

УДК 535.14

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ИСТОЧНИКА ФОРМИРОВАНИЯ ФАНТОМНЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ В ВИДЕ РДС-КРИСТАЛЛА: КВАНТОВЫЕ ПОЛЯРИЗАЦИОННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ С УЧЕТОМ ДИФРАКЦИИ

© 2021 г. А. В. Белинский¹, Р. Сингх¹, *

¹Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
“Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова”, физический факультет, Москва, Россия

*E-mail: ranjit.singh@mail.ru

Поступила в редакцию 20.07.2020 г.

После доработки 28.08.2020 г.

Принята к публикации 28.09.2020 г.

Рассмотрен процесс приготовления коррелированных многофотонных квантовых состояний с помощью кристаллов с регулярной доменной структурой и квадратичной нелинейностью. Получены пространственные и поляризационные характеристики формируемых коррелированных пучков. Рассчитаны статистические квантовые поляризационные операторы Стокса и межмодовые корреляционные коэффициенты.

DOI: 10.31857/S0367676521010051

ВВЕДЕНИЕ

Фантомные изображения [1] — один из вариантов решения проблемы изучения чувствительных к свету объектов, прямое оптическое наблюдение которых затруднено. Для формирования фантомных изображений необходим источник коррелированных световых пучков, один из которых взаимодействует с объектом, а другие — нет (см. рис. 1). При этом в объектном канале детектор дает информацию только о полной интенсивности прошедшего излучения. Сопряженные

пучки не взаимодействуют с объектом, но регистрируются ПЗС-матрицами, допуская измерение пространственной корреляционной функции интенсивности между каналами.

Одним из важных доводов в пользу использования квантовых фантомных изображений является создание максимально щадящих условий освещения исследуемого объекта, когда воздействие излучения на объект (иногда необратимое) минимально [2]. Особенно это важно при облучении живых существ, например, рентгеновским излучением.

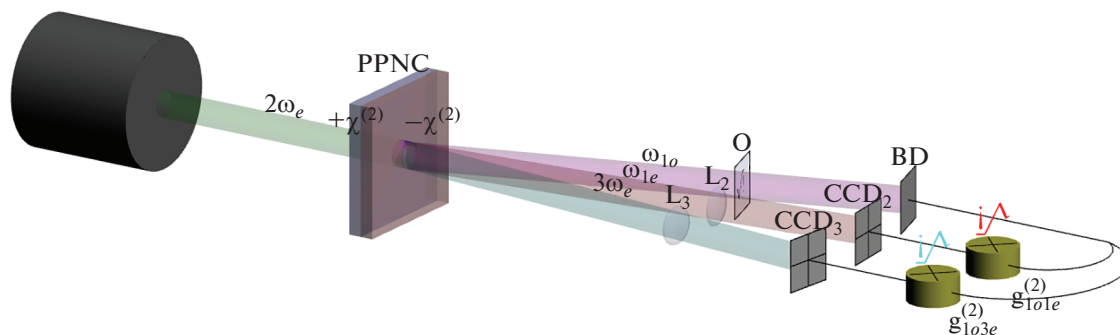


Рис. 1. Схема формирования фантомных изображений: PPNC — нелинейный кристалл с регулярно-доменной структурой (РДС); $2\omega_e$ — накачка; ω_{10} , ω_{1e} и $3\omega_e$ — пучки коррелированных фотонов; O — объект; BD — интегрирующий детектор в объектном канале; L — оптические объективы; CCD — ПЗС матрица фотодетекторов в восстанавливающем канале; g — коррелятор интенсивностей (схема совпадений).

Дополнительным источником информации при изучении исследуемых объектов может быть состояние поляризации отраженного или рассеянного ими излучения. В этом случае можно говорить о поляризационно-ориентированных фантомных изображениях. Определенные успехи в этом направлении уже имеются [3]. Однако оценить качество формируемых изображений можно лишь с учетом дифракции.

Кроме того, важно знать пространственное распределение формируемых источником коррелированных пучков, поскольку неравномерное освещение объекта приведет к систематическим ошибкам его измерения, которые необходимо должны быть учтены при последующей компьютерной обработке.

Все эти причины послужили поводом к проведению исследований, приведших к написанию этой статьи. При этом мы рассмотрели весьма перспективный в отношении формирования фантомных изображений источник виде РДС кристалла [4–9].

ПРОСТРАНСТВЕННОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ИЗЛУЧЕНИЯ ПОЛЯРИЗОВАННЫХ ПУЧКОВ

Рассмотрим 4 монохроматические моды с кратными частотами, характеризующиеся операторами уничтожения фотона, которые коллинеарно распространяются внутри регулярно-доменного кристалла с квадратичной нелинейностью. Операторы удовлетворяют стандартным коммутационным соотношениям [5–7]: $[\hat{A}_{jp}(\vec{r}, z), \hat{A}_{j'p'}^+(\vec{r}', z')] = \delta_{jp, j'p'}(\vec{r} - \vec{r}')\delta_{jp, j'p'}(z - z')$, $j = 1, 2, 3$; $p, p' = o$ – обыкновенная волна; $p, p' = e$ – необыкновенная волна; $\vec{r} = (x, y)$ – поперечные координаты и z – продольное направление распространения пучков.

Одновременно происходят два процесса: параметрическая генерация субгармоник (тип II) и преобразование частоты вверх за счет суммирования частот субгармоник с частотой накачки:

$$2\omega_e = \omega_o + \omega_e, \quad \delta k_1 = k_{2e} - k_{1o} - k_{1e} + m_1 G_1 = \Delta k_1 + m_1 G_1, \quad (1)$$

$$\omega_o + 2\omega_e = 3\omega_e, \quad \delta k_2 = k_{3e} - k_{1o} - k_{2e} + m_2 G_2 = \Delta k_2 + m_2 G_2, \quad (2)$$

где k_{jp} – абсолютные значения волновых векторов соответствующих мод с частотами ω_{jp} ; $j = 1, 2, 3$; Δk_q – волновые расстройки соответствующего процесса для однородного кристалла; $q = 1, 2$; $m_q = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots$ – порядки квазисинхронизма; $G_q = \frac{2\pi}{\Lambda_q}$ – волновое число – модуль

“псевдовектора” решетки доменной структуры с периодом Λ_q [5, 6, 10–13].

Система операторных уравнений этих процессов имеет следующий вид [5–7, 10, 12, 13]:

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{i}{2k_{1oz}} \Delta_{\perp} \right) \hat{A}_{1o}^+(\vec{r}, z) = \\ = i\gamma_1 \hat{A}_{1e}(\vec{r}, z) + i\gamma_2 \hat{A}_{3e}^+(\vec{r}, z), \\ \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{i}{2k_{1ez}} \Delta_{\perp} \right) \hat{A}_{1e}(\vec{r}, z) = -i\gamma_1 \hat{A}_{1o}^+(\vec{r}, z), \\ \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{i}{2k_{3ez}} \Delta_{\perp} \right) \hat{A}_{3e}^+(\vec{r}, z) = i\gamma_2 \hat{A}_{1o}^+(\vec{r}, z), \end{cases} \quad (3)$$

где $\Delta_{\perp} = \Delta_{\perp}(x, y)$ – поперечный лапласиан; нелинейные коэффициенты связи: γ_1, γ_2 отвечают за параметрический процесс (1) и преобразование частоты вверх (2), соответственно; Амплитуда моды накачки $2e$ является плоской неистощимой. При этом мы выбрали приближение заданной накачки, чтобы получить и проанализировать аналитическое решение.

Линейную систему операторных уравнений (3) подвергнем преобразованию Фурье по переменным x, y :

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial z} + iq_{1o} \right) \hat{a}_{1o}^+(\vec{k}_{1o}, z) = \\ = i\gamma_1 \hat{a}_{1e}(\vec{k}_{1e}, z) + i\gamma_2 \hat{a}_{3e}^+(\vec{k}_{3e}, z), \\ \left(\frac{\partial}{\partial z} - iq_{1e} \right) \hat{a}_{1e}(\vec{k}_{1e}, z) = -i\gamma_1 \hat{a}_{1o}^+(\vec{k}_{1o}, z), \\ \left(\frac{\partial}{\partial z} + iq_{3e} \right) \hat{a}_{3e}^+(\vec{k}_{3e}, z) = i\gamma_2 \hat{a}_{1o}^+(\vec{k}_{1o}, z), \end{cases} \quad (4)$$

$$\text{где } q_{jp} = \frac{k_{jpx}^2 + k_{jpy}^2}{2k_{jpz}}, \quad \vec{k}_{jp} = (k_{jpx}, k_{jpy}) \text{ и } \hat{a}_{jp}(\vec{k}_{jp}, z) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{A}_{jp}(x, y, z) \times e^{-i(k_{jpx}x + k_{jpy}y)} dx dy,$$

$$\hat{a}_{jp}(\vec{k}_{jp}, z) = Q(\vec{k}_{jp}, z) \hat{a}_{jp}(0). \quad (5)$$

Здесь $\hat{a}_{jp} = (\hat{a}_{1o}^+, \hat{a}_{1e}, \hat{a}_{3e}^+)^T$; T – знак транспонирования; $Q(\vec{k}_{jp}, z)$ – передаточная функция в виде матрицы коэффициентов размера 3×3 , которые рассчитаны численно.

