ИЗВЕСТИЯ РАН. СЕРИЯ ФИЗИЧЕСКАЯ, 2021, том 85, № 12, с. 1781–1786

УДК 535.36

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПЛАНАРНЫХ ИМПУЛЬСОВ, РАСПРОСТРАНЯЮЩИХСЯ В РЕЖИМЕ ТУННЕЛЬНОЙ ИОНИЗАЦИИ

© 2021 г. В. А. Халяпин[1, 2, *], А. Н. Бугай[3]

[1]Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования "Балтийский федеральный университет имени Иммануила Канта", Калининград, Россия

[2]Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования "Калининградский государственный технический университет", Калининград, Россия

[3]Международная межправительственная организация Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Россия

*E-mail: slavasxi@gmail.com

Поступила в редакцию 05.07.2021 г.
После доработки 26.07.2021 г.
Принята к публикации 27.08.2021 г.

На основе метода моментов рассмотрена задача о динамике планарного импульса, распространяющегося в режиме туннельной ионизации. Получена система уравнений на параметры сигнала и с помощью метода Ляпунова найдены условия его квазиустойчивого распространения.

DOI: 10.31857/S0367676521120097

ВВЕДЕНИЕ

Исследование динамики интенсивных импульсов, распространяющихся в режиме ионизации, представляет как теоретический, так и практический интерес в связи с их применением в различных областях: дистанционном зондировании атмосферы [1], управлении молниями [2], генерации суперконтинуума [3], генерации терагерцового излучения [4] и др. Хорошо известно, что решение нелинейного уравнения Шредингера (НУШ) устойчиво только для одномерного случая $D = 1$, который отвечает чисто пространственным или временным импульсам. При размерности $D = 2$, что соответствует пучкам или планарным пространственно-временным импульсам и при $D = 3$, соответствующей оптическим пулям, решения не устойчивы [5]. Для стабилизации сигналов с $D > 1$ были предложены такие механизмы как насыщающая нелинейность [6], конкурирующие нелинейности [7], дифракция или дисперсия более высокого порядка [8], градиентный волновод [9], генерация второй гармоники [10]. Было показано, что ионизация также может стабилизировать сигнал [11–18]. Эта стабилизация обусловлена балансом между самофокусировкой, дифракцией и плазменной расходимостью. Известно, что ионизация приводит к сдвигу спектра импульса в сторону более высоких частот [19–21]. Это обусловлено генерацией свободных электронов и приводит к отрицательному значению показателя преломления и, следовательно, к синему смещению спектра сигнала. Это явление противоположно хорошо известному вынужденному комбинационному саморассеянию (ВКС) [22–26]. Модель для исследования распространения импульсов в режиме туннельной ионизации была разработана в [19, 20]. Авторы вышеупомянутых работ ввели концепцию так называемых плавающих импульсов (floating pulses) с интенсивностями чуть выше порога ионизации газа, когда потери на ионизацию не слишком велики.

В настоящей работе мы покажем, что квазиустойчивое распространение планарных импульсов в среде с кубической нелинейностью возможно благодаря балансу между дисперсией и нелинейностью с одновременным подавлением дифракционной и ионизационной расходимости путем самофокусировки.

МЕТОД МОМЕНТОВ

В настоящей работе рассматривается динамика планарных сигналов, распространяющихся в режиме туннельной ионизации, с помощью метода моментов [25–28]. Уравнения, описывающие соответствующую динамику, имеют вид [19, 20]

$$\frac{\partial\psi}{\partial z}+\frac{i\beta_2}{2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau^2}-\frac{\beta_3}{6}\frac{\partial^3\psi}{\partial\tau^3}-i\gamma\psi|\psi|^2+\frac{\gamma}{\omega}\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\psi|\psi|^2\right)+ \\ +i\gamma T_R\psi\frac{\partial|\psi|^2}{\partial\tau}+i\eta\psi\int\limits_{-\infty}^{\tau}\delta\Theta(\delta)\,d\tau-\frac{i\mu}{2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=0. \quad (1)$$

