УЛК 537.6.8

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ТЕОРИИ ДИФРАКЦИИ НА ОБЪЕКТАХ С КОНИЧЕСКИМИ ТОЧКАМИ

© 2021 г. А. Н. Боголюбов¹, И. Е. Могилевский^{1, *}, В. В. Ровенко¹

¹Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования "Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова", физический факультет, Москва, Россия *E-mail: imogilevsky@mail.ru

> Поступила в редакцию 20.07.2020 г. После доработки 28.08.2020 г. Принята к публикации 28.09.2020 г.

Рассмотрена трехмерная задача электромагнитной дифракции на ограниченном идеально проводящем теле, содержащем коническую точку. Построено асимптотическое представление электромагнитного поля в окрестности конической точки, в котором решение представлено в виде суммы сингулярной и гладкой частей.

DOI: 10.31857/S0367676521010075

В настоящее время весьма актуальными являются задачи скалярной и электромагнитной дифракции на сложных структурах при наличии ребер и конических точек на их границах. В частности, результат их решения может быть использован при решении различных задач аэродинамики и теории дифракции, например, задач о прохождении луча в маскирующей оболочке [1-5]. Известно, что наличие ребер, кромок и конических точек приводит к появлениям сингулярностей у поля в их окрестностях [6, 7], что существенно усложняет применение численных методов для исследования подобных задач. Одним из весьма эффективных способов преодоления этих проблем является выделение особенности решения в явном виде, то есть построение асимптотического представления решения в окрестности особой точки границы. При этом существенно используются результаты по асимптотике решения эллиптических краевых задач, представленные в работах В.А. Кондратьева [8], а также С.А. Назарова и Б.А. Пламеневского [7].

Рассмотрим трехмерную задачу дифракции электромагнитной волны на ограниченной области Ω , имеющей коническую точку (рис. 1):

rot
$$\overline{H} = -ik\overline{E} + \frac{4\pi}{c}\overline{j}$$
, supp $j \subset D_0 \subset \mathbb{R}^3/\Omega$,
rot $\overline{E} = ik\overline{H}$, div $\overline{H} = 0$, div $\overline{E} = 0$. (1)

Граничные условия имеют вид:

$$(\overline{H}, \overline{n})|_{\partial\Omega} = 0, \quad [\overline{E}, \overline{n}]|_{\partial\Omega} = 0,$$
 (2)

где \overline{n} — вектор нормали к конической поверхности.

Условие Мейкснера на вершине конуса запишем в виде: $\overline{E}, \overline{H} \in \left(L_2^{loc}\right)^3$. Для детального исследования поля в окрестности конической точки данная задача сначала рассматривается в бесконечном конусе. В дальнейшем использование срезающей функции позволит исходную задачу дифракции свести к рассматриваемой задаче. Вводится сферическая система координат с центром в конической точке. Данный подход позволяет существенно упростить граничные условия, что дает возможность более детально исследовать свойства искомого решения. Основное уравнение задачи (1) преобразуется с использованием представления:

$$\overline{E} = \operatorname{rot} \operatorname{rot}(\overline{e}_r U_r) + ik \operatorname{rot}(\overline{e}_r V_r),$$

$$\overline{H} = -ik \operatorname{rot}(\overline{e}_r U_r) + \operatorname{rot} \operatorname{rot}(\overline{e}_r V_r),$$

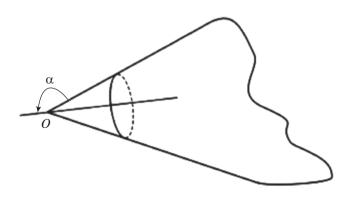


Рис. 1. Коническая поверхность.

