

УДК 535.3

## ТРЕХМЕРНЫЕ ИМПУЛЬСЫ МАТЬЁ И БЕССЕЛЯ В МАССИВЕ ПРИМЕСНЫХ УГЛЕРОДНЫХ НАНОТРУБОК

© 2022 г. М. Б. Белоненко<sup>1</sup>, \*, Н. Н. Конобеева<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования  
“Волгоградский государственный университет”, Волгоград, Россия

\*E-mail: mbelonenko@yandex.ru

Поступила в редакцию 24.08.2021 г.

После доработки 06.09.2021 г.

Принята к публикации 22.09.2021 г.

Исследовано распространение трехмерных импульсов с поперечным сечением Матьё и Бесселя в массиве полупроводниковых углеродных нанотрубок с примесями. На основании уравнений Максвелла получено эффективное уравнение на векторный потенциал электромагнитного поля. Проанализирована зависимость формы импульса от параметров примеси и функций Матьё и Бесселя.

DOI: 10.31857/S0367676522010057

### ВВЕДЕНИЕ

Как хорошо известно, существуют локализованные решения волнового уравнения, которые в идеальном случае не испытывают дифракционных или дисперсионных эффектов во время их распространения [1–3]. Такие волны сохраняют свой профиль поперечной интенсивности при распространении в свободном пространстве. Отметим, что в цилиндрической системе координат решения волнового уравнения для бездифракционного пучка задаются с помощью функций Бесселя, а в эллиптической системе координат – функциями Матьё [4, 5]. Такие локализованные импульсы представляют большой интерес для беспроводной и оптической связи, медицинской визуализации, лазерной хирургии, нелинейной оптики и др.

В оптике бездифракционное распространение пучков может быть получено в удобных средах [6], таких как волноводные или нелинейные материалы. Привлекательной с этой точки зрения средой являются углеродные нанотрубки (УНТ), обладающие целым рядом уникальных свойств с большим практическим потенциалом [7]. Было проведено много исследований, касающихся эволюции пучков разного профиля в среде с УНТ [8–12]. Все они продемонстрировали стабилизирующее воздействие среды с нанотрубками на распространяющиеся в ней импульсы. Прим этом вне рассмотрения остался вопрос влияния примесей в УНТ, которые могут оказать существенное воздействие на эволюцию импульсов. В данной работе мы будем исследовать электромагнитные волны с поперечным сечением Бесселя и Матьё.

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Исследуем особенности эволюции трехмерных предельно коротких электромагнитных импульсов (ПКИ) в массиве зигзагообразных углеродных нанотрубок. Будем считать, что по объему массива нанотрубок равномерно распределена примесь, которая для определенности имеет четыре уровня.

Учтем, что волновой вектор перпендикулярен оси нанотрубок (ось  $Oy$ ), а вектор его электрического поля направлен вдоль оси трубок  $Oz$ .

Вектор потенциал имеет вид:  $\vec{A} = (0, 0, A(x, y, z))$   
плотность электрического тока  $\vec{j} = (0, 0, j(x, y, z))$ .

Для компоненты электрического поля, направленной вдоль оси УНТ (с учетом:  $\vec{E} = -c^{-1} \partial \vec{A} / \partial t$ ), запишем трехмерное волновое уравнение в цилиндрической системе координат для импульсов Бесселя (1а) и в параболической системе координат для импульсов Матьё (1б):

$$\frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \vec{A}}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial \varphi^2} + 4\pi j(\vec{A}), \quad (1a)$$

$$\frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \frac{1}{\sigma^2 + \tau^2} \left( \frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( \sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial \sigma} \right) + \frac{1}{\tau} \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \tau \frac{\partial \vec{A}}{\partial \tau} \right) \right) + \frac{1}{\sigma^2 \tau^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial \varphi^2} + 4\pi j(\vec{A}), \quad (1b)$$

где  $\varepsilon$  – диэлектрическая проницаемость среды,  $c$  – скорость света,  $(r, z, \varphi)$  – координаты в цилиндрической системе координат,  $(\sigma, \tau, \varphi)$  – координаты в параболической системе координат.