Здесь ω – центральная частота сигнала, k – волновое число, z – координата, вдоль которой распространяется сигнал, x – поперечная координата, $\tau = t - z/\nu_g$ – время в сопутствующей системе координат, ν_g – групповая скорость на частоте ω, $\mu = 1/k$, Θ – функция Хевисайда, $\delta = |\psi|^2 - |\psi_{th}|^2$, $|\psi|^2_{th}$ – величина, пропорциональная пороговой интенсивности туннельной ионизации $I_{th} = cn_0|\psi_{th}|^2/8\pi$, $\eta = e^2N_0\sigma_T/4mck$ – параметр, связанный с электронной плазмой, e и m – соответственно заряд и масса электрона, N_0 – концентрация неионизированных молекул, β_2 – коэффициент дисперсии групповой скорости (ДГС), β_3 – положительный параметр, определяющий дисперсию третьего порядка, γ – коэффициент кубической нелинейности, T_R – характеризует вклад ВКС. Коэффициент β_2 положителен, если центральная частота импульса лежит в области нормальной дисперсии групповой скорости, и отрицателен в противоположном случае. При выводе предпоследнего слагаемого в левой части (1), описывающего плазменную нелинейность, применялся подход [19, 20], согласно которому для интенсивных фемтосекундных импульсов изменение концентрации носителей N_e записывается как $\partial N_e/\partial t \approx W(I)N_0$, где I – интенсивность импульса, W – скорость фотоионизации. Согласно теории Келдыша [29] в режиме многофотонной ионизации зависимость W от интенсивности носит степенной характер, а в туннельном режиме – экспоненциальный. В последнем случае точная формула весьма затрудняет аналитические выкладки. Поэтому авторами [19, 20] на основе сравнения с экспериментальными данными было предложено раскладывать скорость ионизации в туннельном режиме в ряд по интенсивности, ограничившись линейным членом разложения $W \approx \sigma_T(I - I_{th})$, где σ_T – коэффициент пропорциональности, определяемый из формулы Келдыша. Очевидно, что для рассматриваемого приближения должно выполняться условие $I > I_{th}$, то есть вводится эффективный порог, ниже которого скорость ионизации пренебрежимо мала. Несмотря на то, что в формулу входит интенсивность в первой степени, это не означает, что физический процесс является однофотонным, поскольку мы имеем дело лишь с подгоночной формулой, работающей в ограниченном интервале интенсивностей.

Медленно меняющаяся огибающая связана с электрическим полем импульса соотношением

$$\varepsilon(z,x,\tau) = \frac{1}{2}\psi(z,x,\tau)\exp[-i(\omega t - kz)] + \text{c.c.} \quad (2)$$

Анализ динамики параметров импульса проводился на основе метода моментов. Пробное решение выберем в виде

$$\psi = B\,\mathrm{sech}\left(\frac{\tau - T}{\tau_p}\right)\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{a}\right)^2 + i\left(\phi + \Omega(\tau - T) - C\frac{(\tau - T)^2}{2\tau_p^2} - \frac{\varepsilon x^2}{2a^2}\right)\right], \quad (3)$$

где B – амплитуда сигнала, τ_p – его длительность, C – параметр, определяющий частотную модуляцию, T – временное запаздывание, ϕ – фаза, Ω – смещение центральной частоты сигнала, a – параметр, пропорциональный ширине планарного сигнала, ε – описывает кривизну волновых поверхностей. Все параметры зависят от координаты z. Определим моменты импульса в виде

$$E = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|\psi|^2 dx d\tau, \quad (4)$$

$$C = \frac{6i}{\pi^2 E}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(\tau - T)\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial\tau} - \psi\frac{\partial\psi^*}{\partial\tau}\right)dx d\tau, \quad (5)$$

$$\tau_p^2 = \frac{12}{\pi^2 E}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(\tau - T)^2|\psi|^2 dx d\tau, \quad (6)$$

$$T = \frac{1}{E}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\tau|\psi|^2 dx d\tau, \quad (7)$$

$$\Omega = -\frac{i}{2E}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial\tau} - \psi\frac{\partial\psi^*}{\partial\tau}\right)dx d\tau, \quad (8)$$

$$a^2 = \frac{2}{E}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|\psi|^2 x^2 dx d\tau, \quad (9)$$

$$\varepsilon = \frac{i}{E}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial x} - \psi\frac{\partial\psi^*}{\partial x}\right)x dx d\tau. \quad (10)$$

