

УДК 535.8

ОСОБЕННОСТИ КОМПЛЕКСНОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ДИФФРАКТАЛЬНЫХ ВОЛНОВЫХ СТРУКТУР

© 2021 г. П. В. Короленко^{1, 2, *}, Р. Т. Кубанов¹, А. Ю. Мишин¹

¹Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
“Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова”, физический факультет, Москва, Россия

²Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Физический институт имени П.Н. Лебедева
Российской академии наук, Москва, Россия

*E-mail: pvkorolenko@rambler.ru

Поступила в редакцию 20.07.2020 г.

После доработки 28.08.2020 г.

Принята к публикации 28.09.2020 г.

Определены амплитудные и фазовые характеристики пространственных спектров волновых пучков, изначальное поле которых описывается комплексными фрактальными функциями. Показано, что наблюдаемая асимметрия спектров и их устойчивость к влиянию шумов могут быть использованы для совершенствования методов оптической диагностики фрактальных образований.

DOI: 10.31857/S036767652101018X

ВВЕДЕНИЕ

С момента выхода в свет работы известного физика-теоретика М. Берри [1] в оптике и физике лазеров сформировалось интенсивно развивающееся научное направление, связанное с исследованием диффракталов — волновых пучков с фрактальной структурой. Подавляющее большинство работ, выполненных по этой теме, посвящено описанию волн, которые приобретают самоподобные свойства после прохождения масок и экранов с фрактальной геометрией. Наиболее часто рассматриваются маски, смоделированные по принципу построения функции Вейерштрасса [2, 3], канторовского множества [4], числовой последовательности Фибоначчи [5], кривых Коха [6] и, а также некоторых других известных фрактальных структур [3]. Они вызывают амплитудную модуляцию поперечной структуры падающей на них плоской волны. Фрактальное возмущение плоского волнового фронта может наблюдаться при отражении излучения от шероховатой поверхности [7]. Результаты этих работ помимо общенаучного имеют и практическое значение. Так, например, кольцевая канторовская пластина позволяет осуществлять многократную фокусировку излучения вдоль оси, а также строить оптические изображения [4]; путем определения фрактальной размерности излучения, диффузно отраженного от поверхно-

сти, можно определять степень ее шероховатости [7]; волны, отраженные от фрактальных объектов, повышают эффективность обработки оптической информации в коре головного мозга [8, 9]. Передача информации с помощью диффракталов позволит улучшить помехозащищенность канала связи, поскольку произвольные части диффрактала содержат почти такую же информацию, как и вся распространяющаяся волна. Данные о процессах формирования и распространения амплитудных диффракталов существенно дополнили работы по их генерации непосредственно в лазерных системах [10].

Значительно меньше сведений содержится в литературе о трансформации структуры световых пучков при их прохождении через фрактальные объекты, которые одновременно вызывают модуляцию амплитуды и фазы волны. В роли таких объектов могут выступать тонкие срезы биотканей [11]. Фрактальный анализ спекл-полей прошедшего их лазерного излучения позволяет выявлять ткани со злокачественными образованиями. Для аналитического описания структуры такого рода объектов следует использовать комплексные функции. Это отличает их от фрактальных элементов, вызывающих лишь амплитудную модуляцию и описываемых действительными функциями.

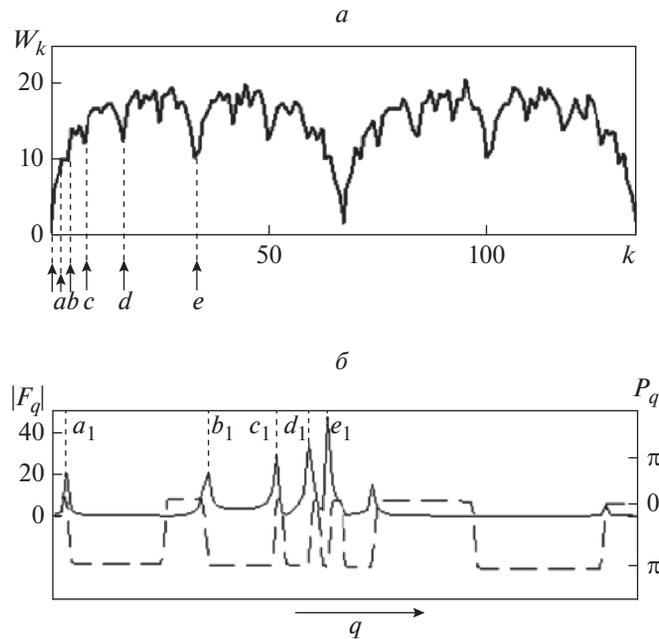


Рис. 1. Графики функции W_k (а) и коэффициентов Фурье F_q (б). Непрерывная кривая на рис. 1б – модуль $|F_q|$, пунктир – фаза $P_q = \arg(F_q)$. Величины W_k и $|F_q|$ представлены в относительных единицах, q – пространственная частота.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И МЕТОД ЕЕ РЕШЕНИЯ

Цель данной работы состоит в определении основных закономерностей, определяющих формирование диффракталов структурами, вызывающими изменение распределений амплитуды и фазы зондирующих пучков.