Запишем стандартное выражение для плотности тока [13]:

$$j = 2e \sum_{s=1}^m \int_{ZB} v_s(p) f(p, s) dp, \quad (2)$$

где  $e$  – заряд электрона,  $p$  – компонента квазиимпульса электрона проводимости вдоль оси нанотрубки,  $v_s(p) = \partial \epsilon_{imp}(p) / \partial p$  – скорость электронов,  $f(p, s)$  – функция распределения Ферми,  $\epsilon_{imp}(p)$  – закон дисперсии с учетом примесей [14]:

$$\epsilon_{imp}(p, s) = 0.5(R + Q + \sqrt{(R - Q)^2 - 4(2D \cdot \Delta(p, s) - \Delta(p, s)^2 - D^2)}) \quad (3)$$

$R, Q$  – параметры, описывающие переходы электрона между примесными уровнями и подрешетками нанотрубок,  $D$  – параметр, описывающий переходы между двумя подрешетками УНТ,  $\Delta(p, s)$  – закон дисперсии для электронов углеродных нанотрубок без учета примеси [15, 16].

В работе [13] показано, что накопление заряда, возникающее из-за неоднородности поля вдоль оси, не оказывает существенного влияния на распространение поля предельно короткого импульса. Поэтому производной по углу в данном приближении можно пренебречь. В этом случае получаем эффективное уравнение на векторный потенциал для импульса Бесселя (4а) и Матьё (4б):

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial A}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} - \frac{\epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4en_0 f_k}{c} \sin\left(\frac{kaeA}{c}\right) = 0, \quad (4a)$$

$$\frac{1}{\sigma^2 + \tau^2} \left( \frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( \sigma \frac{\partial A}{\partial \sigma} \right) + \frac{1}{\tau} \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \tau \frac{\partial A}{\partial \tau} \right) \right) - \frac{\epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4en_0 f_k}{c} \sin\left(\frac{kaeA}{c}\right) = 0, \quad (4b)$$

$n_0$  – концентрация электронов,

$$f_k = \sum_s a_{sk} \int_{BZ} dp \cos(pk) \frac{\exp(-\epsilon_{imp}(p, s)/k_B T)}{\exp(-\epsilon_{imp}(p, s)/k_B T) + 1}, \quad (5)$$

$k_B$  – постоянная Больцмана,  $T$  – температура,  $a_{sk}$  – коэффициенты в разложении закона дисперсии электронов (3) в ряд Фурье:

$$\epsilon_{imp}(p, s) = \frac{1}{2\pi} \sum_{s=1}^m \sum_{k=1}^{\infty} a_{sk} \cos(pk), \quad (6)$$

$$a_{sk} = \int_{BZ} dp \cos(pk) \epsilon_{imp}(p, s). \quad (7)$$

Интегрирование ведется по первой зоне Бриллюэна. Отметим, что сумме по  $k$  мы учитываем

первые 10 слагаемых ввиду убывания коэффициентов  $f_k$  [17].

## РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

Проведено численное моделирование уравнений (4а) и (4б). Начальные условия для импульса выбирались следующим образом:

$$A(r, z, 0) = A_0 \exp\left(-\frac{(z - z_0)^2}{\gamma_z^2}\right) \exp\left(-\frac{r}{\gamma_r}\right),$$

$$\frac{dA(r, z, 0)}{dt} = \frac{2A_0 v(z - z_0)}{\gamma_z^2} J_0\left(\frac{r}{\gamma_r}\right) \times \quad (8a)$$

$$\times \exp\left(-\frac{(z - z_0)^2}{\gamma_z^2}\right) \exp\left(-\frac{r}{\gamma_r}\right),$$

$$A(\sigma, \tau, 0) = A_0 c e_0(1, q) \text{Jce}\left(\frac{\tau}{\gamma_\tau}\right) \times$$

$$\times \exp\left(-\frac{(\sigma - \sigma_0)^2}{\gamma_\sigma^2}\right) \exp\left(-\frac{\tau}{\gamma_\tau}\right), \quad (8b)$$

$$\frac{dA(\sigma, \tau, 0)}{dt} = \frac{2A_0 v(\sigma - \sigma_0) c e_0(1, q)}{\gamma_\sigma^2} \times$$

$$\times \text{Jce}\left(\frac{\tau}{\gamma_\tau}\right) \exp\left(-\frac{(\sigma - \sigma_0)^2}{\gamma_\sigma^2}\right) \exp\left(-\frac{\tau}{\gamma_\tau}\right),$$

где  $A_0$  – амплитуда электромагнитного импульса на входе в среду с УНТ,  $v$  – скорость импульса при входе в среду,  $\gamma_i$  – ширина импульса вдоль направления  $i = (r, z, \sigma, \tau)$ ,  $z_0$  и  $\sigma_0$  – начальные координаты центра импульса вдоль соответствующих осей,  $\gamma$  параметр обрезания для функции Бесселя, а функция Матьё имеет вид [18]:

$$\text{Jce}(r) = \frac{2 \int_0^{\pi/2} \cos(2\sqrt{q} \text{ch}(r) \cos(t)) c e_0(t, q) dt}{\pi c e_0(0, q)},$$