где U и V — электрический и магнитный потенциалы Дебая, для которых получаем следующие задачи [9], оставив в левой части оператор Лапласа, а правую часть обозначив как функции $f_{1,2}(M)$:

$$\Delta U = f_1(M), \ \ U|_{\Theta = \alpha} = 0,$$
 (3)

$$\Delta V = f_2(M), \ \frac{\partial V}{\partial \theta}\Big|_{\theta=\alpha} = 0.$$
 (4)

Сначала найдем асимптотику для задачи (3) с условиями Дирихле. Следуя результатам В.А. Кондратьева [8], введем пространство функций V_{γ}^{l} с нормой:

$$||u||_{V'_{\gamma}}^{2} = \sum_{s=0}^{l} \int_{V} r^{2\gamma - 2(l-s)} \left| \frac{\partial^{s} u}{\partial x^{s}} \right|^{2} dV,$$

где K — внешняя часть бесконечного конуса, $l \ge 0$ — целое, γ — вещественное число.

Далее предполагается, что правая часть $f(M) \in V_{\gamma}^{l}(K)$. Проведем замену переменной $\tau = \ln \frac{1}{r} \Rightarrow \tau \in (-\infty; +\infty)$. После умножения на $e^{-2\tau}$ уравнение (3) примет вид

$$\frac{\partial^{2} U}{\partial \tau^{2}} - \frac{\partial U}{\partial \tau} + \Delta_{\theta, \varphi} U = f_{1}(\tau, \theta, \varphi) e^{-2\tau},$$

где $\Delta_{\theta,\phi}$ — угловая часть оператора Лапласа. Сделаем преобразование Фурье по τ :

$$\hat{F}(\lambda, \theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\tau, \theta, \varphi) e^{-i\lambda \tau} d\tau,$$

$$F(\tau, \theta, \varphi) = f_1(\tau, \theta, \varphi) e^{-2\tau},$$

$$\hat{U}(\lambda, \theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} U(\tau, \theta, \varphi) e^{-i\lambda \tau} d\tau.$$

Здесь $\hat{U}(\lambda, \theta, \phi)$ и $\hat{F}(\lambda, \theta, \phi)$ — образы функции U и правой части уравнения соответственно. Следовательно, задача (3) примет вид:

$$-\lambda^{2} \hat{U} + i\lambda \hat{U} + \Delta_{\theta,\phi} \hat{U} = \hat{F}(\lambda,\theta,\phi), \quad \hat{U}\Big|_{\theta=\alpha} = 0,$$

$$\Delta_{\theta,\phi} \hat{U} = \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin\theta \frac{\partial \hat{U}}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{\sin^{2}\theta} \frac{\partial^{2} \hat{U}}{\partial \phi^{2}}.$$
(5)

Из свойств преобразования Фурье для функций $\hat{F}(\lambda, \theta, \varphi)$ следует оценка:

$$\sum_{k=0}^{l} \int_{-\infty+ih}^{+\infty+ih} |\lambda|^{2k} \hat{F}(\lambda, \theta, \varphi)_{H^{l-k}(0,\alpha) \times (0,2\pi)}^{2} d\lambda \le C f_{l_{V_{\gamma}^{l}(K)}}^{2},$$

$$h = l + \frac{1}{2} - \gamma.$$
(6)

Решение задачи (5) ищется в виде ряда по сферическим функциям $P_n^{(m)}(\cos\theta)e^{im\phi}$:

$$\hat{U}(\lambda, \theta, \varphi) = \sum_{n,m} \hat{U}_{nm}(\lambda) P_{n_m}^{(m)}(\cos \theta) e^{im\varphi}, \qquad (7)$$

$$\hat{F}(\lambda, \theta, \varphi) = \sum_{n,m} \hat{F}_{nm}(\lambda) P_{n_m}^{(m)}(\cos \theta) e^{im\varphi}.$$
 (8)

Здесь $m=0,\pm 1,\pm 2,\ldots,\pm n,$ $n=n_m,$ а n_m определяется из соотношений $P_{n_m}^{(m)}(\cos\alpha)=0$ [10]. Более подробно рассмотрим вопрос существования решения этого уравнения после нахождения асимптотики.

