

УДК 537.61

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ НЕОДНОРОДНОГО ПОСТОЯННОГО МАГНИТА, СОСТОЯЩЕГО ИЗ РЕШЕТКИ МАГНИТОЖЕСТКИХ ПОЛОСОК, С МАССИВНОЙ ФЕРРОМАГНИТНОЙ СРЕДОЙ

© 2021 г. М. А. Пятаков¹, М. Л. Акимов¹, *, П. А. Поляков¹

¹Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования “Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова”, Москва, Россия

*E-mail: ml.akimov@physics.msu.ru

Поступила в редакцию 21.06.2021 г.

После доработки 05.07.2021 г.

Принята к публикации 28.07.2021 г.

Разработана теория и получена общая аналитическая формула для силы взаимодействия решетки из намагниченных полосок с произвольными параметрами. Сделан анализ закономерности силы взаимодействия магнитной решетки с массивным ферромагнетиком в зависимости от толщины, ширины полоски и расстояния от решетки до ферромагнетика в самом общем случае.

DOI: 10.31857/S0367676521110314

ВВЕДЕНИЕ

Исследование постоянных магнитов актуально, и обусловлено необходимостью выявления закономерностей их взаимодействий с материалами, а также технологическими вопросами практического использования [1]. Проводятся исследования того, как размер, форма, поперечное сечение магнита влияют на характеристики магнитного поля и эффективность его применения в технике [2–4]. Выбор электродвигателя с требуемыми характеристиками может повысить быстродействие, следовательно, и производительность всей силовой установки. В технике зачастую применяются многослойные тонкие магниты – пленочные материалы, имеющие слоистую структуру [2, 5].

Цель данной работы заключается в анализе пондеромоторной силы взаимодействия тонких пленочных постоянных магнитов с массивным ферромагнетиком в зависимости от различных параметров. Это является важным для увеличения оптимальной силы взаимодействия существующих неоднородных магнитных материалов. В статье [6] проведены подобные исследования в дальнем приближении, что накладывает дополнительные ограничения на характеристики системы. В работе исследования проводятся методом изображений, разрабатывается общая теория и выводится общая аналитическая формула для силы взаимодействия решетки из намагниченных полосок с произвольными параметрами.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Возьмем отдельную полоску (см. рис. 1), которая однородно намагничена перпендикулярно ее верхней плоскости. Пусть вектор намагниченности \vec{M} , тогда магнитное поле, которое порождается данным однородным распределением намагниченности, эквивалентно магнитному полю от эффективных молекулярных токов с поверхностной плотностью $J = |\vec{M}|$, которые циркулируют по боковым граням полоски [7].

Полоски бесконечно длинные, поэтому влиянием молекулярных токов от граней 2 и 4 (рис. 1) пренебрегаем. Согласно методу изображений рассматривается взаимодействие двух решеток – полосок и их магнитостатических изображений – относительно плоской границы поверхности ферро-

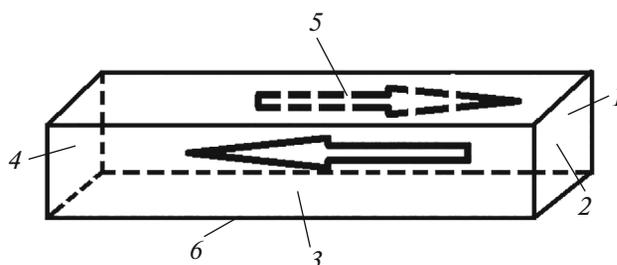


Рис. 1. Токи Ампера на поверхности пленочного материала.