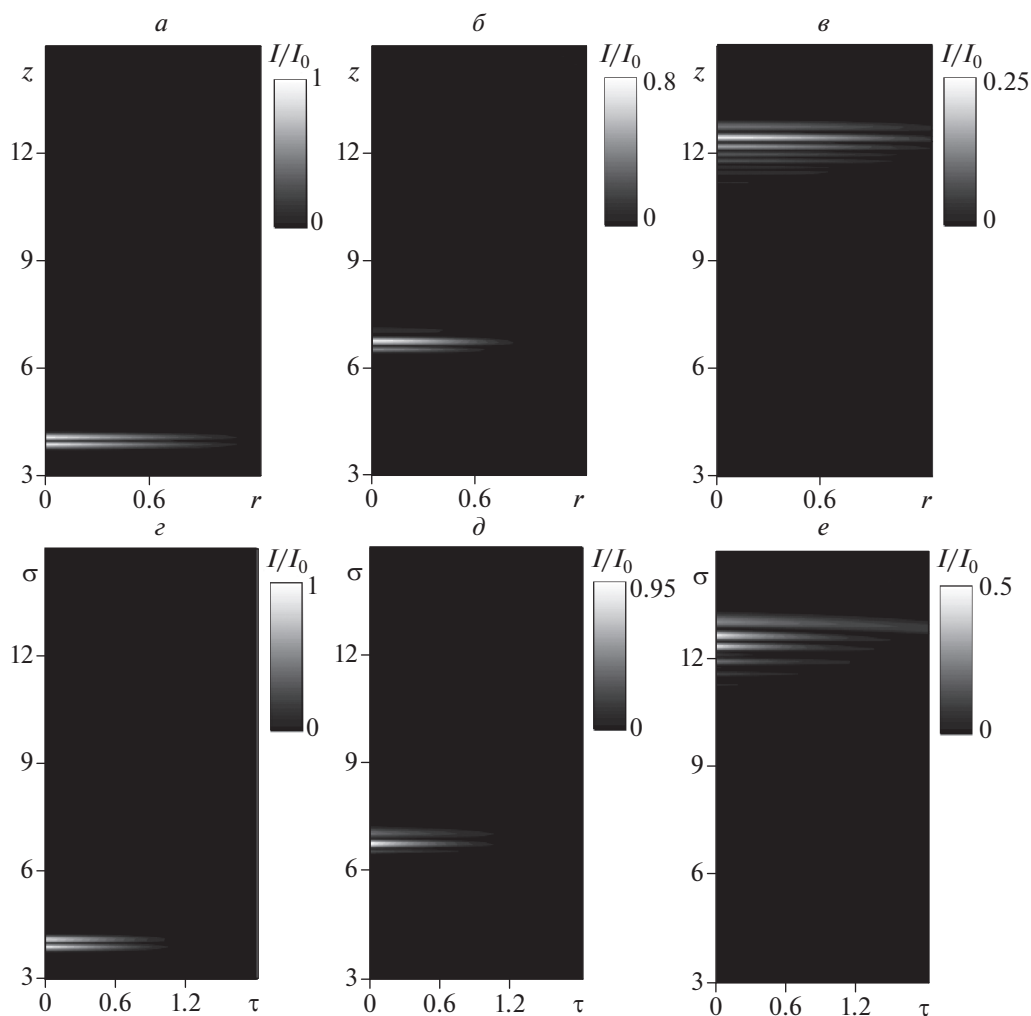
$$c e_0(z, q) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( 1 - \frac{q}{2} \cos(2z) + q^2 \left( \frac{\cos(4z) - 2}{32} \right) - \right. \quad (9)$$

$$\left. - q^3 \left( \frac{\cos(6z) - 99 \cos(2z)}{1152} \right) + \dots \right).$$

