ИЗВЕСТИЯ РАН. СЕРИЯ ФИЗИЧЕСКАЯ, 2021, том 85, № 1, с. 121–126

УДК 534.2:517.9

ВЗАИМОСВЯЗЬ ФАЗ И АМПЛИТУД МУЛЬТИПОЛЬНЫХ КОМПОНЕНТ АКУСТИЧЕСКОГО ПОЛЯ, РАССЕЯННОГО ДИСКРЕТНЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ

© 2021 г. К. В. Дмитриев*

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования “Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова”, физический факультет, Москва, Россия

**E-mail: kdmitrie@lanat.ru*

Поступила в редакцию 20.07.2020 г.
После доработки 28.08.2020 г.
Принята к публикации 28.09.2020 г.

Акустическое поле, рассеянное объектом, представимо в виде мультипольного разложения. Для объектов с цилиндрической симметрией в отсутствие внутренних источников энергии множество значений каждого коэффициента этого разложения ограничено. Приведены соотношения между фазами и амплитудами этих коэффициентов, а также между мощностями поглощенного и рассеянного полей.

DOI: 10.31857/S0367676521010099

ВВЕДЕНИЕ

Изучение свойств распространения волн внутри метаматериалов в акустике и оптике в последние годы широко обсуждается. В эту область входят эффекты отрицательного преломления, маскировки, акустического диода, поглощения волн и многие другие. Эти эффекты имеют большое практическое значение.

Один из подходов к описанию волновых процессов в неоднородных средах основан на теории рассеяния. Когда волна распространяется в среде, каждый из элементов среды начинает колебаться, становясь источником вторичных волн. Итоговое поле может быть представлено в виде суммы падающего поля, которое создается первичными источниками, и рассеянного поля, которое представляет собой сумму полей, рассеянных всеми элементами среды. Рассеянное поле создается так называемыми вторичными источниками, которые в каждой точке пропорциональны именно итоговому полю в этой точке. Таким образом, задача рассеяния является самосогласованной и требует учета процессов многократного рассеяния между элементами среды.

Для метаматериалов, которые представляют собой упорядоченные (или расположенные хаотически) дискретные неоднородности, помещенные в фоновую среду, такой подход наиболее естественен. В этом случае происходит многократное рассеяние волн на отдельных неоднородностях. Конструкция этих неоднородностей определяет их отклик на падающую волну в виде возникающих вторичных источников поля и, таким образом, оказывает влияние на волновые свойства среды в целом.

Широко применяется представление поля, рассеянного каждой отдельной неоднородностью, в виде ряда мультипольных компонент [1–3] для решения задач рассеяния, включая задачи сокрытия неоднородного объекта [4]. В системе без нелинейных эффектов величина этих компонент линейно зависит от поля, падающего на неоднородность. В представляемой работе из общих соображений решается задача выявления связи между амплитудой и фазой этих рассеянных мультипольных компонент. Отдельно рассматривается случай пассивных неоднородностей, не содержащих внутреннего источника энергии.

ПОТОКИ ЭНЕРГИИ ЧЕРЕЗ ЭЛЕМЕНТ МЕТАМАТЕРИАЛА

Рассматривается двумерная задача, которая при необходимости может быть обобщена и на трехмерный случай. Элемент метаматериала в виде неоднородности $\mathfrak{R}$ конечных размеров (рис. 1) расположен вблизи начала координат. Остальное пространство заполнено однородной непоглощающей фоновой средой. Следует отметить, что сначала не делается (пока не будет оговорено особо) каких-либо предположений о конструкции элемента метаматериала и уравнениях, описыва-

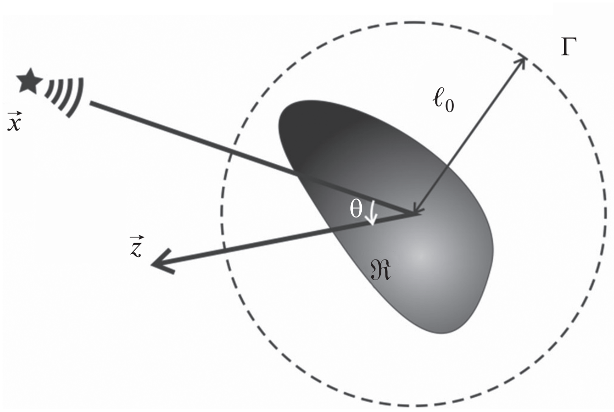

Рис. 1. Геометрия задачи. Область расположения неоднородности $\mathfrak{R}$ находится внутри окружности Γ с центром в начале координат. Падающее поле создается первичным источником, который находится в точке $\vec{x}$.

