

УДК 534.2:534.8

## ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ГРАФИЧЕСКИХ УСКОРИТЕЛЕЙ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ НЕЛИНЕЙНЫХ УЛЬТРАЗВУКОВЫХ ПУЧКОВ НА ОСНОВЕ УРАВНЕНИЯ ВЕСТЕРВЕЛЬТА

© 2021 г. Е. О. Коннова<sup>1</sup>, \*, П. В. Юлдашев<sup>1</sup>, В. А. Хохлова<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования  
“Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова”, физический факультет, Москва, Россия

\*E-mail: helen.7aprel@gmail.com

Поступила в редакцию 09.12.2020 г.

После доработки 25.01.2021 г.

Принята к публикации 26.02.2021 г.

Рассмотрена задача ускорения алгоритмов расчета эффектов дифракции, нелинейности и поглощения при моделировании высокоинтенсивных ультразвуковых пучков на основе нелинейного уравнения Вестервельта. Проведено сравнение результатов расчетов, проведенных с использованием графических ускорителей, с результатами вычислений на центральном процессоре, а также анализ скорости выполнения алгоритмов в зависимости от параметров входных данных.

DOI: 10.31857/S0367676521060132

### ВВЕДЕНИЕ

На сегодняшний день в области медицинской акустики быстро развивается направление неинвазивной хирургии, в котором мощные фокусированные ультразвуковые пучки используются для разрушения заданных структур организма внутри тела человека, например, опухолей [1]. При проектировании преобразователей для генерации мощного ультразвука и определения эффективности и безопасности терапевтического воздействия возникает задача моделирования нелинейных звуковых пучков [2]. В большинстве случаев излучателем генерируется монохроматическая волна, спектр которой в процессе распространения обогащается высшими гармониками за счет эффектов акустической нелинейности. Одним из часто используемых уравнений для моделирования ультразвуковых пучков является нелинейное уравнение Вестервельта. Теоретическая модель, основанная на данном уравнении, позволяет количественно точно описывать нелинейные ударно-волновые поля, создаваемые фокусированными преобразователями мощного ультразвука в однородных поглощающих средах [3, 4]. Однако в общем случае для решения данного уравнения, когда эволюционной переменной выступает время, необходимо использование суперкомпьютерных мощностей [5].

Для оптимизации численного эксперимента по распространению нелинейных фокусированных ультразвуковых пучков создаются специальные алгоритмы. В данной работе рассматривается важный для практики случай направленного трехмерного пучка. В этом случае возможен переход в бегущую систему координат, ось которой ориентирована вдоль преимущественного направления распространения волны в пучке, т.е. вдоль оси  $z$  (рис. 1). Благодаря такому переходу уравнение Вестервельта принимает вид эволюционного уравнения, выражающего первую производную акустического давления по осевой координате через комбинацию членов, которую можно считать известной для заданного  $z$ . Обычно численное решение уравнения такого типа строится с использованием метода расщепления по физическим факторам [6], согласно которому на каждом шаге по координате  $z$  вдоль преимущественного направления распространения волны каждый физический эффект рассчитывается отдельно с помощью определенного метода. Типовой размер матриц для хранения поля давления может достигать  $N_x = 10000$  на  $N_y = 10000$  (рис. 1) для каждой из  $N_{max} = 1000$  гармоник профиля нелинейной волны [7]. Даже при учете сделанных упрощений количество данных и соответствующая сложность расчетов требуют использования суперкомпьютерных мощностей.

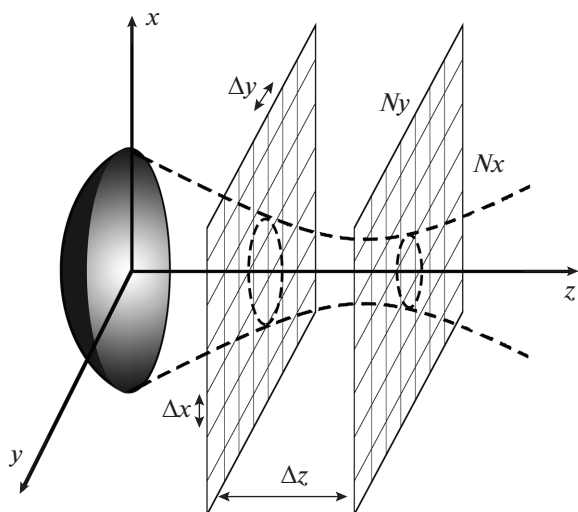


Рис. 1. Схема реализации метода расчета нелинейного фокусированного ультразвукового пучка.