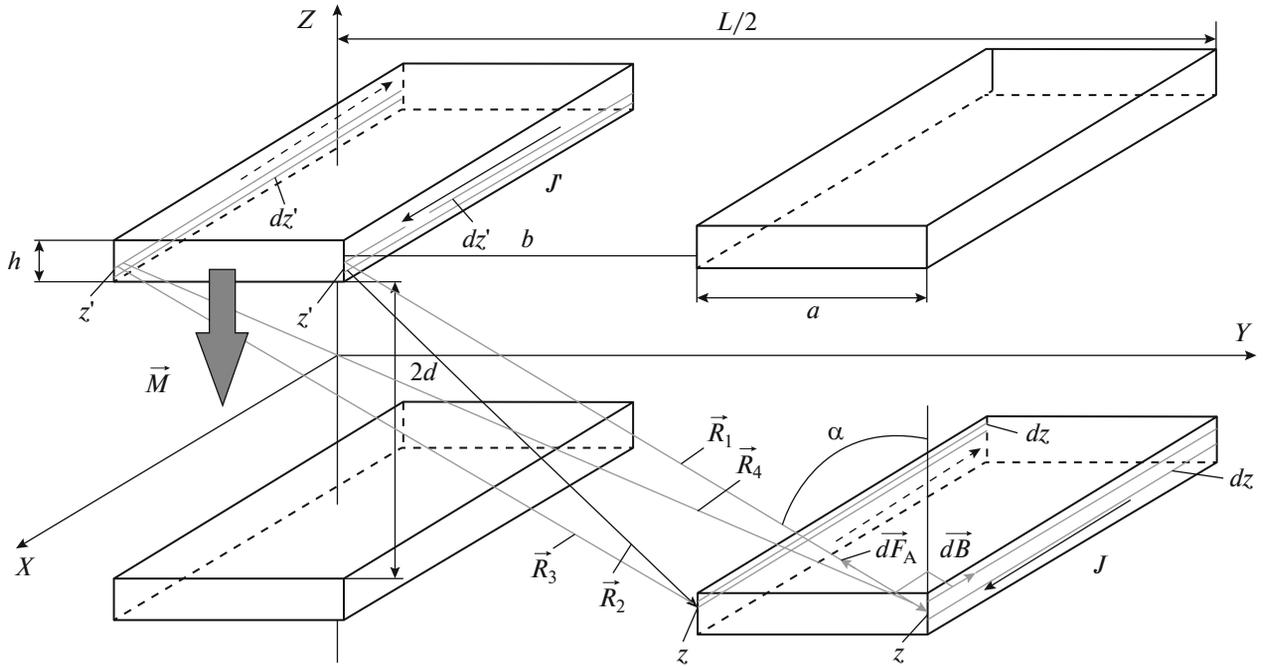


Рис. 2. Система из двух решеток.

магнетика (листа). На рис. 2 отражены параметры системы: характерный размер равен L (справа и слева от вертикали $L/2$), расстояние между решетками составляет $2d$, ширина каждой полоски равна a , толщина — h , расстояние между соседними полосками — b , количество пленок по одну сторону от вертикали равно N (всего $2N + 1$). Центральной полоске присваивается нулевой номер, и рассматривается сила, с которой решетка полосок притягивает решетку изображений.

Величину индукции dB магнитного поля линейного тока узкой полоски ширины dz' на расстоянии R легко получить, используя теорему о циркуляции [7]:

$$dB = \frac{\mu_0 J' dz'}{2\pi R}, \quad (1)$$

где $J' = J = M$. Тогда выражение для силы взаимодействия Ампера двух линейных токов шириной dz' и dz имеет вид

$$dF_A = J dz dB = \frac{\mu_0 M^2 dz dz'}{2\pi R}, \quad (2)$$

а для проекции на вертикальную ось z силы в соответствии с формулой (2) получим (“±” перед формулой определяет знак проекции, см. рис. 2)

$$\begin{aligned} dF_{Az} &= \pm dF_A \cos \alpha = \pm dF_A \frac{|z' - z|}{R} \\ &= \pm \frac{\mu_0 M^2 dz' dz |z' - z|}{2\pi R R}. \end{aligned} \quad (3)$$