Правильность выкладок проверяется контролем коммутационных соотношений, которые сводятся к виду:

$$Q_{11}Q_{11}^* - Q_{12}Q_{12}^* + Q_{13}Q_{13}^* = 1,$$

$$-Q_{21}Q_{21}^* + Q_{22}Q_{22}^* - Q_{23}Q_{23}^* = 1,$$

$$Q_{31}Q_{31}^* - Q_{32}Q_{32}^* + Q_{33}Q_{33}^* = 1,$$

которые, разумеется, выполняются.

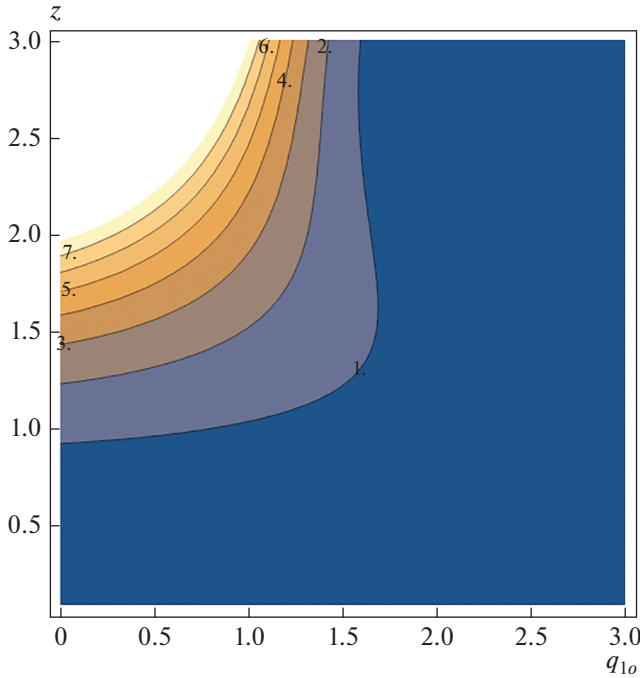


Рис. 2. Динамика значений среднего числа фотонов в моде $1o$ в случае, когда накачка моды $2e$ неистощимая, а остальные моды находятся в начальном вакуумном состоянии. Цифры над контурными линиями показывают значения N_{1o} . При этом остальные коэффициенты имеют следующие значения: $q_{1e} = 1$, $q_{3e} = 1$, $\gamma_1 = 1$ и $\gamma_2 = 0.5$. Поведение остальных мод $1e$ и $3e$ аналогично.

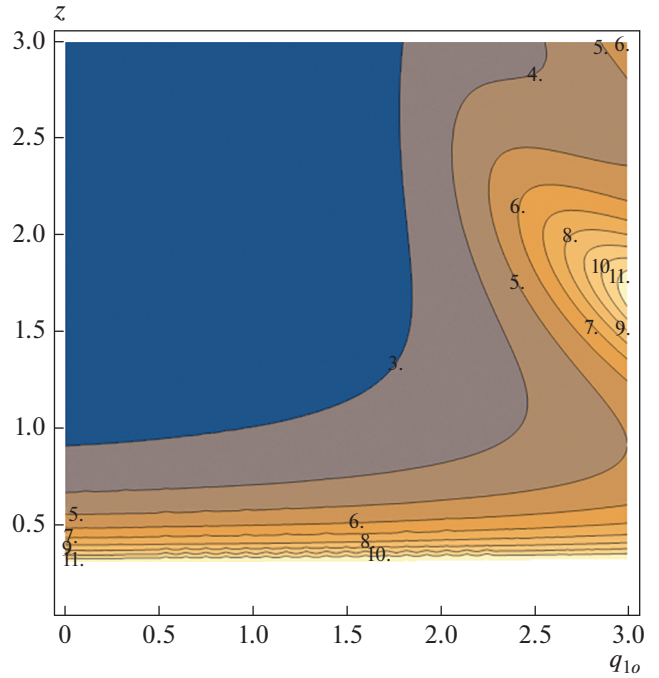


Рис. 3. Динамика значений коэффициента корреляции мод $1o$ и $1e$ для тех же параметров, что и на рис. 2. Цифры над контурными линиями показывают значения g_{1o1e} . Поведение коэффициента корреляции g_{1e3e} мод $1e$ и $3e$ аналогично, а $g_{1o3e} = 2$.