Путем оптимизации распределения высших гармоник по пространству удается снизить требования к количеству оперативной памяти, в результате чего задача может быть решена на ПК с многоядерными центральными процессорами (CPU) [7]. Однако даже в случае параллельного исполнения вычислений на нескольких ядрах процессора (обычно от 2 до 16), ускоряющих расчеты в примерно соответствующее число раз, один расчет может занимать до нескольких суток. Это происходит из-за необходимости проведения вычислительных действий с большим количеством данных на каждом шаге алгоритма. При этом для характеристики поля одного излучателя во всем диапазоне мощностей обычно требуется провести несколько десятков расчетов [4]. Помимо скорости расчетов, использование вычислений на ПК также ограничено оперативной памятью процессора. В случае нехватки памяти на проведение вычислений с имеющимся количеством данных происходит обмен данными с жестким диском, что значительно замедляет алгоритм и делает расчеты нецелесообразными. Потенциальным способом решения проблемы скорости вычислений является использование графических процессоров (GPU), имеющих до нескольких тысяч узкоспециализированных ядер и позволяющих выполнять достаточно широкий спектр математических операций [8]. Однако увеличение числа ядер не обязательно ускоряет вычисления в соответствующее число раз. Это обусловлено тем, что ядра на GPU менее мощные, и, соответственно, их производительность и скорость вычисления ниже по сравнению с ядрами CPU. Кроме того, хранение и запись данных при выполнении каждого

из шагов алгоритма вдоль эволюционной координаты производится в оперативной памяти CPU, что приводит к необходимости обмена данными между центральным и графическим процессорами на каждом шаге алгоритма, на что уходит дополнительное время. В силу данных особенностей архитектуры GPU важной задачей становится нахождение баланса между максимальными размерами обрабатываемых на данном шаге алгоритма данных, которые помещаются в оперативную память графического процессора во избежание их передачи по частям, и минимизацией обмена данными между оперативной памятью центрального и графического процессоров.

Целью данной работы являлась разработка алгоритма, реализующего численные расчеты эффектов акустической нелинейности, дифракции и поглощения в однонаправленном уравнении Вестервелта на графических процессорах (GPU), что позволит ускорить решение задачи моделирования нелинейных ультразвуковых пучков.

## ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Уравнение Вестервелта в бегущей системе координат можно записать в эволюционной форме как:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial \tau \partial z} = \frac{c_0}{2} \left( \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \right) + \frac{\beta}{2\rho_0 c_0^3} \frac{\partial^2 p^2}{\partial \tau^2} + \frac{\delta}{2c_0^3} \frac{\partial^3 p}{\partial \tau^3}, \quad (1)$$

где  $p(x, y, z, \tau)$  — акустическое давление,  $c_0$  — скорость звука в среде,  $\tau = t - z/c_0$  — время в бегущей системе координат,  $\beta$  — коэффициент нелинейности,  $\delta$  — коэффициент термовязкого поглощения [3, 4]. Дифференциальные операторы в правой части уравнения в порядке слева направо описывают эффекты дифракции, нелинейности и термовязкого поглощения.

При численном решении уравнения (1) на каждом шаге по  $z$  дискретизованное поле давления  $p(x, y, z, \tau)$  представлено в памяти ЭВМ в виде трехмерной матрицы, которая содержит набор комплексных амплитуд  $N_{max}$  гармоник спектра волны в разложении ее профиля в конечный ряд Фурье в каждой пространственной точке плоскости  $xu$  на сетке с числом точек  $N_x$  и шагом  $\Delta x$  по оси  $x$  и  $N_y$  с шагом  $\Delta y$  по оси  $y$ :

$$p(x, y, z, \tau) = \sum_{n=-N_{max}}^{N_{max}} p_n(x, y, z) e^{-i\omega_n \tau}, \quad (2)$$

где круговые частоты гармоник  $\omega_n = \omega n$ ,  $\omega$  — круговая частота монохроматического источника,

$p_n$  – комплексные амплитуды гармоник. Отметим, что в памяти ЭВМ достаточно хранить только одну половину спектра (по положительным частотам), т.к. вторая половина по отрицательным частотам является комплексно-сопряженной к первой.