ющих волновые процессы внутри него. Этот элемент может включать источник энергии, различные электроакустические преобразователи, быть нелинейным и т.д. Эти особенности скажутся в дальнейшем, после получения выражений для потоков энергии в такой системе.

Пусть окружность Γ с центром в начале координат и радиусом ℓ_0 полностью охватывает элемент метаматериала $\mathfrak{R}$ (рис. 1), и единственный монопольный δ-образный первичный источник акустического поля находится в точке $\vec{x}$ вне окружности Γ, т.е. $|\vec{x}| > \ell_0$. Будет рассматриваться монохроматический случай с временно́й зависимостью полей ~ $\exp(-i\omega t)$. Потенциал падающего поля $\varphi_0^+(\vec{z},\vec{x})$, которое создает первичный источник (т.е. это потенциал поля в фоновой среде в отсутствие неоднородности) в произвольной точке $\vec{z}$, удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$\nabla_{\vec{z}}^2\varphi_0^+(\vec{z},\vec{x}) + k_0^2\varphi_0^+(\vec{z},\vec{x}) = \phi\delta(\vec{z}-\vec{x}),$$

где k_0 – волновое число в фоновой среде, ϕ – нормировочный амплитудный коэффициент первичного источника. Верхний индекс "+" здесь и далее означает, что рассматриваются запаздывающие поля, удовлетворяющие условию излучения Зоммерфельда. Решение уравнения Гельмгольца $\varphi_0^+(\vec{z},\vec{x}) = \phi G_0^+(\vec{z}-\vec{x})$ выражается через двумерную запаздывающую функцию Грина однородной среды

$$G_0^+(\vec{z}-\vec{x}) = -\frac{i}{4}H_0^{(1)}(k_0|\vec{z}-\vec{x}|), \qquad (1)$$

где $H_n^{(\xi)}(\varsigma)$ – функции Ханкеля n-го порядка ξ-го рода (ξ = 1 или ξ = 2). Согласно теореме сложения Графа это решение может быть представлено в виде ряда, содержащего функции Бесселя $J_n(\varsigma)$:

$$\varphi_0^+(\vec{z},\vec{x}) = -\frac{i}{4}\phi\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\theta}H_n^{(1)}(k_0|\vec{x}|)J_n(k_0|\vec{z}|) \quad \text{при} \quad |\vec{z}| < |\vec{x}|, \qquad (2)$$

где угол $\theta \equiv \angle(\vec{z},\vec{x})$ между векторами $\vec{z}$ и $\vec{x}$ отсчитывается в направлении против часовой стрелки (рис. 1). Выражение (2) при фиксированном $\vec{x}$ представляет собой разложение падающего поля по мультипольным компонентам, порядок которых задается величиной $|n|$. Таким образом, член с $n = 0$ соответствует монопольной компоненте, с $n = \pm 1$ – дипольной, с $n = \pm 2$ – квадрупольной и т.д. Надо заметить, что возникновение в (2) мультипольных компонент с $n \neq 0$ связано с достаточно произвольным выбором начала координат; в то же время в поле (1) присутствует только монопольная компонента в системе координат с центром в точке $\vec{x}$.

Поскольку выполнено тождество $J_n(\varsigma) \equiv \frac{1}{2}\left(H_n^{(1)}(\varsigma) + H_n^{(2)}(\varsigma)\right)$, то падающее поле (2) можно представить в виде суммы двух составляющих:

$$\varphi_0^+(\vec{z},\vec{x}) = -\frac{i}{8}\phi\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\theta}H_n^{(1)}(k_0|\vec{x}|)\times \times\left[H_n^{(1)}(k_0|\vec{z}|) + H_n^{(2)}(k_0|\vec{z}|)\right] \equiv \equiv \varphi_{0\to}^+(\vec{z},\vec{x}) + \varphi_{0\leftarrow}^+(\vec{z},\vec{x}). \qquad (3)$$