КВАНТОВЫЕ СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОЛЯРИЗАЦИИ МОД

Для изучения динамики среднего числа фотонов, в том числе поляризационных характеристик ортогональных мод $1o$ и $1e$, вычислим, как это принято, следующие величины:

средние числа фотонов

$$\hat{N}_{jp}(\vec{k}_{jp}, z) = \hat{a}_{jp}^+(\vec{k}_{jp}, z) \hat{a}_{jp}(\vec{k}_{jp}, z), \quad (6)$$

коэффициенты корреляции фотонов между модами

$$\hat{g}_{jp,j'p'}^{(2)}(\vec{k}_{jp}, z) = \frac{\hat{a}_{jp}^+(\vec{k}_{jp}, z) \hat{a}_{jp}(\vec{k}_{jp}, z) \hat{a}_{j'p'}^+(\vec{k}_{j'p'}, z) \hat{a}_{j'p'}(\vec{k}_{j'p'}, z)}{\hat{N}_{jp}(\vec{k}_{jp}, z) \hat{N}_{j'p'}(\vec{k}_{j'p'}, z)}, \quad (7)$$

средние значения операторов Стокса

$$\hat{S}_{0,1}(\vec{k}_{jp}, z) = \hat{a}_{1o}^+(\vec{k}_{jp}, z) \hat{a}_{1o}(\vec{k}_{jp}, z) \pm \hat{a}_{1e}^+(\vec{k}_{jp}, z) \hat{a}_{1e}(\vec{k}_{jp}, z), \quad (8)$$

$$\hat{S}_2(\vec{k}_{jp}, z) = \hat{a}_{1o}^+(\vec{k}_{jp}, z) \hat{a}_{1e}(\vec{k}_{jp}, z) + \hat{a}_{1e}^+(\vec{k}_{jp}, z) \hat{a}_{1o}(\vec{k}_{jp}, z), \quad (9)$$

$$\hat{S}_3(\vec{k}_{jp}, z) = i \hat{a}_{1e}^+(\vec{k}_{jp}, z) \hat{a}_{1o}(\vec{k}_{jp}, z) - i \hat{a}_{1o}^+(\vec{k}_{jp}, z) \hat{a}_{1e}(\vec{k}_{jp}, z), \quad (10)$$

степени поляризации взаимодействующих ортогональных мод

$$d(\vec{k}_{jp}, z) = \frac{\sqrt{\hat{S}_1(\vec{k}_{jp}, z)^2 + \hat{S}_2(\vec{k}_{jp}, z)^2 + \hat{S}_3(\vec{k}_{jp}, z)^2}}{\hat{S}_0(\vec{k}_{jp}, z)}. \quad (11)$$

Усреднение операторов (6)–(11) будем производить для вакуумного начального состояния мод $1o$, $1e$ и $3e$. Результаты представлены на рис. 2–4.

Операторы (8)–(10) удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям:

$$[\hat{S}_0(\vec{k}_{jp}, z), \hat{S}_{1,2,3}(\vec{k}_{jp}, z)] = 0, \\ [\hat{S}_{1,2,3}(\vec{k}_{jp}, z), \hat{S}_{2,3,1}(\vec{k}_{jp}, z)] = 2i \hat{S}_{3,1,2}(\vec{k}_{jp}, z).$$

Соотношение неопределенности для операторов Стокса имеет вид:

$$\langle \Delta S_j^2(\vec{k}_{jp}, z) \rangle \langle \Delta S_k^2(\vec{k}_{jp}, z) \rangle \geq |S_l(\vec{k}_{jp}, z)|^2, \quad (j \neq k \neq l).$$