где E – пропорционально числу фотонов. Следуя методу моментов, получаем систему уравнений

$$E = 2B^2\tau_p a\sqrt{\pi} = \text{const}, \quad (11)$$

$$\frac{dT}{dz} = -\beta_2\Omega + \frac{\beta_3}{2}\left(\Omega^2 + \left(1 + \frac{\pi^2}{4}C^2\right)\frac{1}{3\tau_p^2}\right) + \frac{\gamma E}{2\omega\tau_p a\sqrt{2\pi}}, \quad (12)$$

$$\frac{d\Omega}{dz} = \frac{4\gamma E}{15\tau_p^3 a\sqrt{2\pi}}\left(T_R - \frac{5C}{4\omega}\right) - \frac{2\eta E}{3\pi\tau_p a}\frac{\psi_{th}^3}{B^3}\left(\frac{B}{\psi_{th}} - 1\right)^2, \quad (13)$$

$$\frac{d\tau_p}{dz} = \frac{\beta_2 C}{\tau_p} - \beta_3\frac{C\Omega}{\tau_p}, \quad (14)$$

$$\frac{dC}{dz} = \left(\frac{4}{\pi^2} + C^2\right)\frac{(\beta_2 - \beta_3\Omega)}{\tau_p^2} + \frac{2\gamma E}{\pi^2\tau_p a\sqrt{2\pi}}\left(1 - \frac{\Omega}{\omega}\right), \quad (15)$$

$$\frac{da}{dz} = -\frac{\mu\varepsilon}{a}, \quad (16)$$

$$\frac{d\varepsilon}{dz} = -\frac{\mu}{a^2}\left(1 + \varepsilon^2\right) + \frac{\gamma E}{3\tau_p a\sqrt{2\pi}}\left(1 - \frac{\Omega}{\omega}\right) - \frac{\eta E}{\pi a}\frac{16\sqrt{2}\psi_{th}^4}{15B^4}\left(\frac{B}{\psi_{th}} - 1\right)^{5/2}. \quad (17)$$

При расчете ионизационных слагаемых в (13), (17) мы использовали приближение $B/\psi_{th} - 1 < 1$ [19, 20]. Из уравнений (14), (15), (17) видно, что смещение частоты входит в уравнения через нелинейность и дисперсию высших порядков. По этой причине смещение частоты будет медленно выводить систему из состояния равновесия и на начальном этапе динамики ею можно пренебречь.

СТАЦИОНАРНОЕ РЕШЕНИЕ И ЕГО УСТОЙЧИВОСТЬ

Для того чтобы найти параметры стационарного состояния и условия его устойчивости, перепишем (14)–(17) в виде

$$\frac{d\nu}{d\xi} = \frac{P_\nu}{m_1}, \quad (18)$$

$$\frac{dP_\nu}{d\xi} = -\frac{\partial U}{\partial \nu}, \quad (19)$$

$$\frac{d\rho}{d\xi} = \frac{P_\rho}{m_2}, \quad (20)$$

$$\frac{dP_\rho}{d\xi} = -\frac{\partial U}{\partial \rho} + F. \quad (21)$$

Здесь $P_\nu = m_1\partial\nu/\partial\xi = -m_1 C/\nu$, $P_\rho = m_2\partial\rho/\partial\xi = -m_2 L_d\varepsilon/L_D\rho$, $m_1 = \dfrac{\pi^2}{4}$, $m_2 = 3L_D/2L_d$, $\xi = z/L_d$, $L_d = \tau_0^2/|\beta_2|$, $L_N = 2\sqrt{2\pi}\tau_0 a_0/\gamma E$, $L_D = a_0^2/\mu$, $L_\eta = 5\pi a_0/8\sqrt{2}\eta E$, a_0, τ_0 – начальное значение ширины планарного сигнала и его длительности. Систему (18)–(21) можно трактовать как механическую аналогию, описывающую движение частицы по поверхности с координатными осями ν и ρ в потенциальном поле

$$U = \frac{1}{2\nu^2} + \frac{3L_d}{4L_D\rho^2} - \frac{L_d}{L_N\nu\rho}. \quad (22)$$