Подставляя (7) и (8) в (5) получим:

$$(-\lambda^{2} + i\lambda)\hat{U}_{nm}(\lambda) + n_{m}(n_{m} + 1)\hat{U}_{nm}(\lambda) = \hat{F}_{nm}(\lambda),$$

$$\hat{U}_{nm}(\lambda) = \frac{\hat{F}_{nm}(\lambda)}{(i - \lambda)\lambda + n_{m}(n_{m} + 1)}.$$

Тогда решение задачи (5):

$$\hat{U}(\lambda, \theta, \varphi) = \sum_{n,m} \frac{\hat{F}_{nm}(\lambda)}{(i - \lambda)\lambda + n_m(n_m + 1)} \times P_{n_m}^{(m)}(\cos \theta) e^{im\varphi}.$$
(9)

Если функция $\hat{U}(\lambda, \theta, \phi)$ не имеет полюсов на прямой $Im\lambda = h = l + \frac{1}{2} - \gamma$, получаем следующую оценку:

$$\left\|U\left(r,\theta,\varphi\right)\right\|_{V_{\gamma}^{l+2}\left(K\right)}\leq C\left\|f\left(r,\theta,\varphi\right)\right\|_{V_{\gamma}^{l}\left(K\right)}.$$

Пока построенное в пространстве Фурье-образов решение (9) определено лишь на прямой $h = -\gamma + l + \frac{1}{2}$. Для построения его асимптотики необходимо, чтобы функция (9) была определена в некоторой полосе $h_1 < h < h_2$ (рис. 2).

Пусть $f(r,\theta,\phi) \in V_{\gamma_1}^{l_1}(K) \cap V_{\gamma_2}^{l_2}(K)$, $\gamma_1 > \gamma_2$, l_1 и l_2 такие, что $h_1 = l_1 + \frac{1}{2} - \gamma_1$ и $h_2 = l_2 + \frac{1}{2} - \gamma_2$ удовлетворяют условию $h_2 > h_1$, функция $\hat{U}(\lambda,\theta,\phi)$ не имеет полюсов на прямых $\text{Im}\lambda = h_1$ и $\text{Im}\lambda = h_2$. С помощью теоремы о вычетах переходим от интегрирования по прямой $\text{Im}\lambda = h_1$ к интегрированию по прямой $\text{Im}\lambda = h_2$, а находящиеся между ними полюсы решения (9) позволяют получить асимптотическое представление решения:

$$U(r,\theta,\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty+ih_{2}}^{+\infty+ih_{2}} \hat{U}(\lambda,\theta,\varphi) e^{i\lambda\tau} d\lambda \Big|_{\tau=\ln\frac{1}{r}} +$$

$$+ \sqrt{2\pi}i \sum_{h_{1} < Im\lambda_{k} < h_{2}} \operatorname{Res} \hat{U}(\lambda,\theta,\varphi) e^{i\lambda_{n}\tau} \Big|_{\tau=\ln\frac{1}{r}},$$

$$U(r,\theta,\varphi) = \Re(r,\theta,\varphi) + \sqrt{2\pi}i \times$$

$$\times \sum_{h_{1} < Im\lambda_{k} < h_{2}} \operatorname{Res} \hat{U}(\lambda,\theta,\varphi) e^{i\lambda_{n}\tau} \Big|_{\tau=\ln\frac{1}{r}}.$$

$$(10)$$

Для гладкой части $\Re(r,\theta,\phi)$ функции $U(r,\theta,\phi)$ имеем следующую оценку:

$$\Re\left(r,\theta,\varphi\right)_{V_{\infty}^{l_{1}+2}(K)} \leq Cf\left(r,\theta,\varphi\right)_{V_{\infty}^{l_{1}}(K)}.$$
(11)

Особые точки функции $\hat{U}(\lambda, \theta, \varphi)$ — полюсы первого порядка (из (9)):

$$(i - \lambda)\lambda - n_m (n_m + 1) = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} =$$

$$= \frac{i}{2} \left\{ 1 \pm \sqrt{1 + 4n_m^2 + 4n_m} \right\}, \quad \lambda_{1,2} = \frac{i}{2} \left[1 \pm (2n_m + 1) \right].$$

Асимптотическое представление решения имеет вил:

$$U(r,\theta,\phi) = \Re + \sum_{h_{1} < n_{m} < h_{2}} C_{n,m} r^{n_{m}} P_{n_{m}}^{(m)}(\cos \theta) e^{im\phi} + \sum_{h_{1} < n_{m} + 1 < h_{2}} D_{n,m} r^{n_{m} + 1} P_{n_{m}}^{(m)}(\cos \theta) e^{im\phi},$$

где $C_{n,m}$ и $D_{n,m}$ — постоянные.