Рассматриваемые процессы анализируются в контексте важнейшей для фрактальной оптики проблемы о взаимной связи структуры объекта и его фурье-образа [2]. Особое внимание уделено оценке скейлинговых характеристик фрактальных и фракталоподобных объектов и их пространственных спектров. От решения данной группы вопросов во многом зависит совершенствование способов оптической диагностики структуры фрактальных образований [7] и улучшение методов контроля качества и функциональных возможностей оптических элементов [12].

Основная часть расчетов по оценке взаимосвязи фрактальных признаков структур, описываемых комплексными функциями, со спектральными характеристиками выполнялась с использованием функции Мандельброта–Вейерштрасса (М–В). В литературе получили освещение как ее математические характеристики

(см, например, [13, 14]), так и многочисленные практические приложения. К последним следует отнести описание турбулентных течений [15], создание модели термического контакта шероховатых поверхностей [16], оценку микроускорений [17].

ОДНОМЕРНАЯ СТРУКТУРА

Используя в качестве образующей функции функцию М–В [13], можно построить одномерную диффрактальную структуру. Ее поперечное поле будет иметь вид

$$w_k = \sigma \sum_{n=-N}^N \frac{(1 - e^{ib^nsk})e^{i\psi(n)}}{b^{(2-D)n}}, \quad (1)$$

где D характеризует фрактальную размерность; b, s – масштабирующие параметры; σ – нормировочный множитель; $2N + 1$ – количество слагаемых в формуле (1); $\psi(n)$ – фазы (в общем случае случайные) входящих в выражение (1) гармоник; k – номер значащей точки при цифровом представлении функции, $i = \sqrt{-1}$. Зависимость $W_k = |w_k|$ и фурье спектр функции w_k графически представлены на рис. 1а, 1б. Использовались следующие значения параметров: $D = 1.65$, $b = 2$, $s = 4$, $\sigma = 1$,

$N = 5$; $\psi(n)$ случайным образом меняется в пределах от 0 до $\pi/8$.

При используемом целочисленном значении параметра $b = 2$ зависимость W_k носит периодический характер (рис. 1а). Величина параметра b определяет также коэффициент скейлинга ζ анализируемых зависимостей. Об этом свидетельствует отношение длин показанных на рисунках отрезков, ограничивающих размеры подобных фрагментов на графиках. Это отношение $(0b/0a, 0c/0b, 0d/0c, 0e/0d)$, равное коэффициенту скейлинга ζ , с хорошей точностью совпадает со значением параметра b ($\zeta = b = 2$). Примечательно, что спектр функции w_k имеет несимметричный спектр. Это объясняется соотношением ее действительной и мнимой частей, которые имеют различную четность. Отметим, что действительные функции таким свойством не обладают – их спектры симметричны относительно нуля.

Рисунок 1б указывает на соответствие амплитудной и фазовой частей фурье-спектра функции М–В. Из представленных графиков видно, что амплитудные максимумы соответствуют крайним фазовым дислокациям с резкими перепадами значений фазы на величину π . Тем самым скейлинг находит непосредственное проявление в амплитудной и фазовой компонентах спектра. Указанное свойство скейлинга, как показывают расчеты, наблюдается и при детерминированном и при случайном задании фаз $\psi(n)$.

Также было проанализировано влияние мнимой части функции М–В на структуру амплитудного фурье-спектра. Варьирование мнимой части функции производилось путем ее умножения на коэффициент K , который изменялся в диапазоне от 0 до 1. Далее рассчитывался коэффициент асимметрии A , представляющий отношение площадей части фурье-образа функции М–В, располагающейся в отрицательной области, к части фурье-образа в области положительных частот. Исследование показало, что мнимая часть вносит существенную асимметрию в фурье-образ, а именно: чем значительнее относительная величина мнимой части, тем выше асимметрия фурье-спектра. Так, изменение коэффициента K в пределах от 0 до 1 приводит к примерно линейному увеличению коэффициенту асимметрии A от 0 до 1.8. Поскольку отношение мнимой и действительной частей образующей функции определяет уровень изначальных фазовых возмущений, выполненный расчет позволяет связать с ним легко регистрируемую в эксперименте величину A .