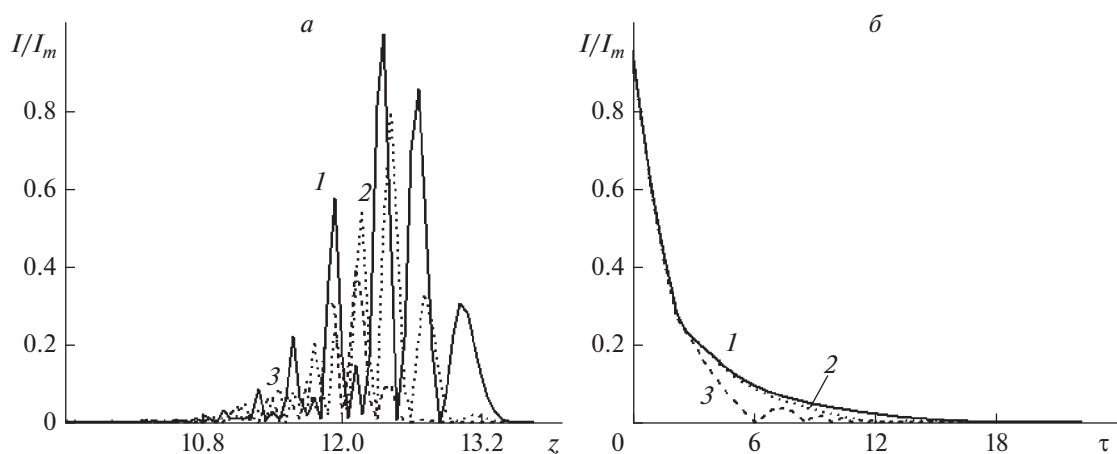
Эволюционная картина для трехмерного импульса при его распространении по образцу приведена на рис. 1.

Из рис. 1 видно, что импульсы распространяются по образцу, оставаясь локализованным. Стоит отметить их уширение с течением времени.

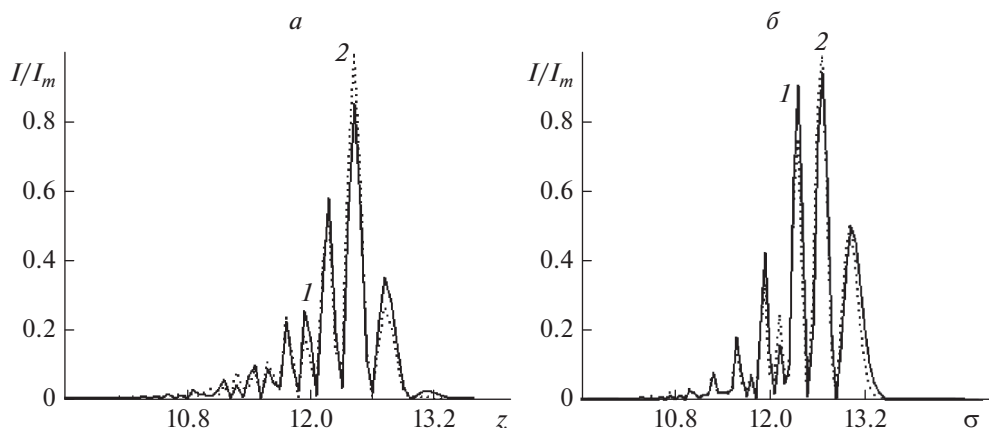
Влияние параметров функции Бесселя ( $\gamma_r$ ) и Матьё ( $\gamma_z$ ) на распространение импульса продемонстрировано на рис. 2 и 3. Видно, что, задавая соответствующим образом начальные условия для импульса Бесселя (рис. 2а) можно управлять формой



**Рис. 1.** Эволюция импульса Бесселя ( $a-e$ ) и Матьё ( $z-e$ ):  $t = 0$  ( $a, z$ ),  $7 \cdot 10^{-14}$  ( $b, \delta$ ),  $2 \cdot 10^{-13}$  с ( $e, e$ ). Единица по осям  $r, z, \tau$  и  $\sigma$  соответствует  $2 \cdot 10^{-5}$  м.  $I_0$  – максимальная интенсивность в начальный момент времени.



**Рис. 2.** Зависимость напряженности электрического поля импульса:  $t = 2 \cdot 10^{-13}$  с. Импульс Бесселя (продольные срезы при  $r = 0$ ): кривая 1 соответствует  $\gamma_r = 0.01$ ; кривая 2 –  $\gamma_r = 0.1$ ; кривая 3 –  $\gamma_r = 0.2$  (в единицах  $r$ ) ( $a$ ). Импульс Матьё при фиксированном значении координаты  $\sigma$ , для которой наблюдается максимум поля: кривая 1 соответствует  $\gamma_\tau = 0.02$ ; кривая 2 –  $\gamma_\tau = 0.01$ ; кривая 3 –  $\gamma_\tau = 0.005$  (в единицах  $\tau$ ) ( $b$ ). Единица по осям  $z$  и  $\tau$  соответствует  $2 \cdot 10^{-5}$  м.  $I_m$  – максимальная интенсивность для указанных параметров.