Теперь проведем оценку h_1 и h_2 , исходя из параметров нашей исходной задачи и свойств функций. В силу условия Мейкснера и оценки числа l=1, поскольку оно связано с половиной порядка оператора. Значит, из условия интегрируемости решения в окрестности D_{ε} конической точки (поведение представленного ниже подынтегрального выражения должно быть не хуже чем r^{-1}):

$$\int_{D_{\varepsilon}} r^{2\gamma - 2} u^2 dD_{\varepsilon} = \int_{D_{\varepsilon}} r^{2\gamma - 2} r^2 r^2 \sin \theta dr =$$

$$= \int_{D_{\varepsilon}} r^{2\gamma + 2} \sin \theta dr \Rightarrow 2\gamma + 2 > -1 \Rightarrow \gamma > -3/2.$$

Из формулы для определения прямой $h = -\gamma + \frac{3}{2}$. Следовательно, функция (9) будет определена в полосе $h_1 = -\frac{1}{2} < h < h_2 = \frac{3}{2}$.

Вернемся к системе (3). Следуя В.А. Кондратьеву [8], введем срезающую функцию:

$$\chi(r) = \begin{cases} 1, r \le d/2 \\ 0, r > d \end{cases}, \quad \chi(r) \in C^{\infty}.$$

Отметим, что на полуинтервале $\left(\frac{d}{2};d\right]$ функция $\chi(r)$ меняется с бесконечной гладкостью от (1;0]. Для функции $\chi(r)U(r,\theta,\phi)$ имеем следующую задачу:

$$\Delta(\chi U) = f^{\chi}(M), \quad \chi U|_{\theta=\alpha} = 0, \tag{12}$$
 где $f^{\chi}(M) = \chi f(M) + [\Delta, \chi]U, \quad [\Delta, \chi]U = \Delta(\chi U) - \chi \Delta U.$

Поскольку $f^{\chi}(r,\theta,\phi) \in V^{l+1}_{l-1/2}$ и функция $\widehat{\chi U}$ не имеет полюсов на прямой $Im\lambda = -1/2$, тогда су-

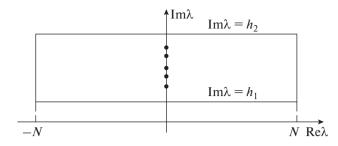


Рис. 2. Прямые Im $\lambda = h_1$ и Im $\lambda = h_2$ и особые точки функции $\hat{U}(\lambda, \theta, \varphi)$.

ществует единственное решение $Q=\chi U$ такое, что $\chi U\in V_{l-1/2}^{l+1}\subset V_{-1/2}^1$, поэтому:

$$U(r,\theta,\phi) = \chi \left\{ \sum_{\frac{-1}{2} < n_m < \frac{3}{2}} C_{n,m} r^{n_m} P_{n_m}^{(m)} (\cos \theta) e^{im\phi} + \sum_{\frac{-1}{2} < n_m + 1 < \frac{3}{2}} D_{n,m} r^{n_m + 1} P_{n_m}^{(m)} (\cos \theta) e^{im\phi} \right\} + \Re(r,\theta,\phi),$$
(13)

где n_m — решения уравнений $P_{n_m}^{(m)}(\cos\alpha) = 0$, $C_{n,m}$ и $D_{n,m}$ — постоянные.