Как было указано ранее, на CPU данная задача решается достаточно долго, и в настоящее время все большую популярность приобретает использование графических процессоров, для работы с которыми уже адаптировано большее количество алгоритмов. Преимущество графических процессоров (GPU) заключается в том, что они содержат до нескольких тысяч небольших ядер, способных выполнять максимально много арифметических операций одновременно, в то время как в составе центральных процессоров присутствует несколько мощных ядер, выполняющих максимально широкий набор инструкций [8]. Для современных GPU уже реализованы библиотеки многих стандартных математических операций и методов, связанных, например, с линейной алгеброй и быстрым преобразованием Фурье (БПФ).

Рассмотрим физические эффекты, входящие в уравнение (1), по отдельности. Эффект дифракции описывается следующим уравнением [9]:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial z \partial \tau} = \frac{c_0}{2} \Delta p, \quad (3)$$

где  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  – оператор Лапласа. Тогда для комплексной амплитуды одной гармоники дифракционное уравнение (3) запишется в виде:

$$\frac{\partial p_n}{\partial z} = \frac{i}{2k_n} \Delta p_n, \quad (4)$$

где  $k_n = \omega_n/c_0$  – волновое число. При решении уравнения (4) методом углового спектра амплитуды пространственного спектра находятся при помощи прямого БПФ от двумерного распределения поля гармоники  $p_n(x, y, z)$  на данном расстоянии  $z$  от источника:

$$\widehat{p}_n(k_x, k_y, z) = \sum_{m=0}^{N_x-1} \sum_{l=0}^{N_y-1} p_n(x, y, z) e^{ik_x x + ik_y y}, \quad (5)$$

где  $x = m\Delta x$ ,  $y = l\Delta y$ . Умножение амплитуд спектра на пропагатор, соответствующий уравнению (4), дает решение для амплитуд на следующей плоскости, отстоящей от предыдущей на шаг  $\Delta z$ :

$$\widehat{p}_n(k_x, k_y, z + \Delta z) = \widehat{p}_n(k_x, k_y, z) e^{-i\Delta z k_n + i\Delta z \sqrt{k_n^2 - k_x^2 - k_y^2}}. \quad (6)$$

При совершении обратного БПФ получается решение на следующем расстоянии  $z + \Delta z$  от источника:

$$p_n(x, y, z + \Delta z) = \frac{1}{N_x N_y} \sum_0^{N_x-1} \sum_0^{N_y-1} \widehat{p}_n(x, y, z + \Delta z) e^{-ik_x x - ik_y y}. \quad (7)$$

Далее рассмотрим эффект термовязкого поглощения, для которого уравнение записывается в виде:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\delta}{2c_0^3} \frac{\partial^2 p}{\partial \tau^2}. \quad (8)$$

В спектральном представлении данное уравнение имеет точное аналитическое решение:

$$p_n(x, y, z + \Delta z) = p_n(x, y, z) \exp\left(-\frac{\Delta z \omega_n^2 \delta}{2c_0^3}\right). \quad (9)$$

Нелинейные эффекты описываются дифференциальным уравнением:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\beta}{2\rho_0 c_0^3} \frac{\partial p^2}{\partial \tau}. \quad (10)$$

Так как акустическое давление представлено в виде ряда Фурье по временным гармоникам (2), то уравнение (10) в данной точке пространства запишется в виде системы нелинейных связанных уравнений [10]:

$$\frac{\partial p_n}{\partial z} = \frac{i n \omega \beta}{\rho_0 c_0^3} \left( \sum_{k=1}^{N_{max}-n} p_k p_{n+k}^* + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} p_k p_{n-k} \right), \quad (11)$$

где  $p_n^*$  – комплексно-сопряженная амплитуда гармоники. Таким образом, для нахождения поля на следующем шаге  $\Delta z$  по оси  $z$  необходимо решить систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка для амплитуд гармоник, которая может быть поставлена как задача Коши:

$$\frac{d\vec{y}}{dz} = \vec{f}(\vec{y}), \quad \vec{y}(z_0) = \vec{y}_0. \quad (12)$$