Важно отметить, что масса частицы зависит от направления движения. Роль внешней силы, действующей вдоль координаты ρ, играет ионизационное слагаемое $F = \psi_{th}^4 L_d\left(B/\psi_{th} - 1\right)^{5/2}/B^4 L_\eta\rho^2$. Найдем стационарное решение этой системы уравнений

$$L_d = L_N, \quad (23)$$

$$\frac{3L_d}{2L_D} = \frac{L_d}{L_N} - \frac{L_d}{L_\eta}\frac{\psi_{th}^4}{B_0^4}\left(\frac{B_0}{\psi_{th}} - 1\right)^{5/2}. \quad (24)$$

Отметим, что условие (23) выполняется в области аномальной дисперсии групповой скорости. Выражения (23), (24) можно переписать в виде

$$B_0^2 = \frac{\sqrt{2}|\beta_2|}{\gamma\tau_0^2}, \quad (25)$$

$$\frac{1}{a_0} = \sqrt{\frac{32\pi^2\gamma I}{3\sqrt{2}\lambda c n_0}\left(1 - \frac{32\eta}{5\sqrt{\pi\gamma}}\sqrt{\frac{\sqrt{2}|\beta_2| c n_0}{8\pi\gamma I_{th}}}b^5\left(\frac{1}{b} - 1\right)^{5/2}\right)}. \quad (26)$$

Здесь мы использовали соотношения $B/\psi_{th} = 1/b\sqrt{\nu\rho}$, $b = \psi_{th}/B_0 = I_{th}/I$, полученные из (11), (19).

Рассмотрим вопрос устойчивости стационарного решения (25), (26) системы (18)–(21). Следуя методу Ляпунова [30], получаем четыре собственных значения

$$\lambda = \pm\sqrt{\frac{-(U_{\nu\nu}m_2 - dm_1) \pm \sqrt{(U_{\nu\nu}m_2 - dm_1)^2 - 4m_1m_2\left(hU_{\nu\rho} - dU_{\nu\nu}\right)}}{2m_1m_2}}. \quad (27)$$

Здесь нижние индексы после запятой обозначают производную по соответствующим переменным, $h = F_\nu - U_{\nu\rho}$, $d = F_\rho - U_{\rho\rho}$. Стационарное решение будет устойчивым, если λ не имеет положительной действительной части. Легко показать, что λ будет чисто мнимой, если выполняются условия

$$hU_{\nu\rho} - dU_{\nu\nu} > 0, \quad (28)$$

$$U_{\nu\nu}m_2 - dm_1 > 0. \quad (29)$$

Равенство нулю действительной части означает, что вследствие малых возмущений параметры сигнала будут осциллировать в окрестности стационарных значений. Если убрать ионизационное слагаемое $(F = 0)$, то (28), (29) принимают вид $U_{\nu\nu}U_{\rho\rho} - \left(U_{\nu\rho}\right)^2 > 0$, $m_2U_{\nu\nu} + m_1U_{\rho\rho} > 0$. Как и следовало ожидать, потенциальная функция в этом случае не имеет минимума. Если же учесть ионизацию, то из (28), (29) получаем