Отметим, что построение асимптотики для задачи (4) с условиями Неймана будет происходить аналогично. Только n_m будут решениями уравне-

ний
$$\frac{\partial P_{n_m}^{(m)}(\cos\theta)}{\partial \theta}\bigg|_{\theta=\alpha}=0.$$

Существование решения уравнения $P_{n_m}^{(m)}(\cos\alpha)=0$ подробно рассмотрено в статье [10]. Используя аналогичный подход, покажем суще-

ствование решения
$$\frac{\partial P_{n_m}^{(m)}(\cos\theta)}{\partial \theta}\Big|_{\theta=\alpha}=0$$
. Предста-

вим $P_{n_m}^{(m)}(\cos\theta)$ в виде [10]:

$$P_{n_m}^{(m)}(\cos\theta) = \frac{2\Gamma(n+m)}{\sqrt{\pi}\Gamma(n+0.5)} \times \left[\frac{\cos(\{n+0.5\}\theta - 0.25\pi + 0.5\pi m)}{(2\sin\theta)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1-4m^2}{4n+3} \times \frac{\cos(\{n+1.5\}\theta - 0.75\pi + 0.5\pi m)}{(2\sin\theta)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1-40m^2}{22n+5} \times \frac{\cos(\{n+2.5\}\theta - 1.25\pi + 0.5\pi m)}{(2\sin\theta)^{\frac{5}{2}}} + \dots \right].$$

Здесь $\Gamma(x)$ — гамма-функция Эйлера. Сократим запись, переобозначив коэффициенты при степенях $2\sin\theta$:

$$P_{n_m}^{(m)}(\cos\theta) = \frac{2\Gamma(n+m)}{\sqrt{\pi}\Gamma(n+0.5)} \times \left[\frac{\cos(\{n+0.5\}\theta - 0.25\pi + 0.5\pi m)}{(2\sin\theta)^{\frac{1}{2}}} + \alpha \frac{\cos(\{n+1.5\}\theta - 0.75\pi + 0.5\pi m)}{(2\sin\theta)^{\frac{3}{2}}} + \beta \frac{\cos(\{n+2.5\}\theta - 1.25\pi + 0.5\pi m)}{(2\sin\theta)^{\frac{5}{2}}} \dots \right].$$

Тогда для производной:

$$\frac{\partial P_{n_m}^{(m)}(\cos\theta)}{\partial\theta} = \frac{-2\Gamma(n+m)}{\sqrt{\pi}\Gamma(n+0.5)} \times \left[\frac{n \cdot \sin(\{n+0.5\}\theta - 0.25\pi + 0.5\pi m)}{(2\sin\theta)^{\frac{1}{2}}} + \frac{\cos(\{n-0.5\}\theta - 0.25\pi + 0.5\pi m)}{(2\sin\theta)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\alpha \cdot \sin(\{n+1.5\}\theta - 0.75\pi + 0.5\pi m)}{(2\sin\theta)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\alpha \cdot \sin(\{n+1.5\}\theta - 0.75\pi + 0.5\pi m)}{(2\sin\theta)^{\frac{5}{2}}} + \frac{\alpha \cdot \sin(\{n+2.5\}\theta - 0.75\pi + 0.5\pi m)}{(2\sin\theta)^{\frac{5}{2}}} + \frac{\beta \cdot \sin(\{n+2.5\}\theta - 1.25\pi + 0.5\pi m)}{(2\sin\theta)^{\frac{5}{2}}} + \frac{\beta \cdot \cos(\{n+1.5\}\theta - 1.25\pi + 0.5\pi m)}{(2\sin\theta)^{\frac{5}{2}}} + \dots \right].$$
Приводя к общему знаменателю относительно

Приводя к общему знаменателю относительно $(2\sin\theta)^{\frac{k+2}{2}}$, где k=1,3,5,..., а также учитывая различный порядок малости этих степеней получим, что условие Неймана будет выполняться, если для каждого k выполнены уравнения:

$$2n \cdot \sin \theta \cdot \sin (\{n + 0.5k\} \theta - 0.25k\pi + 0.5\pi m) + k \cos (\{n + 0.5k\} \theta - 0.25k\pi + 0.5\pi m - \theta) = 0.$$
(14)

Покажем теперь, что если уравнение (14) выполнено для k=1, то оно выполнено и для k=3. Пусть $\{n+0.5\}\theta-0.25\pi+0.5\pi m=\phi$, тогда:

$$k = 1: \cos(\varphi - \theta) =$$

$$= -2n \cdot \sin \theta \cdot \sin \varphi - \text{выполнено},$$

$$k = 3: 3\cos(\varphi - \theta + \theta - 0.5\pi) =$$
(15)

$$k = 3: 3\cos(\varphi - \theta + \theta - 0.5\pi) =$$

= $-2n \cdot \sin\theta \cdot \sin(\varphi + \theta - 0.5\pi)$. (16)

Используя формулы косинуса разности и суммы, а также формулы приведения, перепишем (15) и (16):

k = 1: $\cos \varphi \cos \theta = -(2n+1) \cdot \sin \theta \cdot \sin \varphi$, (17) k = 3: $3 \sin \varphi = 2n \cdot \sin \theta \{\cos \varphi \cos \theta - \sin \theta \cdot \sin \varphi\}$.