Здесь $\varphi_{0\to}^+(\vec{z},\vec{x}) = -\frac{i}{8}\phi\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\theta}H_n^{(1)}(k_0|\vec{x}|) \times H_n^{(1)}(k_0|\vec{z}|)$ – при фиксированном $\vec{x}$ это поле, "выходящее" из начала координат; $\varphi_{0\leftarrow}^+(\vec{z},\vec{x}) = -\frac{i}{8}\phi\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\theta}H_n^{(1)}(k_0|\vec{x}|)H_n^{(2)}(k_0|\vec{z}|)$ – поле, "входящее" в начало координат. Такое отличие этих полей проявляется в том, что зависимость от точки $\vec{z}$ для $\varphi_{0\to}^+(\vec{z},\vec{x})$ включает функции Ханкеля только первого рода, а для $\varphi_{0\leftarrow}^+(\vec{z},\vec{x})$ – только второго рода. Поскольку обе рассматриваемые составляющие являются частями исходного падающего поля $\varphi_0^+(\vec{z},\vec{x})$, для каждой из них сохранен верхний индекс "+". Векторы потоков мощности, которые проходят через окружность Γ и соответствуют "входящей" и "выходящей" составляющим, равны по модулю и противоположны по направлению в каждой точке окружности Γ; поэтому суммарный поток мощности падающего поля через нее равен нулю.

Рассеянное неоднородностью $\Re$ поле φ_{sc}^{+} также можно разложить вне $\Re$ в ряд по мультипольным компонентам:

$$\varphi_{sc}^{+}(\vec{z},\vec{x}) = -\frac{\phi}{16}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\theta} H_n^{(1)}(k_0|\vec{x}|)\beta_n^{+}(\vec{x})H_n^{(1)}(k_0|\vec{z}|), \quad \vec{z}\notin\Re. \tag{4}$$

Здесь введены коэффициенты рассеяния $\beta_n^{+}(\vec{x})$, характеризующие вторичные источники $|n|$-й мультипольности. Они зависят от положения первичного источника $\vec{x}$. В отличие от выражения (3), ряд (4) содержит только одну "выходящую" составляющую, которая связана с появлением вторичных источников поля внутри области $\Re$ расположения неоднородности (именно вторичные источники создают рассеянное поле).

Мультипольные разложения типа (3) и (4) хорошо известны [1]. В ряде случаев для неоднородностей простых форм коэффициенты $\beta_n^{+}(\vec{x})$ могут быть определены аналитически. К таким неоднородностям относятся, например, однородные цилиндры и сферы, обладающие сдвиговой упругостью [5]; цилиндрические и сферические оболочки и полости внутри жидких и твердых сред [6]. Зависимость $\beta_n^{+}(\vec{x})$ от координаты источника $\vec{x}$ можно описать матрицей рассеяния [7, 8], которая связывает значения $\beta_n^{+}(\vec{x})$ с соответствующими коэффициентами мультипольного разложения падающего поля (2).

Если неоднородность $\Re$ имеет малый волновой размер, некоторая точка $\vec{r}_0 = \vec{0}$ совпадает с началом координат и находится внутри $\Re$, и рассеяние на этой неоднородности носит преимущественно монопольный характер, то выражение (4) будет содержать единственный член: $\varphi_{sc}^{+}(\vec{z},\vec{x}) = -\frac{\phi}{16}H_0^{(1)}(k_0|\vec{x}|)\beta_0^{+}(\vec{x})H_0^{(1)}(k_0|\vec{z}|)$. Падающее поле (2) в точке $\vec{z} = \vec{r}_0 = \vec{0}$ также содержит единственное слагаемое, поскольку $J_n(0) = 0$ при всех $n \neq 0$: $\varphi_0^{+}(\vec{r}_0 = \vec{0},\vec{x}) = -\frac{i}{4}\phi H_0^{(1)}(k_0|\vec{x}|)$. Тогда, с учетом вида функции Грина (1),

$$\varphi_{sc}^{+}(\vec{z},\vec{x}) = G_0(\vec{z})\beta_0^{+}(\vec{x})\varphi_0^{+}(\vec{r}_0 = \vec{0},\vec{x}). \tag{5}$$

Если же точка $\vec{r}_0 \in \Re$ не совпадает с началом координат, то соотношение (5) приобретает вид $\varphi_{sc}^{+}(\vec{z},\vec{x}) = G_0(\vec{z}-\vec{r}_0)\beta_0^{+}(\vec{x}-\vec{r}_0)\varphi_0^{+}(\vec{r}_0,\vec{x})$; именно это соотношение рассматривалось в [9–11].