Если рассмотреть взаимодействие четырех линейных токов, текущих по боковым граням двух полосок (рис. 2), принимая во внимание (3), мы можем получить суммарную проекцию силы Ампера со стороны полоски, расположенной вдоль оси x (нулевой полоски), на изображение под номером n . Получим формулу (4):

$$\begin{aligned} F_{Az0,n} &= \frac{\mu_0 M^2}{2\pi} a \int_0^{C_3} dt_1 \int_0^{C_3} dt_2 \times \\ &\times \left[2 \frac{t_1 + t_2 + C_1}{(nC_2)^2 + (t_1 + t_2 + C_1)^2} - \right. \\ &- \frac{t_1 + t_2 + C_1}{(nC_2 - 1)^2 + (t_1 + t_2 + C_1)^2} - \\ &\left. - \frac{t_1 + t_2 + C_1}{(nC_2 + 1)^2 + (t_1 + t_2 + C_1)^2} \right], \end{aligned} \quad (4)$$

где выполнена замена $t_1 = \frac{z' - d}{a}$, $t_2 = \frac{-z - d}{a}$, $C_1 = \frac{2d}{a}$,

$$C_2 = 1 + \frac{b}{a}, C_3 = \frac{h}{a}.$$

РЕЗУЛЬТАТЫ

Путем прямого взятия двойных интегралов, фигурирующих в (4), получено общее выражение для безразмерной поверхностной плотности z -компоненты силы взаимодействия нулевой полоски с изображениями всех полосок $F_{Az0,\Sigma}$ безразмерная, на ед. площади:

$$\begin{aligned}
F_{Az0,\Sigma}^{\text{безразмерная, на ед. площади}} \cdot 2 \frac{a}{\pi(a+b)} &= 2 \frac{a}{\pi(a+b)} \sum_{n=1}^N \left\{ C_3 \ln \left[\frac{(C_1 + 2C_3)^2 + n^2 C_2^2}{(C_1 + C_3)^2 + n^2 C_2^2} \right] + \right. \\
&+ (C_1 + C_3) \ln \left[\frac{(C_1 + 2C_3)^2 + n^2 C_2^2}{(C_1 + C_3)^2 + n^2 C_2^2} \right] + 2nC_2 \operatorname{arctg} \left[\frac{C_1 + 2C_3}{nC_2} \right] - 2nC_2 \times \\
&\times \operatorname{arctg} \left[\frac{C_1 + C_3}{nC_2} \right] - 2nC_2 \operatorname{arctg} \left[\frac{C_1 + C_3}{nC_2} \right] + 2nC_2 \operatorname{arctg} \left[\frac{C_1}{nC_2} \right] - C_1 \times \\
&\times \ln \left[\frac{(C_1 + C_3)^2 + n^2 C_2^2}{C_1^2 + n^2 C_2^2} \right] - \frac{1}{2} C_3 \ln \left[\frac{(C_1 + 2C_3)^2 + (nC_2 + 1)^2}{(C_1 + C_3)^2 + (nC_2 + 1)^2} \right] - \frac{1}{2} (C_1 + C_3) \times \\
&\times \ln \left[\frac{(C_1 + 2C_3)^2 + (nC_2 + 1)^2}{(C_1 + C_3)^2 + (nC_2 + 1)^2} \right] - (nC_2 + 1) \operatorname{arctg} \left[\frac{C_1 + 2C_3}{nC_2 + 1} \right] + 2(nC_2 + 1) \operatorname{arctg} \left[\frac{C_1 + C_3}{nC_2 + 1} \right] - \\
&- (nC_2 + 1) \operatorname{arctg} \left[\frac{C_1}{nC_2 + 1} \right] + \frac{1}{2} C_1 \ln \left[\frac{(C_1 + C_3)^2 + (nC_2 + 1)^2}{C_1^2 + (nC_2 + 1)^2} \right] - \\
&- \frac{1}{2} C_3 \ln \left[\frac{(C_1 + 2C_3)^2 + (nC_2 - 1)^2}{(C_1 + C_3)^2 + (nC_2 - 1)^2} \right] - \frac{1}{2} (C_1 + C_3) \ln \left[\frac{(C_1 + 2C_3)^2 + (nC_2 - 1)^2}{(C_1 + C_3)^2 + (nC_2 - 1)^2} \right] - \\
&- (C_1 + C_3) \ln \left[\frac{C_1 + C_3}{C_1} \right] + (C_1 + 2C_3) \ln \left(\frac{C_1 + 2C_3}{C_1 + C_3} \right) - \frac{1}{2} C_3 \ln \left[\frac{(C_1 + 2C_3)^2 + 1}{(C_1 + C_3)^2 + 1} \right] - \\
&- \frac{1}{2} (C_1 + C_3) \ln \left[\frac{(C_1 + 2C_3)^2 + 1}{(C_1 + C_3)^2 + 1} \right] - \operatorname{arctg} [C_1 + 2C_3] + 2 \operatorname{arctg} [C_1 + C_3] - \\
&- \operatorname{arctg} [C_1] + \frac{1}{2} C_1 \ln \left[\frac{(C_1 + C_3)^2 + 1}{C_1^2 + 1} \right].
\end{aligned} \tag{5}$$