Была исследована устойчивость пространственных спектров к влиянию оптических шумов, возникающих в процессе фурье-преобразования изначальной структуры. Уровень шумов зависел от диапазона изменения случайной фазы $\psi(n)$. Когда $\psi(n)$ меняется в интервале от 0 до $\pi/50$ шумовые всплески являются пренебрежимо малыми по сравнению с пиками спектральных линий, если же значения фазы варьируются в интервале от 0 до π , то уровень шумов оказывается сопоставимым с уровнем сигнала. Но даже в последнем случае коэффициент корреляции Cr формы фурье-спектра с той, которая соответствует малым шумам имеет величину $Cr = 0.92$. Столь значимая величина коэффициента корреляции доказывает высокую степень стабильности спектральных характеристик рассматриваемых фрактальных объектов.

СТРУКТУРА НА ОСНОВЕ ДВУМЕРНОЙ ОБРАЗУЮЩЕЙ ФУНКЦИИ

Двумерное поперечное поле диффракталя задавалось с помощью модернизированной функции М–В, имеющей вид

$$w_{k,m} = \sigma \sum_{\nu=0}^V \sum_{n=-N}^N \frac{[1 - e^{ib^n s(k \cos(\alpha\nu) + m(\sin(\alpha\nu))}] e^{i\psi(n)}}{b^{(2-D)n}}, \quad (2)$$

где k, m – номера значащих точек по поперечным координатам; D характеризует фрактальную размерность; V – полное число азимутальных поворотов системы координат, ν – номер отдельного поворота, α – его величина.

На рис. 2а, 2б показаны амплитуда $W_{k,m} = |w_{k,m}|$ и фаза $\Phi_{k,m} = \arg(w_{k,m})$ распределения (1). Расчет проводился для следующих значений параметров: $N = 5$; $s = 3$; $\nu = 8$; $K = 127$; $b = 2$; $n = -N, -N + 1 \dots N$; $\alpha = \pi/8$; $k = -K \dots K$; $D = 1.65$; $m = -K \dots K$. Из рисунка видно, что наиболее значительные максимумы представленных распределений располагаются по окружностям. Отношение радиусов этих окружностей, определяющее величину коэффициента скейлинга, равно коэффициенту $b = 2$.

Пространственные спектры функции $w_{k,m}$, характеризующие распределение поля в дальней зоне, графически представлены на рис. 2в, 2г. Для их расчета использовалась процедура БПФ. На рис. 2в показана амплитуда коэффициентов Фурье ($|F_{p,q}|$), а на рис. 2г – их фаза ($P_{p,q} = \arg(F_{p,q})$). Видно, что спектры в отличие от изображений не обладают центральной сим-