Суммируя (3) и (4), можно представить полное поле $\varphi^{+}(\vec{z},\vec{x}) = \varphi_0^{+}(\vec{z},\vec{x}) + \varphi_{sc}^{+}(\vec{z},\vec{x})$ как

$$\varphi^{+}(\vec{z},\vec{x}) = -\frac{i\phi}{8}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\theta} H_n^{(1)}(k_0|\vec{x}|)\times \left[\left(1-\frac{i\beta_n^{+}(\vec{x})}{2}\right)H_n^{(1)}(k_0|\vec{z}|) + H_n^{(2)}(k_0|\vec{z}|)\right]; \quad \vec{z}\notin\Re;\ |\vec{z}|<|\vec{x}|; \tag{6}$$

т.е. $\varphi^{+}(\vec{z},\vec{x}) \equiv \varphi_{\rightarrow}^{+}(\vec{z},\vec{x}) + \varphi_{\leftarrow}^{+}(\vec{z},\vec{x})$.

Оно также состоит из "выходящей" $\varphi_{\rightarrow}^{+}(\vec{z},\vec{x})$ и "входящей" $\varphi_{\leftarrow}^{+}(\vec{z},\vec{x})$ составляющих, причем $\varphi_{\leftarrow}^{+}(\vec{z},\vec{x}) = \varphi_{0\leftarrow}^{+}(\vec{z},\vec{x})$.

Поток мощности полного поля по направлению внешней нормали $\vec{n}(\vec{z})$ к окружности Γ определяется выражением $W_\Gamma^{+} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\oint_\Gamma p(\vec{z},\vec{x})\vec{\upsilon}^{*}(\vec{z},\vec{x})\vec{n}(\vec{z})d\Gamma$. Здесь $p(\vec{z},\vec{x}) = i\omega\rho_0\varphi^{+}(\vec{z},\vec{x})$ и $\vec{\upsilon}(\vec{z},\vec{x}) = \nabla\varphi^{+}(\vec{z},\vec{x})$ – поля акустического давления и колебательной скорости на частоте ω; ρ_0 – плотность однородной фоновой среды вне $\Re$; символ "*" означает комплексное сопряжение.

При вычислении произведения $p(\vec{z},\vec{x})\vec{\upsilon}^{*}(\vec{z},\vec{x})\vec{n}(\vec{z})$ на основе выражения (6) нужно учесть следующее. Во-первых, поскольку Γ – окружность, и ее центр совпадает с началом координат, то $\vec{\upsilon}(\vec{z},\vec{x})\vec{n}(\vec{z}) = \partial\varphi^{+}(\vec{z},\vec{x})/\partial|\vec{z}|$. Во-вторых, $|\vec{z}| = \ell_0$, $d\Gamma = \ell_0 d\theta$, и после интегрирования по углу θ в произведении двух сумм будут отличны от нуля лишь члены, соответствующие совпадающим порядкам мультипольности. Поэтому

$$W_\Gamma^{+} = -\pi\omega\rho_0\ell_0\frac{|\phi|^2}{64}\mathrm{Im}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{\left|H_n^{(1)}(k_0|\vec{x}|)\right|^2 \times \left[\left(1+\frac{\beta_n^{+}(\vec{x})}{2i}\right)H_n^{(1)}(k_0\ell_0) + H_n^{(2)}(k_0\ell_0)\right]\times \frac{\partial}{\partial\ell_0}\left[\left(1+\frac{\beta_n^{+}(\vec{x})}{2i}\right)H_n^{(1)}(k_0\ell_0) + H_n^{(2)}(k_0\ell_0)\right]^{*}\right\}.$$

В полученном выражении можно раскрыть квадратные скобки, принимая во внимание, что $\left\{H_n^{(1)}(k_0|\vec{z}|)\right\}^{*} = H_n^{(2)}(k_0|\vec{z}|)$, и отбрасывая возникающий при этом чисто действительный член. Тогда

$$W_{\Gamma}^{+} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\left|1+\frac{\beta_n^{+}(\vec{x})}{2i}\right|^2 W_{0,n,\Gamma\rightarrow}^{+} + W_{0,n,\Gamma\leftarrow}^{+}\right), \qquad (7)$$