Множитель перед суммой в (5) представим следующим образом:

$$2 \frac{a}{\pi(a+b)} = \frac{2}{\pi \left(1 + \frac{b}{a}\right)} = \frac{2}{\pi(1+C_0)}, \quad C_0 \equiv \frac{b}{a}. \tag{6}$$

По формуле (5) с учетом (6) построены зависимости поверхностной плотности силы от параметров системы. Рассмотрим следующие случаи. Пусть

$$\begin{aligned}
a &= 1 \text{ мм} = 10^{-3} \text{ м}, \quad d = h = 1 \text{ мкм} = 10^{-6} \text{ м}, \\
0 \leq C_0 &\leq 0.1, \quad C_1 = 2 \frac{d}{a} = 0.002, \quad C_3 = \frac{h}{a} = 0.001.
\end{aligned} \tag{7}$$

Зависимость показана на рис. 3а. Безразмерное и размерное значения максимума силы, а также расстояние между полосками, при котором реализуется максимум, оказались следующими:

$$\begin{aligned}
F_{Az0,\Sigma}^{\text{безразмерная, на ед. площади, max}} &\approx 0.00021, \\
C_0 &\approx 0.026,
\end{aligned} \tag{8}$$

$$F_{Az0,\Sigma}^{\text{безразмерная, на ед. площади, max}} \cdot \frac{2}{\pi(1+C_0)} \cdot \frac{\mu_0 M^2}{2} \approx 140 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}.$$

Пусть теперь параметры системы

$$\begin{aligned}
a &= 1 \text{ мм} = 10^{-3} \text{ м}, \quad d = h = 100 \text{ мкм} = 10^{-4} \text{ м}, \\
0 \leq C_0 &\leq 10, \quad C_1 = 2 \frac{d}{a} = 0.2, \quad C_3 = \frac{h}{a} = 0.1.
\end{aligned} \tag{9}$$

Соответствующая зависимость показана на рис. 3б.

Безразмерное и размерное значения максимума силы, а также расстояние между полосками, при котором реализуется максимум, оказались теперь такими:

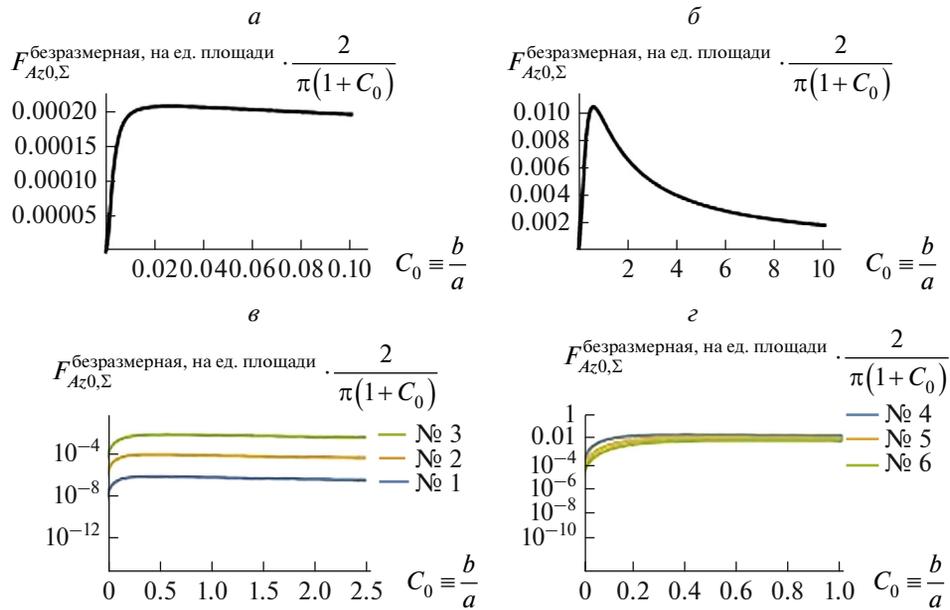


Рис. 3. Зависимость безразмерной z-компоненты силы взаимодействия нулевой полоски со всеми изображениями, приходящейся на единицу площади, при различных значениях параметров.

$$\begin{aligned}
 F_{Az0,\Sigma}^{\text{безразмерная, на ед. площади, max}} &\approx 0.010, \quad C_0 \approx 0.6, \\
 F_{Az0,\Sigma}^{\text{безразмерная, на ед. площади, max}} \cdot \frac{2}{\pi(1+C_0)} \cdot \frac{\mu_0 M^2}{2} &\approx 7009 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}.
 \end{aligned} \tag{10}$$

Таким образом, при увеличении расстояния до ферромагнетика и толщины полоски в 100 раз, наблюдается увеличение силы в 50 раз. Оптимальным набором параметров системы среди представленных двух является тот, в котором расстояние до ферромагнетика d и толщина полоски h (для рассмотренных случаев равная d) будут наибольшими.

Пусть изменяется только толщина полоски h , принимая значения 1, 10 и 100 мкм (наборы № 1, № 2 и № 3, см. ниже), то есть варьируется константа C_3 при фиксированной C_1 . Зададим остальные параметры системы как

$$\begin{aligned}
 a &= 1 \text{ мм} = 10^{-3} \text{ м}, \quad d = 100 \text{ мкм} = 10^{-4} \text{ м}, \\
 0 \leq C_0 \leq 2.5, \quad C_1 &= 2 \frac{d}{a} = 0.2, \quad 0 \leq C_0 \leq 2.5, \\
 C_1 &= 2 \frac{d}{a} = 0.2.
 \end{aligned} \tag{11}$$

Соответствующие зависимости построены в логарифмическом масштабе в одной системе координат (см. рис. 3в).

Значения C_0 , реализующие максимум, и максимальные размерные значения силы также найдены (наборы значений 1–3).

$$\begin{aligned}
 &\text{№ 1} \qquad \qquad \qquad \text{№ 2} \qquad \qquad \qquad \text{№ 3} \\
 &\left\{ \begin{array}{l} C_1 = 0.2, \quad C_3 = 0.001, \\ C_0 = 0.458441 \approx 0.5, \\ F_{Az0,\Sigma} \approx 1.2 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}; \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} C_1 = 0.2, \quad C_3 = 0.01, \\ C_0 = 0.470434 \approx 0.5, \\ F_{Az0,\Sigma} \approx 114 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}; \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} C_1 = 0.2, \quad C_3 = 0.1, \\ C_0 = 0.591241 \approx 0.6, \\ F_{Az0,\Sigma} \approx 7009 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}. \end{array} \right. \tag{12}
 \end{aligned}$$

Видно, что при увеличении толщины полоски поверхностная плотность силы увеличивается, и, если сравнивать наборы параметров № 1 и № 3, то

силы отличаются в 5841 раз. Причем оптимальное значение C_0 увеличивается, хотя и незначительно, для наборов параметров (12).