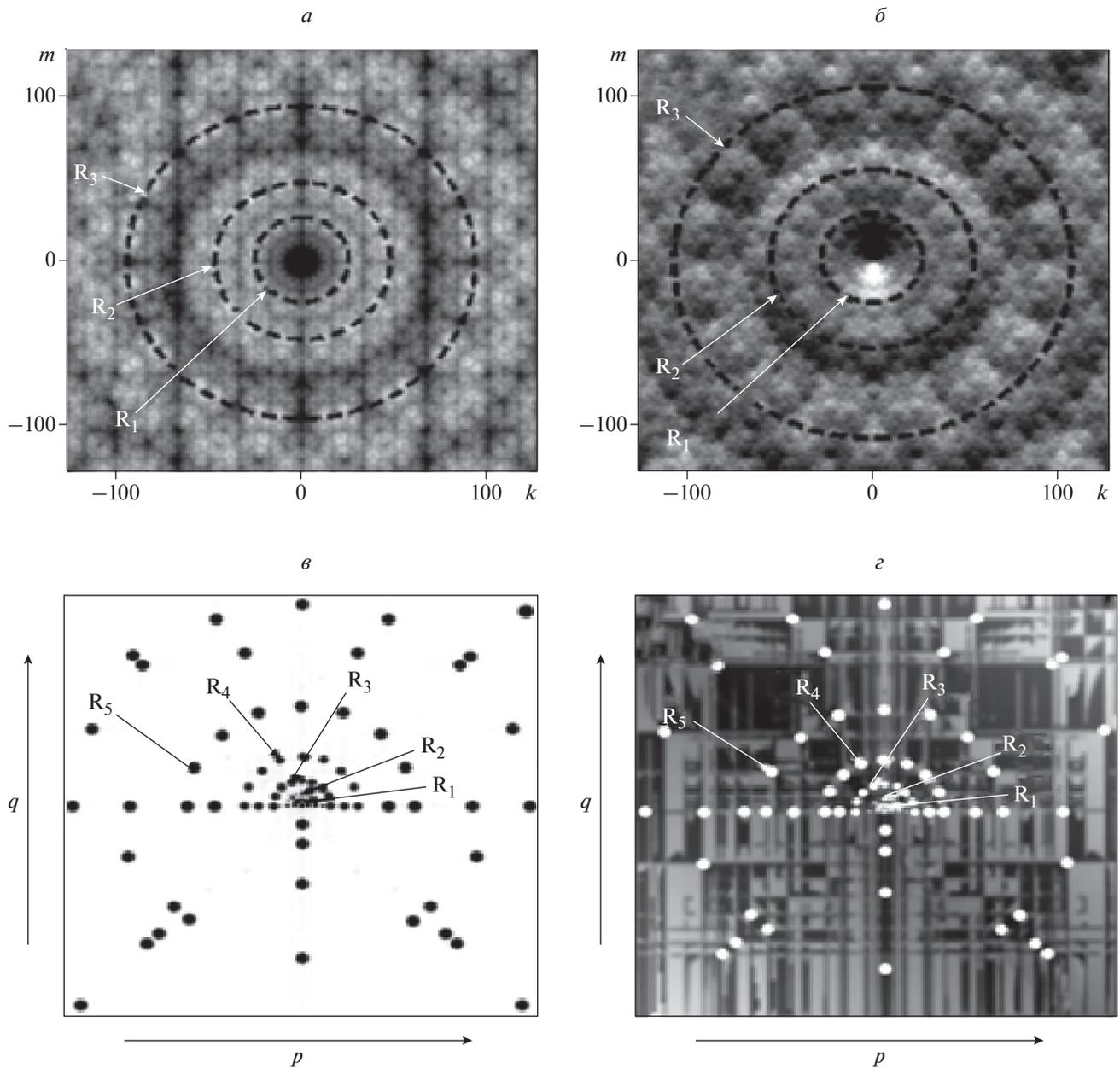


Рис. 2. Распределение амплитуды $W_{k,m}$ (а) и фазы $\Phi_{k,m}$ (б) световых колебаний в изначальной структуре и ее коэффициенты Фурье, представленные по амплитуде $|F_{p,q}|$ (в) и фазе $P_{p,q}$ (г).

метрий. Амплитудным спектрам присуща асимметрия с точки зрения расположения спектральных максимумов. В той части спектра, где максимумы проявляются наиболее четко, они располагаются по окружностям, размеры которых соотносятся как радиусы расположения максимумов на изначальном распределении амплитуды и фазы (рис. 2а, 2б). Структура спектра по фазе не характеризуется дискретными макси-

мумами. Она включает систему фрагментов прямоугольной формы, на границах которых фаза испытывает резкие изменения на величину π . Примечательно, что пространственные частоты, определяющие положение амплитудных максимумов, соответствуют положению углов прямоугольных сегментов. Это означает, что амплитудные максимумы располагаются в точках винтовых фазовых дислокаций, где фаза в двух

взаимно перпендикулярных направлениях меняется на π . Для иллюстрации указанного факта на рис. 2г осуществлено наложение амплитудной и фазовой частей фурье-образа.

Не всегда скейлиновые характеристики распределения амплитуды в поле диффрактала и в его спектре соответствуют друг другу. Нарушить это соответствие можно, усложнив изначальную структуру, путем изменения фазовых соотношений между парциальными волнами. Например, заменить в выражении (2) случайную фазу $\psi(n)$, зависящую только от параметра n , на случайную фазу $\psi(n, \nu)$, зависящую от параметров n и ν . Модифицированное таким образом распределение $W_{k,m}$ приобретает спеклоподобный вид. Однако, несмотря на его неупорядоченный характер поля, его пространственный спектр не претерпевает сколь-нибудь существенных изменений по сравнению со спектром, показанном на рис. 2в. Это указывает на то, что фрактальными спектрами с определенным значением коэффициента скейлинга могут обладать изображения, не обладающие в явном виде самоподобными фрагментами.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Свойства диффракталов, задаваемых множеством комплексных чисел, заметным образом углубляют и расширяют представления о взаимной связи амплитудно-фазовых характеристик и пространственных спектров излучения. Как показало проведенное рассмотрение, отличительная черта спектрального анализа таких волновых структур состоит в возможности увеличить диапазон получаемой информации за счет параллельной обработки данных о распределении амплитуды и фазы. При получении и обработке этой информации следует считаться с тем, что в отдельных случаях будет нарушаться прямая связь между пространственными и спектральными характеристиками излучения. Положительный момент с точки зрения практических приложений состоит в высокой устойчивости фурье-спектров диффракталов к влиянию различного рода оптических шумов. К важным особенностям структуры фурье-спектров следует отнести обнаруженный факт совпадения амплитудных максимумов с точками фазовых сингулярностей. Регистрируемая степень асимметрии структуры фурье-образа из-за присутствия мнимой составляющей в распределении изначального светового поля может быть использована