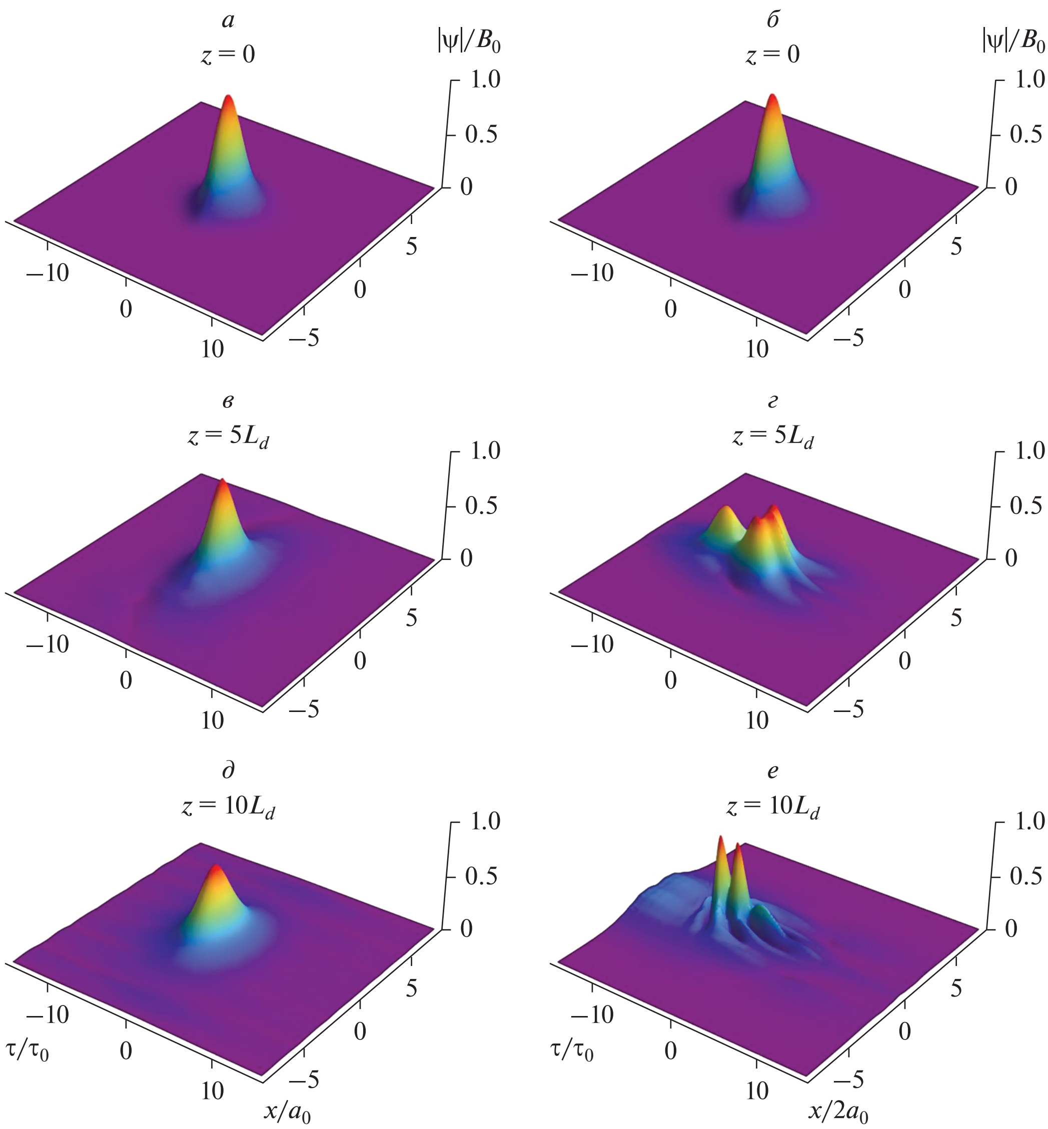

Рис. 1. Результаты численного интегрирования уравнения (1) с начальным условием (3) и $I = 5 \cdot 10^{12}$ Вт/см^2, $\tau_p = \tau_0 = 32$ фс на различных дистанциях распространения. Расчет выполнен для случаев $a = a_0 = 25$ мкм (*а*, *в*, *д*) и $a = 50$ мкм (*б*, *г*, *е*).