Здесь вектор значений  $\vec{y}$  размера  $N_{max}$  представляет набор гармоник в каждой точке пространства, а  $\vec{f}$  – функция от амплитуд гармоник, стоящая в правой части уравнения (10). Приближенное решение системы на следующем  $m + 1$  шаге строится методом Рунге–Кутты четвертого порядка точности [10]:

$$\begin{aligned} \vec{y}_{m+1} &= \vec{y}_m + \frac{\Delta z}{6} (\vec{k}_1 + 2\vec{k}_2 + 2\vec{k}_3 + \vec{k}_4), \\ \vec{k}_1 &= \vec{f}(x_m, \vec{y}_m), \quad \vec{k}_2 = \vec{f}\left(x_m + \frac{\Delta z}{2}, \vec{y}_m + \frac{\Delta z}{2} \vec{k}_1\right), \\ \vec{k}_3 &= \vec{f}\left(x_m + \frac{\Delta z}{2}, \vec{y}_m + \frac{\Delta z}{2} \vec{k}_2\right), \\ \vec{k}_4 &= \vec{f}(x_m + \Delta z, \vec{y}_m + \Delta z \vec{k}_3). \end{aligned} \quad (13)$$

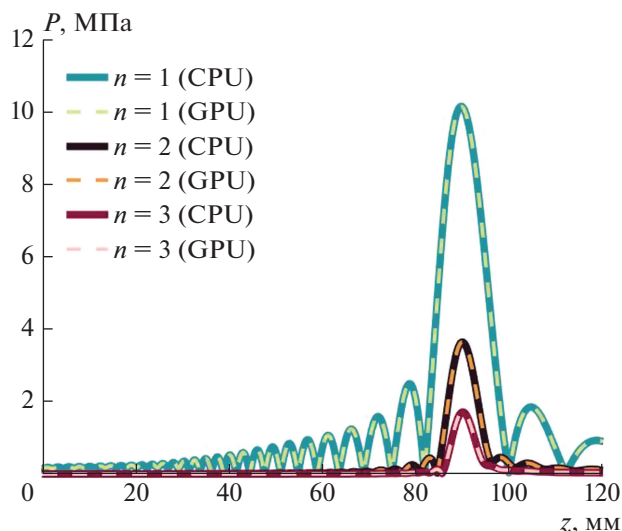


Рис. 2. Амплитуды первых трех гармоник на оси излучателя.

Вычисления повторяются в цикле до прохождения необходимого интервала по оси  $z$ . При этом используется метод расщепления по физическим факторам второго порядка точности [13]. Это означает, что на каждом шаге цикла сначала выполняется расчет операторов дифракции и поглощения на шаге  $\Delta z/2$ , далее вычисляется оператор нелинейности на полном шаге  $\Delta z$ , и снова повторяется расчет для первых двух операторов на половине шага.

Расчеты были проведены на CPU Intel Core i7 4790 (4 физических ядра и 8 виртуальных ядер) и на GPU видеокарты Nvidia GTX1070, для чего была написана программа на языке C, содержащая функции ядра CUDA, которые реализовали алгоритмы (6), (9) и (13) соответственно. Двумерные фурье-преобразования, выполнение которых необходимо при использовании метода углового спектра, проводились с помощью встроенной библиотеки cuFFT из пакета Cuda Development Toolkit. Параллельное исполнение здесь достигается

как за счет внутреннего параллелизма алгоритма быстрого преобразования Фурье, реализованного для GPU, так и за счет выполнения функции ядра CUDA при умножении пространственного спектра на пропагатор (6). Распараллеливание алгоритмов поглощения и нелинейности производилось по пространственным координатам плоскости  $xy$ . На многоядерном процессоре ядра выполняли параллельно вычисления операторов поглощения и нелинейности для различных пространственных точек в плоскости  $xy$ . В алгоритме для CPU параллельный расчет дифракции достигался за счет одновременной обработки ядрами CPU полей нескольких гармоник по алгоритму (5)–(7).

## РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Начальное распределение комплексной амплитуды первой гармоники в плоскости  $z = 0$  было получено при помощи интеграла Рэлея [14], рассчитанного для фокусирующего преобразователя с частотой 1 МГц, диаметром 10 см и с фокусным расстоянием 9 см [12]. Распределение задавалось на квадратной сетке с общим числом ячеек  $N_x N_y$ , где  $N_x = N_y = 2560$ , с пространственными шагами  $\Delta x = \Delta y = 0.4$  мм, количество гармоник, используемых в расчете,  $N_{max} = 50$ . В результате работы алгоритма были получены распределения первых трех гармоник поля на оси излучателя (рис. 2), а также в фокальной (рис. 3а–3в) и осевой плоскостях (рис. 3г–3е). Рассчитанные пространственные распределения амплитуд гармоник сравнивались с распределениями, полученными в программе, реализованной на CPU. Оба расчета дали неотличимые друг от друга результаты, что подтвердило правильность реализованного для GPU алгоритма.