где $W_{0,n,\Gamma\rightarrow}^{+} = -\pi\omega\rho_0\ell_0\frac{|\phi|^2}{64}\left|H_n^{(1)}(k_0|\vec{x}|)\right|^2 \times$
$\times \operatorname{Im}\left\{H_n^{(1)}(k_0\ell_0)\frac{\partial H_n^{(2)}(k_0\ell_0)}{\partial\ell_0}\right\}$ и

$$W_{0,n,\Gamma\leftarrow}^{+} = -\pi\omega\rho_0\ell_0\frac{|\phi|^2}{64}\left|H_n^{(1)}(k_0|\vec{x}|)\right|^2 \times \operatorname{Im}\left\{H_n^{(2)}(k_0\ell_0)\frac{\partial H_n^{(1)}(k_0\ell_0)}{\partial\ell_0}\right\}.$$

Здесь $W_{0,n,\Gamma\rightarrow}^{+}$ и $W_{0,n,\Gamma\leftarrow}^{+}$ представляют собой составляющие потока мощности через Γ, которые соответствуют n-му порядку мультипольности для “выходящей” составляющей и “входящей” составляющей падающего поля (3), соответственно. Можно заметить, что $W_{0,n,\Gamma\rightarrow}^{+} = -W_{0,n,\Gamma\leftarrow}^{+}$. Тогда, в итоге,

$$W_{\Gamma}^{+} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} W_{n,\Gamma}^{+}, \quad \text{где} \qquad (8)$$
$$W_{n,\Gamma}^{+} = \left(\left|1+\frac{\beta_n^{+}(\mathbf{x})}{2i}\right|^2 - 1\right) W_{0,n,\Gamma\rightarrow}^{+}.$$

ПАССИВНЫЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНЫЕ НЕОДНОРОДНОСТИ

Рассматриваются пассивные неоднородности, т.е. не содержащие внутренних источников энергии. В таком случае поток мощности полного поля W_{Γ}^{+} может быть либо равен нулю, либо меньше нуля. Эти два типа неоднородностей будут называться непоглощающими (какой поток мощности входит внутрь области, ограниченной контуром Γ, такой и выходит из этой области; поэтому $W_{\Gamma}^{+} = 0$) и поглощающими (выходящий поток меньше входящего из-за поглощения внутри $\mathfrak{R}$, поэтому $W_{\Gamma}^{+} < 0$), соответственно. При этом поглощение может иметь как чисто акустическую природу, так и являться следствием преобразований энергии внутри неоднородности. Такой подход позволяет включить в рассмотрение широкий класс неоднородных сред.

С точки зрения коэффициентов рассеяния, к цилиндрически симметричным следует отнести неоднородности, которые характеризуются условием (при $\vec{r}_0 = \vec{0}$)

$$\beta_n^{+}(\vec{x}) = \beta_n^{+}(|\vec{x}|). \qquad (9)$$

Таким образом, определяющее значение играет расстояние $|\vec{x}|$ до первичного источника, но не направление на него. Следует отметить, что условие (9) выполняется для неоднородностей более широкого класса, чем неоднородности с цилиндрически симметричной конструкцией. Например, оно справедливо для слабоконтрастных неоднородностей малого волнового размера [12]. Для неоднородностей, удовлетворяющих условию (9), и для любой совокупности первичных источников поля, у которых фиксирован $|\vec{x}| = \mathrm{const}$, выполнено соотношение (8), где коэффициенты $\beta_n^{+}(\vec{x}) = \beta_n^{+}$ зависят только от порядка мультипольности n и от $|\vec{x}|$. Выбирая разные совокупности первичных источников, можно создавать падающие поля с произвольной зависимостью $W_{0,n,\Gamma\rightarrow}^{+}$ от n. Это имеет ряд следствий.

Во-первых, поскольку для пассивных неоднородностей $W_{\Gamma}^{+} \le 0$ (причем $W_{\Gamma}^{+} = 0$, если поглощения нет), то, как следует из (8) и условия цилиндрической симметрии неоднородности, для всех n выполнено $\left|1+\frac{\beta_n^{+}}{2i}\right|^2 \le 1$. Это равносильно выражениям

$$\frac{i}{\beta_n^{+}} - \frac{i}{\left(\beta_n^{+}\right)^{*}} \le -\frac{1}{2} \quad \text{или} \quad \operatorname{Im}\left(\frac{1}{\beta_n^{+}}\right) \ge \frac{1}{4}. \qquad (10)$$