$$\frac{5L_d b^3}{L_\eta}\left(\frac{1}{b}-1\right)^{\frac{3}{2}}\left(b-\frac{1}{2}\right) > 0, \qquad (30)$$

$$m_1 + m_2 + m_1\frac{3L_d b^3}{L_\eta}\left(\frac{1}{b}-1\right)^{\frac{3}{2}}\left(b-\frac{7}{12}\right) > 0. \qquad (31)$$

Проведем численные оценки. Известно, что в большинстве материалов окно аномальной групповой дисперсии лежит в среднем инфракрасном диапазоне. Так в сапфире для длины волны $\lambda = 4$ мкм имеем $\beta_2 = 1.6 \cdot 10^{-24}$ с$^2 \cdot$ м$^{-1}$, $\gamma = 9.8 \cdot 10^{-17}$ В$^{-2} \cdot$ м, $I_{th} = 4.6 \cdot 10^{12}$Вт/см^2, $\eta = 8.1 \cdot 10^{-3}$ В$^{-2} \cdot$ м $\cdot$ с$^{-1}$. Взяв $I = 5 \cdot 10^{12}$ Вт/см^2, из (25), (26) находим стационарные значения $\tau_0 = 32$ фс, $a_0 = 6.2\lambda = 24.8$ мкм. Легко показать, что при данных параметрах удовлетворяются условия (30), (31). На рис. 1 приведены результаты численного моделирования уравнения (1) при данных параметрах с начальным условием вида (3). Видно (рис. 1*а*, 1*в*, 1*д*), что при расчетных параметрах импульс распространяется на дистанции порядка 10 длин дисперсионного расплывания (примерно

6 мм в сапфире) в квазистационарном режиме, немного уменьшая свою амплитуду и испытывая слабый сдвиг своего спектра в синюю область. Для сравнения также приведен расчет (рис. 1*б*, 1*г*, 1*е*) для начального условия, когда радиус лазерного импульса вдвое превышает стационарное значение, рассчитываемое согласно (26). В этом случае наблюдается сложная динамика с делением импульса на филаменты и рефокусировкой, причем сдвиг спектра всей структуры в синюю область больше, чем в квазистационарном режиме.