В табл. 1 представлено сравнение времени работы однопоточного алгоритма, реализованного на CPU, с многопоточными алгоритмами для CPU и с алгоритмом для GPU при распространении пучка на 1200 шагов (или на 120 мм). Благодаря использованию GPU можно примерно на поря-

Таблица 1. Сравнение скорости выполнения всех видов алгоритмов

Размер матрицы $N_x, N_y$	Число гармоник $N_{max}$	$T$ , минуты			
		1 пот. CPU	4 пот. CPU	8 пот. CPU	GPU (1920 потоков)
2560	10	1900	470	300	23
	50	43200	11520	7800	252

Таблица 2. Сравнение скорости выполнения алгоритмов, выполненных на 8 потоках CPU и на GPU, для разного количества гармоник

$T$ , с	Число гармоник $N_{max}$					
	8 потоков CPU	10	30	50	80	100
	GPU (1920 ядер)	12.2	56	128	285	423
$T_8/T_{GPU}$		12	20	26	35	39

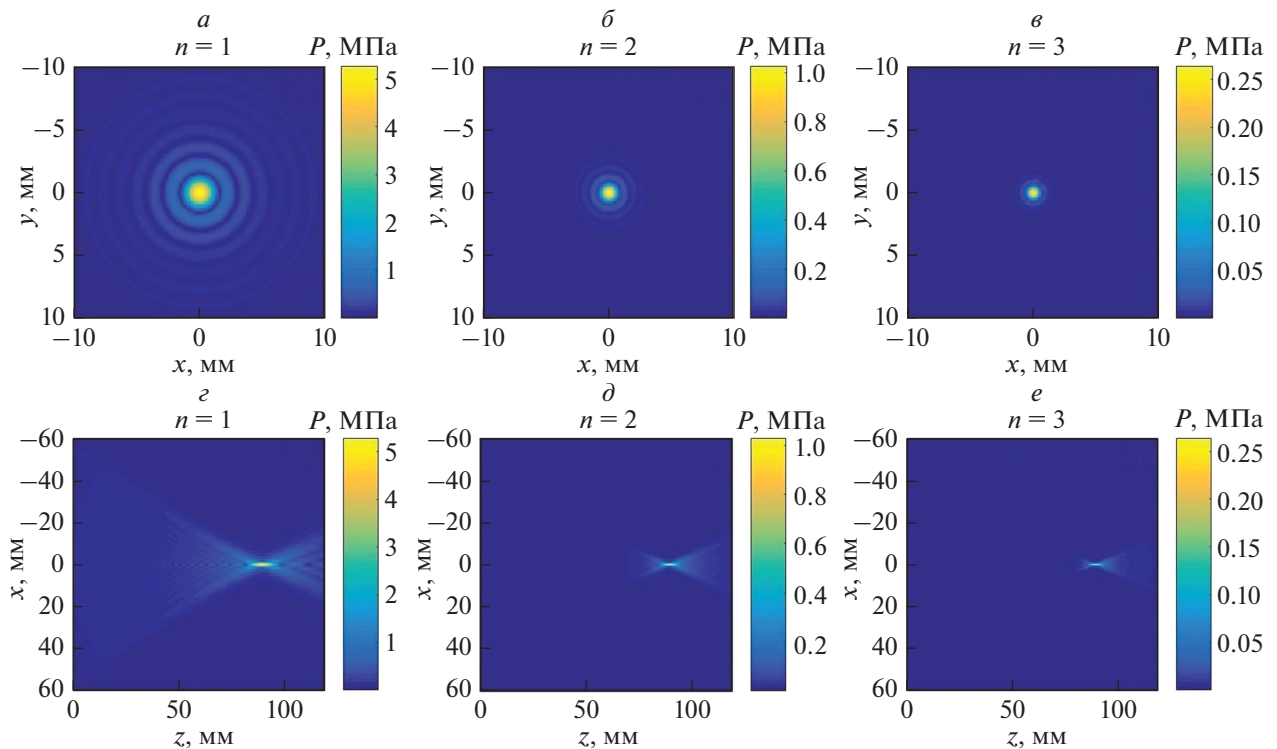


Рис. 3. Распределения амплитуд первой (а), второй (б) и третьей (в) гармоник в фокальной плоскости. Распределения амплитуд первой (г), второй (д) и третьей (е) гармоник в плоскости оси пучка.