Данные условия для неоднородностей малого волнового размера в отсутствие поглощения (тогда в (10) будут строгие равенства) были ранее получены для $n = 0$ [9], а также для $n = \pm 1$ [10]. Вводя, по аналогии с [9], амплитуду $\left|\beta_n^{+}\right|$ и фазу ψ_n коэффициента рассеяния $\beta_n^{+} = \left|\beta_n^{+}\right|\exp(i\psi_n)$, можно получить из (10) их связь в виде $\left|\beta_n^{+}\right| \le -4\sin\psi_n$. Эта связь в отсутствие поглощения ранее обсуждалась в [9–12] и с учетом поглощения для квазиточечных неоднородностей в [13]. Важным ее следствием является ограниченность коэффициента рассеяния и, тем самым, потока мощности поля, рассеянного неоднородностью рассматриваемого типа.

Во-вторых, поток мощности рассеянного поля через Γ равен $W_{sc,\Gamma}^{+} = \frac{1}{2}\operatorname{Re}\oint_{\Gamma} p_{sc}(\vec{z},\vec{x})\vec{\upsilon}_{sc}^{*}(\vec{z},\vec{x})\vec{n}(\vec{z})d\Gamma$. Вычисления, аналогичные предыдущим – однако вместо потенциала (6) используется потенциал (4) — приводят к выражению

$$W^{+}_{sc,\Gamma} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} W^{+}_{sc,n,\Gamma}, \quad \text{где} \quad W^{+}_{sc,n,\Gamma} = \left|\frac{\beta^{+}_{n}}{2i}\right|^{2} W^{+}_{0,n,\Gamma\rightarrow}. \quad (11)$$

Используя амплитуды и фазы каждого коэффициента рассеяния, с помощью соотношений (8) и (11) можно получить выражения для относительной поглощенной мощности $\mathrm{w}^{+}_{ab,n,\Gamma} = -\frac{W^{+}_{n,\Gamma}}{W^{+}_{0,n,\Gamma\rightarrow}} = 1 - \left|1 + \frac{\beta^{+}_{n}}{2i}\right|^{2} = -\frac{1}{4}\left|\beta^{+}_{n}\right|^{2} - \left|\beta^{+}_{n}\right| \sin\psi_{n}$ и относительной рассеянной мощности $\mathrm{w}^{+}_{sc,n,\Gamma} = \frac{W^{+}_{sc,n,\Gamma}}{W^{+}_{0,n,\Gamma\rightarrow}} = \frac{1}{4}\left|\beta^{+}_{n}\right|^{2}$. Эти соотношения, с учетом возможного диапазона $\frac{\left|\beta^{+}_{n}\right|}{4} \le -\sin\psi_{n} \le 1$, приводят к неравенству

$$0 \le \mathrm{w}^{+}_{ab,n,\Gamma} \le 2\sqrt{\mathrm{w}^{+}_{sc,n,\Gamma}} - \mathrm{w}^{+}_{sc,n,\Gamma}. \quad (12)$$

Условие такого типа обсуждалось в [14]. Мощность, поглощенная в неоднородности, с одной стороны, неотрицательна, а с другой стороны — ограничена сверху некоторым предельным значением, однозначно связанным с рассеянной мощностью. Особыми свойствами обладает неоднородность, у которой $\beta^{+}_{n} = -2i$ для всех присутствующих мультипольных компонент n. В этом случае, согласно (6), “выходящее” поле $\varphi^{+}_{\rightarrow}(\vec{z}, \vec{x})$ обращается в ноль, т.е. такая неоднородность является “идеальным” поглотителем. Наоборот, неоднородность, у которой $\beta^{+}_{n} = -4i$, характеризуется максимальной мощностью рассеянного поля; поглощенная мощность при этом равна нулю. Это отвечает наличию резонанса; такие случаи исследовались в [6, 15].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Суммируя все вышесказанное, можно отметить следующее. Рассеяние акустической волны на элементе метаматериала может быть описано с помощью коэффициентов рассеяния $\beta^{+}_{n}(\vec{x})$. Они описывают возникновение рассеянного поля n-го порядка мультипольности в ответ на падающее поле точечного монопольного источника, расположенного в точке $\vec{x}$. Для пассивных неоднородностей, не содержащих внутренних источников, поток мощности поля, идущего изнутри неоднородности, не может превосходить поток, идущий внутрь неоднородности. Если коэффициенты рассеяния не зависят от направления на источник падающего поля, то данное условие на поток оказывается справедливым и для каждой мультипольной компоненты поля в отдельности. Это возможно, если коэффициенты рассеяния не являются произвольными. А именно, если поглощения нет, их значения образуют на комплексной плоскости окружность радиусом 2 с центром в точке $-2i$. В присутствие поглощения значения лежат внутри этой окружности.