Здесь следует еще раз отметить, что вклад смещения частоты, которым мы пренебрегли, и нелинейное поглощение, сопровождающее ионизацию, будут выводить систему из равновесия. По этой причине условия (30), (31) определяют лишь квазиустойчивый режим.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Получено аналитическое описание методом моментов распространения планарных импульсов в режиме взаимной компенсации эффектов дифракции и ионизационной расходимости, с одной стороны, и самофокусировки, с другой. Баланс временной динамики обуславливался компенсацией дисперсионного уширения кубической нелинейностью. С помощью метода моментов проанализирована динамика планарного сигнала в режиме туннельной ионизации. Получены условия квазистационарного распространения сигнала. С помощью метода Ляпунова найдены условия устойчивого распространения (30), (31). Учет смещения частоты в красную область спектра за счет явления ВКС или в синюю, если преобладают эффекты ионизации, будет приводить к медленному выходу системы из баланса и возникновению осцилляций. Кроме того, равновесие будет нарушаться и за счет поглощения фотонов в процессе ионизации, которым мы пренебрегли в данном исследовании. Поэтому равновесие, исследованное в работе, имеет квазиустойчивый характер.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 17-11-01157).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Rairoux P., Schillinger H., Niedermeier S. et al.* // Appl. Phys. B. 2000. V. 71. P. 573.
2. *Diels J.-C., Bernstein R., Stahlkopf K., Zhao X.M.* // Sci. Amer. 1997. V. 277. P. 50.
3. *Alfano R.R.* The supercontinuum laser source. N.Y.: Springer, 1989. 538 p.
4. *D'Amico C., Houard A., Franco M. et al.* // Phys. Rev. Lett. 2007. V. 98. Art. No. 235002.
5. *Kivshar Yu.S., Agrawal G.P.* Optical solitons: from fibers to photonic crystals. N.Y.: Academic Press Inc., 2003. 540 p.
6. *Edmundson D.E., Enns R.H.* // Opt. Lett. 1992. V. 17. P. 586.
7. *Mihalache D., Mazilu D., Crasovan L.-C. et al.* // Phys. Rev. Lett. 2002. V. 88. Art. No. 073902.
8. *Fibich G., Ilan B.* // Opt. Lett. 2004. V. 29. P. 887.
9. *Raghavan S., Agrawal G.P.* // 2000. V. 180. P. 377.
10. *Sazonov S.V., Kalinovich A.A., Komissarova M.V., Zakharova I.G.* // Phys. Rev. A. 2019. V. 100. Art. No. 033835.
11. *Couairon A.* // Eur. Phys. J. D. 1996. V. 27. P. 159.
12. *Henz S., Herrmann J.* // Phys. Rev. E. 2006. V. 53. P. 4092.
13. *Sprangle P., Penano J.R., Hafizi B.* // Phys. Rev. E. 2002. V. 66. Art. No. 046418.
14. *Sprangle P., Esarey E., Krall J.* // Phys. Rev. E. 1996. V. 54. P. 4211.
15. *Penano J., Palastro J.P., Hafizi B. et al.* // Phys. Rev. A. 2017. V. 96. Art. No. 013829.
16. *Couairon A., Mysyrowicz A.* // Phys. Rep. 2007. V. 441. P. 47.
17. *Chekalin S.V., Dokukina E.A., Dormidonov E.A. et al.* // J. Phys. B. 2015. V. 48. Art. No. 094008.
18. *Воронин А.А., Желтиков А.М.* // УФН. 2016. Т. 186. № 9. С. 957; *Voronin A.A., Zheltikov A.M.* // Phys. Usp. 2016. V. 59. No. 9. P. 869.
19. *Saleh M.F., Chang W., Holzer P. et al.* // Phys. Rev. Lett. 2011. V. 107. Art. No. 203902.
20. *Holzer P., Chang W., Travers J.C. et al.* // Phys. Rev. Lett. 2011. V. 107. Art. No. 203901.
21. *Facao M., Carvalho M.I., Almeida P.* // Phys. Rev. A. 2013. V. 87. Art. No. 063803.
22. *Dianov E.M., Karasik A.Y., Mamyshev P.V.* // JETP Lett. 1985. V. 41(6). P. 294.
23. *Mitschke F.M., Mollenauer L.F.* // Opt. Lett. 1986. V. 11. P. 659.
24. *Gordon J.P.* // Opt. Lett. 1986. V. 11. P. 662.
25. *Santhanam J., Agraval G.* // Opt. Commun. 2003. V. 222. P. 413.
26. *Bugay A.N., Khalyapin V.A.* // Phys. Lett. A. 2017. V. 381. P. 399.
27. *Власов С.Н., Петрищев В.А., Таланов В.И.* // Изв. вузов. Радиофиз. 1971. Т. 14. № 9. С. 1453.
28. *Маймистов А.И.* // ЖЭТФ. 1993. Т. 104. № 5. С. 3620; *Maimistov A.I.* // JETP. 1993. V. 77. P. 727.
29. *Келдыш Л.В.* // ЖЭТФ. 1964. Т. 47. С. 1945; *Keldysh L.V.* // Sov. Phys. JETP. 1965. V. 20. P. 1307.
30. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения. М.: Гостехиздат, 1950. 472 с.

On the stability of planar pulses propagating in the tunnel ionization mode

V. A. Khalyapin[a, b, *], **A. N. Bugay**[c]

[a] *Immanuel Kant Baltic Federal University, Kaliningrad, 236016 Russia*
[b] *Kaliningrad State Technical University, Kaliningrad, 236022 Russia*
[c] *Joint Institute for Nuclear Research, Dubna, 141980 Russia*
**e-mail: slavasxi@gmail.com*

The problem of the planar pulse propagation in the tunnel ionization regime is considered on the basis of the moments method. A system of equations for the signal parameters is obtained, and using Lyapunov method conditions for quasi-stable propagation are found.