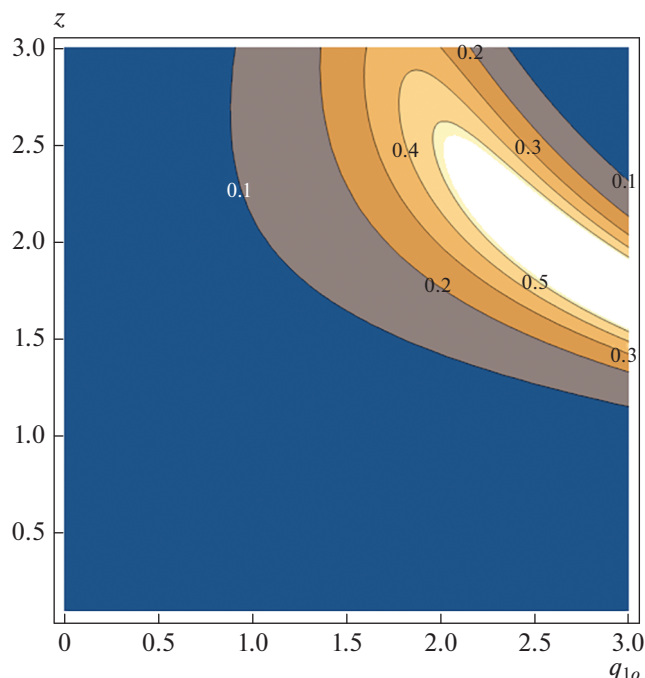


Рис. 4. Динамика значений степени поляризации между модами $1o$ и $1e$ для тех же исходных параметров, что и на рис. 2, 3. Цифры над контурными линиями показывают значения d .

ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ РАСЧЕТА

Результаты расчетов приведены на рис. 2–4. Они необходимы для оценки пригодности и перспектив использования РДС-кристаллов в качестве источников коррелированного оптического излучения при формировании фантомных изображений. Полученные значения корреляционных коэффициентов 2-го порядка между фотонами ортогональных поляризационных мод $1o$ и $1e$ не только дают потенциальную возможность успешно сформировать изображение, но также позволяют изучить и восстановить степень поляризации $d(\vec{k}_{jp}, z)$ поступающего от объекта света (см. рис. 4). Это несомненно открывает новые перспективы построения и оптимизации схем формирования фантомных изображений.

Кроме того, моделирование пространственной конфигурации коррелированных световых пучков дает аргументированные оценки качества формируемых изображений, их пространственного разрешения и неоднородности освещения, что также важно с точки зрения точности измерений.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 18-01-00598а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Колобов М.И., Чиркин А.С. Квантовое изображение М.: Физматлит, 2009.
2. Basset M.G., Setzpfandt F., Steinlechner F. et al. // Laser Photon. Rev. 2019. V. 13. No 10. Art. No 1900097.
3. Balakin D.A., Belinsky A.V., Chirkin A.S. // Quant. Inf. Proc. 2019. V. 18. Art. No 80.
4. Chirkin A.S., Gostev P.P., Agapov D.P. et al. // Laser Phys. Lett. 2018. V. 15. No 11. Art. No 115404.
5. Chirkin A.S., Makeev E.V. // J. Mod. Opt. 2006. V. 53. No 5–6. P. 821.
6. Chirkin A.S., Makeev E.V. // J. Opt. B. 2005. V. 7. S500.
7. Morozov E.Yu., Chirkin A.S. // J. Opt. A. 2003. V. 5. P. 233.
8. Родионов А.В., Чиркин А.С. // Опт. и спектроск. 2004. Т. 96. № 5. С. 790; Rodionov A.V., Chirkin A.S. // Opt. Spectrosc. 2004. V. 96. No 5. P. 721.
9. Чиркин А.С. // Квант. электрон. 2000. Т. 30. № 10. С. 847; Chirkin A.S. // Quant. Electron. 2000. V. 30. No 10. P. 847.
10. Dmitriev V.G., Singh R. // Int. J. Quant. Inform. 2003. V. 1. No 3. P. 403.
11. Белинский А.В., Сингх Р. // Квант. электрон. 2018. Т. 48. № 7. С. 611; Belinsky A.V., Singh R. // Quant. Electron. 2018. V. 48. No 7. P. 611.
12. Белинский А.В., Сингх Р. // Изв. РАН. Сер. физ. 2020. Т. 84. № 3. С. 382.
13. Белинский А.В., Сингх Р. // Изв. РАН. Сер. физ. 2020. Т. 84. № 1. С. 137; Belinsky A.V., Singh R. // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2020. V. 84. No 1. P. 107.

Mathematical modeling of the source of formation of ghost images in the form of a PPNC crystal: quantum polarization characteristics considering diffraction

A. V. Belinsky^a, R. Singh^{a, *}

^aLomonosov Moscow State University, Faculty of Physics, Moscow, 119991 Russia

**E-mail: ranjit.singh@mail.ru*

Received July 20, 2020; revised August 28, 2020; accepted September 28, 2020

The process of generation of correlated multiphoton quantum states using periodically poled nonlinear crystals having quadratic nonlinearity is considered. The spatial and polarization characteristics of the generated correlated beams are studied. Statistical polarization Stokes operators and intermode correlation coefficients are calculated.