naumenko M.A.* // World J. Nucl. Sci. Techn. 2015. V. 5. P. 265.
32. *von Oertzen W.* // Z. Phys. A. 1996. V. 354. P. 37.
33. *von Oertzen W., Freer M., Kanada-En'yo Y.* // Phys. Rep. 2006. V. 432. P. 43.
34. *Okabe S., Abe Y., Tanaka H.* // Prog. Theor. Phys. 1977. V. 57. P. 866.
35. *Okabe S., Abe Y.* // Prog. Theor. Phys. 1979. V. 61. P. 1049.