док ускорить расчеты по сравнению с 8-поточным алгоритмом для CPU, хотя ядер на графическом процессоре в сотни раз больше. Это связано с различием мощностей ядер процессоров, а также со временем, затраченным на обмен данными между CPU и GPU. Обратим внимание на скорость вычислений на GPU по сравнению со скоростью вычислений на 8 потоках CPU для различного числа гармоник (табл. 2). Видно, что ускорение растет пропорционально увеличению количества гармоник. В силу того, что вычисления в обоих алгоритмах основаны на наборе простейших арифметических операций для большого объема данных, алгоритм для GPU выполняется быстрее за счет большего количества параллельных потоков, несмотря на меньшую мощность ядер данного процессора. Поэтому ускорение растет при увеличении объема данных, например, за счет увеличения числа гармоник.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Продемонстрировано применение вычислений на графических процессорах для распараллеливания алгоритма решения уравнения Вестервельта на примере расчета поля, создаваемого фокусирующим ультразвуковым излучателем. Реализованная версия алгоритма для GPU позволила ускорить вычисления по сравнению с алгоритмом для

CPU на порядок. Планируется дальнейшая оптимизация алгоритма для GPU для большего ускорения вычислений.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 20-32-70142).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бэйли М.Р., Хохлова В.А., Сапожников О.А. и др. // Акуст. журн. Т. 49. № 4. С. 437.
2. Rosnitskiy P.B., Yuldashev P.V., Sapozhnikov O.A. et al. // IEEE Trans. Ultrason. Ferr. 2017. V. 64. No. 2. P. 374.
3. Westervelt P.J. // J. Acoust. Soc. Amer. 1963. V. 35. No. 4. P. 535.
4. Kreider W., Yuldashev P.V., Sapozhnikov O.A. et al. // IEEE Trans. Ultrason. Ferr. 2013. V. 60. No. 8. P. 1683.
5. Okita K., Ono K., Takagi S., Matsumoto Y. // Int. J. Numer. Meth. Fluids. 2010. V. 65. No. 1–3. P. 43.
6. Ames W.F. Numerical methods for partial differential equations. San Diego: Academic, 1992.
7. Юлдашев П.В., Хохлова В.А. // Акуст. журн. 2011. Т. 57. № 3. С. 337.
8. Перепёлкин Е.Е., Садовников Б.И., Иноземцева Н.Г. Вычисления на графических процессорах (GPU) в задачах математической и теоретической физики. М.: Ленанд, 2014.

9. *Коннова Е.О., Юлдашев П.В., Хохлова В.А.* // Сб. тр. XVII Всеросс. шк.-сем. "Волны-2019". (Москва, 2019). С. 10.
10. *Кащеева С.С., Сапожников О.А., Хохлова В.А. и др.* // Акуст. журн. 2000. Т. 46. № 2. С. 211.
11. *Калиткин Н.Н.* Численные методы. М.: Наука, 1978.
12. *Мездрохин И.С., Юлдашев П.В., Хохлова В.А.* // Акуст. журн. 2018. Т. 64. № 3. С. 318.
13. *Zemp R.J., Tavakkoli J., Cobbold R.S.C.* // J. Acoust. Soc. Amer. 2003. V. 113. No. 1. P. 139.
14. *O'Neil H.T.* // J. Acoust. Soc. Amer. 1949. V. 21. No. 5. P. 516.

## **Numerical simulation of nonlinear ultrasonic beams based on the Westervelt equation using graphic accelerators**

**E. O. Konnova<sup>a,\*</sup>, P. V. Yuldashev<sup>a</sup>, V. A. Khokhlova<sup>a</sup>**

<sup>a</sup>*Lomonosov Moscow State University, Physics Faculty, Moscow, 119991 Russia*

*\*e-mail: helen.7aprel@gmail.com*

The problem of accelerating algorithm calculating diffraction, nonlinearity, and absorption effects in the simulation of high-intensity ultrasonic beams based on the nonlinear Westervelt equation is considered. The results of calculations performed on graphics accelerators are compared with the results of calculations on the central processing unit. The analysis of algorithm performance depending on the input data parameters is provided.