Теперь пусть изменяется только расстояние до ферромагнетика d , принимая значения 40, 80 и 120 мкм (наборы параметров имеют номера соответственно 4, 5 и 6, см. ниже), то есть сейчас варьируется константа C_1 при фиксированной C_3 . Зададим остальные параметры системы как

$$a = 1 \text{ мм} = 10^{-3} \text{ м}, \quad h = 100 \text{ мкм} = 10^{-4} \text{ м},$$

$$0 \leq C_0 \leq 1, \quad C_3 = \frac{h}{a} = 0.1. \quad (13)$$

Соответствующие зависимости в логарифмическом масштабе показаны на рис. 3г. Здесь по аналогии с (12) имеем:

№ 4	№ 5	№ 6	
$\left\{ \begin{array}{l} C_1 = 8 \cdot 10^{-2}, \quad C_3 = 0.1, \\ C_0 = 0.405099 \approx 0.4, \\ F_{Az0,\Sigma} \approx 15029 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}; \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} C_1 = 16 \cdot 10^{-2}, \quad C_3 = 0.1, \\ C_0 = 0.532976 \approx 0.5, \\ F_{Az0,\Sigma} \approx 8715 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}; \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} C_1 = 24 \cdot 10^{-2}, \quad C_3 = 0.1, \\ C_0 = 0.647072 \approx 0.6, \\ F_{Az0,\Sigma} \approx 5761 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}. \end{array} \right.$	(15)

Как видно, с увеличением расстояния до ферромагнетика d сила уменьшается, а оптимальное значение C_0 увеличивается.

В целом вид зависимости для всех рассмотренных случаев не изменяется: рост поверхностной плотности силы наблюдается только до определенного оптимального значения C_0 . Экстремум всегда сохраняется.

Таким образом, разработана теория и получена общая аналитическая формула для силы взаимодействия решетки из намагниченных полосок с произвольными параметрами. В рамках данной теории проанализированы закономерности силы взаимодействия магнитной решетки с массивным ферромагнетиком в зависимости от толщины, ширины полоски и расстояния от решетки до ферромагнетика в самом общем случае.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Sander D., Valenzuela S.O., Makarov D. et al. // J. Phys. D. 2017. V. 50. No. 36. Art. No. 363001.
2. Shimizu Y., Morimoto S., Sanada M., Inoue Y. // IEEE J. Ind. Appl. 2017. V. 6. No. 6. P. 401.
3. Huber C., Abert C., Bruckner F. et al. // Appl. Phys. Lett. 2016. V. 109. No. 16. Art. No. 162401.
4. Luu P.T., Lee J.-Y., Kim J.-W. et al. // J. Eng. Technol. 2018. V. 13. No. 6. P. 2329.
5. Zhou M., Zhang X., Zhao W. et al. // Chin. J. Electr. Eng. 2019. V. 5. No. 4. P. 40.
6. Пятаков М.А., Поляков П.А., Русакова Н.Е. // Изв. РАН. Сер. физ. 2020. Т. 84. № 5. С. 719; Piatakov M.A., Polyakov P.A., Rusakova N.E. // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2020. V. 84. No. 5. P. 593.
7. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1992. 664 с.

Interaction of an inhomogeneous permanent magnet consisting of a lattice of magnetically rigid strips with a massive ferromagnetic medium

M. A. Piatakov^a, M. L. Akimov^{a,*}, P. A. Polyakov^a

^aLomonosov Moscow State University, Faculty of Physics, Chair of General Physics, Moscow, 119991 Russia

*e-mail: ml.akimov@physics.msu.ru

A theory is developed, and a general analytical formula is obtained for the interaction force of a lattice of magnetized strips with arbitrary parameters. The analysis of the regularity of the interaction force of a magnetic lattice with a massive ferromagnet is made, depending on the thickness, width of the strip and the distance of the lattice to the ferromagnet in the most total case.