Такое ограничение множества значений $\beta^{+}_{n}(|\vec{x}|)$, во-первых, проявляется в виде связи амплитуды и фазы рассеянного поля [9]. Во-вторых, мощность, рассеянная неоднородностью, имеет фиксированное максимальное значение, которое достигается при $\beta^{+}_{n}(|\vec{x}|) = -4i$. Эта ситуация соответствует отсутствию поглощения и проявляется, когда неоднородность резонирует. В-третьих, мощность, поглощенная внутри неоднородности, также ограничена. “Идеальному” поглотителю соответствует $\beta^{+}_{n}(|\vec{x}|) = -2i$. Максимальные значения поглощенной и рассеянной неоднородностью мощностей связаны между собой соотношением (12).

Исследование выполнено при поддержке Российского научного фонда (проект № 19-12-00098).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Шендеров Е.Л.* Излучение и рассеяние звука. Л.: Судостроение, 1989. 304 с.
2. *Godin O.A.* // JASA. 2011. V. 130. No 4. Art. No EL135.
3. *Godin O.A.* // JASA. 2013. V. 133. No 2. P. 709.
4. *Guild M.D., Alù A., Haberman M.R.* // JASA. 2011. V. 129. No 3. P. 1355.
5. *Faran Jr J.J.* // JASA. 1951. V. 23. No 4. P. 405.
6. *Flax L., Gaunaurd G.C., Uberall H.* Theory of resonance scattering. Physical Acoustics. V. 15. N.Y.: Academic, 1981. P. 191.
7. *Waterman P.C.* // JASA. 1969. V. 45. No 6. P. 1417.
8. *Waterman P.C.* // JASA. 1976. V. 60. No 3. P. 567.
9. *Буров В.А., Морозов С.А.* // Акуст. журн. 2001. Т. 47. № 6. С. 751; *Burov V.A., Morozov S.A.* // Acoust. Phys. 2001. V. 47. No 6. P. 659.
10. *Дмитриев К.В.* // Акуст. журн. 2015. Т. 61. № 6. С. 656; *Dmitriev K.V.* // Acoust. Phys. 2015. V. 61. No 6. P. 623.
11. *Бадалян Н.П., Буров В.А., Морозов С.А., Румянцева О.Д.* // Акуст. журн. 2009. Т. 55. № 1. С. 3; *Badalyan N.P., Burov V.A., Morozov S.A., Rumyantseva O.D.* // Acoust. Phys. 2009. V. 55. No 1. P. 1.
12. *Дмитриев К.В.* // Акуст. журн. 2018. Т. 64. № 2. С. 125; *Dmitriev K.V.* // Acoust. Phys. 2018. V. 64. No 2. P. 131.

13. *Дмитриев К.В., Фадеев Е.В., Румянцева О.Д.* // Изв. РАН. Сер. физ. 2020. Т. 84. № 2. С. 266; *Dmitriev K.V., Fadeev E.V., Rumyantseva O.D.* // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2020. V. 84. No 2. P. 210.
14. *Бобровницкий Ю.И.* // Акуст. журн. 2007. Т. 53. № 1. С. 113; *Bobrovnitskii Yu.I.* // Acoust Phys. 2007. V. 53. No 1. P. 100.
15. *Flax L., Dragonette L.R., Überall H.* // JASA. 1978. V. 63. No 3. P. 723.

The relations between phases and amplitudes of multipole components of the acoustic field scattered by discrete inhomogeneities

K. V. Dmitriev*

Lomonosov Moscow State University, Faculty of Physics, Moscow, 119991 Russia

**E-mail: kdmitrie@lanat.ru*

Received July 20, 2020; revised August 28, 2020; accepted September 28, 2020

The acoustic field scattered by an object can be represented as a multipole series. The set of values of every coefficient in this series is limited for objects with cylindrical symmetry in the case of absence of internal energy sources. The relationships between the phases and amplitudes of these coefficients, as well as between the powers of the absorbed and scattered fields are given.