Подставляя (16) в (17), находим $3\sin \varphi = -4n(n+1) \cdot \sin^2 \theta \sin \varphi$.

Значит, уравнения для k = 1 и k = 3 выполнены одновременно, если $\sin \varphi = 0$ или $\sin^2 \theta = -\frac{3}{4n(n+1)} < 0$.

Совершенно аналогично можно доказать утверждение, что если уравнение верно при каком-то k = K, то оно верно и для k = K + 2. Тогда по методу математической индукции можно считать доказан-

ным, что решения n_m уравнения $\frac{\partial P_{n_m}^{(m)}(\cos \theta)}{\partial \theta}\Big|_{\theta=\alpha}=0$

можно найти как $\{n + 0.5\}\theta - 0.25\pi + 0.5\pi m = \pi s$, s = 0, 1, 2...

Таким образом, построено асимптотическое разложение решения трехмерной задачи дифракции электромагнитной волны на ограниченном идеально проводящем теле, содержащем коническую точку, а также показана возможность такого разложения для условий первого и второго рода. Данный подход может быть применен для решения задач электромагнитной теории дифракции путем асимптотического представления решения в окрестности особых точек границы, а также совмещен с численными методами для уточнения решения задачи [11].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1. *Могилевский И.Е., Ровенко В.В.* // Физ. осн. приборостр. 2014. Т. 3. № 4. С. 28.
- Дубинов А.Е., Мытарева Л.А. // УФН. 2010. Т. 180.
 № 5. С. 475; Dubinov A.E., Mytareva L.A. // Phys. Usp. 2010. V. 53. P. 455.
- 3. Дубинов А.Е., Мытарева Л.А. // УФН 2012. Т. 182. № 3. С. 337; Dubinov A.E., Mytareva L.A. // Phys. Usp. 2012. V. 55. P. 315.
- Pendry J.B., Schurig D., Smith D.R. // Science. 2006.
 V. 312. P. 1780.
- 5. *Долин Л.С.* // Изв. вузов. Радиофиз. 1961. Т. 4. С. 964.
- 6. *Свешников А.Г., Могилевский И.Е.* Избранные математические задачи теории дифракции. М.: МГУ, 2012. 239 с.
- 7. *Назаров С.А., Пламеневский Б.А.* Эллиптические задачи в областях с кусочно-гладкой границей. М: Наука, 1991. 334 с.

- 8. *Кондратьев В.А.* Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими и угловыми точками. М.: МГУ, 1967. С. 209.
- 9. *Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н.* Сборник задач по математической физике. М.: Физматлит, 2004. С. 688.
- 10. Macdonald H.M. // Proc. Lond. Math. Soc. 1899. P. 264.
- 11. Боголюбов А.Н., Могилевский И.Е., Ровенко В.В. и др. // В кн.: 12-я Междунар. конф. "Акустооптические и радиолокационные методы измерений и обработки информации" (ARMIMP-2019).

Asymptotic expansion of the solution of the electromagnetic theory problems of diffraction on objects with conical points

A. N. Bogolyubov^a, I. E. Mogilevsky^a, *, V. V. Rovenko^a

^aLomonosov Moscow State University, Moscow, 119991 Russia
*E-mail: imogilevsky@mail.ru
Received July 20, 2020; revised August 28, 2020; accepted September 28, 2020

We consider the three-dimensional problem of electromagnetic diffraction by a bounded ideally conducting body containing a conical point. An asymptotic representation of the electromagnetic field is constructed in the vicinity of the conical point, in which the solution is represented as the sum of the singular and smooth parts.