при оценке уровня фазовых возмущений в плоскости объекта.

Работа поддержана РФФИ (проект № 19-02-00540).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Berry M.V.* // J Phys A. 1979. V. 12. No 6. P. 781.
2. *Короленко П.В., Аверченко А.В., Конопальцева Н.Ю., Мишин А.Ю.* // Изв. РАН. Сер. физ. 2018. Т. 82. № 11. С. 1520; *Averchenko A.V., Konopaltseva N.Yu., Korolenko P.V., Mishin A.Yu.* // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2018. V. 82. No 11. P. 1383.
3. *Зотов А.М., Короленко П.В., Мишин А.Ю., Рыжикова Ю.В.* // Вест. МГУ. Физ. астр. 2019. № 6. С. 51; *Zotov A.M., Korolenko P.V., Mishin A.Y., Ryzhikova Y.V.* // Moscow Univ. Phys. Bull. 2019. V. 74. No 6. P. 625.
4. *Gimenez F., Monsoriu J.A., Furlan W.D., Pons A.* // Opt. Expr. 2006. V. 14. No 25. Art. No 11958.
5. *Грушина Н.В., Короленко П.В., Маркова С.Н.* // Вест. МГУ. Физ. астр. 2008. № 2. С. 40; *Grushina N.V., Korolenko P.V., Markova S.N.* // Moscow Univ. Phys. Bull. 2008. V. 63. No 2. P. 123.
6. *Horvath P., Smidt P., Vaskova I., Hrabovsky M.* // Optik. 2010. V. 121. No 2. P. 206.
7. *Moocarme M., Vuong L.T.* // Opt. Expr. 2015. V. 23. No 22. Art. No 28471.
8. *Musel B., Bordier C., Dojat M. et al.* // J. Cogn. Neurosci. 2013. No 8. P. 1315.
9. *Korolenko P.V.* // Proc. of the Scientific research of the SCO countries: synergy and integration. Part 2. Beijing: Infinity, 2020. P. 160.
10. *Sroor H., Naidoo D., Miller S.W. et al.* // Phys. Rev. A. 2019. V. 99. Art. No 013848.
11. *Ульянов А.С.* // Квант. электрон. 2008. Т. 38. № 6. С. 557; *Ulyanov A.S.* // Quant. Electron. 2008. V. 38. No 6. P. 557.
12. *Liu Y.J., Dai H.T., Sun X.W., Huang T.J.* // Opt. Expr. 2009. V. 17. No 15. Art. No 12418.
13. *Mandelbrot B.B.* The fractal geometry of nature. N.Y.: W.H. Freeman and Company, 1977. 480 p.
14. *Zaleski A.* // Rose-Hulman Undergrad. Math. J. 2012. V. 13. No 2. P. 80.
15. *Ausloos M., Berman D.H.* // Proc. R. Soc. Lond. 1985. P. 331.
16. *Humphrey A.C., Schuler C.A., Rubinsky B.* // Fluid Dyn. Res. 1992. V. 9. No 1–3. P. 81.
17. *Jiang S., Zheng Y.* // J. Mech. Engin. Sci. 2010. V. 224. No 4. P. 757.

Features of the complex representation of diffractal wave structures**P. V. Korolenko^{a, b, *}, R. T. Kubanov^a, A. Yu. Mishin^a**^a*Lomonosov Moscow State University, Faculty of Physics, Moscow, 119991 Russia*^b*Lebedev Physical Institute, Russian Academy of Sciences, Moscow, 119991 Russia***E-mail: pvkorolenko@rambler.ru*

Received July 20, 2020; revised August 28, 2020; accepted September 28, 2020

The amplitude and spectral characteristics of wave beams are determined, the initial field of which is described by complex fractal functions. It is shown that the observed asymmetry of the spectra and their resistance to the influence of noise can be used to improve the methods of optical diagnostics of fractal formations.