**Рис. 3.** Зависимость напряженности электрического поля импульса: Бесселя (а) и Матьё (б) при  $t = 2 \cdot 10^{-13}$  с. Представлены продольные срезы при нулевом значении поперечной координаты: кривая 1 соответствует  $R = Q = -D = -0.1$ ; кривая 2 –  $R = Q = -D = -1$  (в единицах интеграла перескока 2.7 эВ). Единица по осям  $z$  и  $\sigma$  соответствует  $2 \cdot 10^{-5}$  м.  $I_m$  – максимальная интенсивность для указанных параметров.

предельно короткого импульса при распространении в массиве УНТ. Это дает перспективы для практических приложений, связанных с длительностью ПКИ. Аналогичным образом обстоит дело и с начальными условиями в виде функций Матьё (рис. 2б). Управляя начальными условиями, можно задавать ту или иную поперечную структуру импульса, сосредотачивая энергию или в центре, или в “крыльях”.

Влияние параметров примеси на импульс представлено на рис. 3. Отметим, что наиболее сильно примеси влияют на распространение импульса Бесселевой формы и изменяют его амплитуду сильнее, чем в случае импульса Матьё. Это, в свою очередь, позволяет управлять формой импульсов путем допирования, и контролировать степень допирования по форме ПКИ. Причина же изменения формы импульсов связана с изменением закона дисперсии для электронов в УНТ.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Имеет место возможность локализованного распространения импульса, обусловленная балансом двух процессов – дисперсии и нелинейности. Дисперсионное уширение импульсов в ходе распространения можно компенсировать подбором соответствующих параметров начальной формы импульса (ширины, параметра функции Матьё  $q$ ), с помощью которых возможно управление формой предельно короткого оптического импульса и его локализацией. Выявлено, что за счет введения примеси можно контролировать амплитуду предельно короткого импульса. Наибольшее влияние параметры примеси оказывают на импульсы с поперечным сечением Бесселя.

Авторы выражают благодарность Министерству науки и высшего образования РФ за поддержку в рамках государственного задания (численное моделирование; проект № 0633-2020-0003).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Recami E.* // *Physica A.* 1998. V. 252. P. 586.
2. *Ziolkowski R.W.* // *Phys. Rev. A.* 1989. V. 39. P. 2005.
3. *Zamboni-Rached M., Recami E., Hernández-Figueroa H.E.* // *Eur. Phys. J. D.* 2002. V. 21. P. 217.
4. *Durnin J., Miceli J.J., Eberly J.H.* // *Phys. Rev. Lett.* 1987. V. 58. P. 1499.
5. *Gutiérrez-Vega J.C., Iturbe-Castillo M.D., Chávez-Cerda S.* // *Opt. Lett.* 2000. V. 25. P. 1493.
6. *Mihalache D.* // *Rom. Rep. Phys.* 2021. V. 73. Art. No. 403.
7. *Saito R., Dresselhaus M.S.* *Optical properties of carbon nanotubes.* Amsterdam: Elsevier, 2014. P. 77.
8. *Белоненко М.Б., Лебедев Н.Г., Попов А.С.* // *Письма в ЖЭТФ.* Т. 91. № 9. С. 506; *Belonenko M.B., Lebedev N.G., Popov A.S.* // *JETP Lett.* 2010. V. 91. No. 9. P. 461.
9. *Belonenko M.B., Dvuzhilov I.S., Nevzorova Yu.V. et al.* // *JNEP.* 2016. V. 8. No. 3. Art. No. 03042.
10. *Konobeeva N.N., Belonenko M.B.* // *Mod. Phys. Lett. B.* 2017. V. 31. No. 2. Art. No. 1750005.
11. *Белоненко М.Б., Мостовая Е.И.* // *Опт. и спектроск.* 2019. Т. 126. С. 563; *Belonenko M.B., Mostovaya E.I.* // *Opt. Spectrosc.* 2019. V. 126. P. 482.
12. *Gutiérrez-Vega J.C., Iturbe-Castillo M.D., Ramírez G.A.* // *Opt. Comm.* 2001. V. 195. P. 35.
13. *Zhukov A.V., Bouffanais R., Fedorov E.G. et al.* // *J. Appl. Phys.* 2013. V. 114. Art. No. 143106.
14. *Zhukov A.V., Bouffanais R., Konobeeva N.N. et al.* // *EPL.* 2014. V. 106. Art. No. 37005.

15. *Елецкий А.В.* // УФН. 1997. Т. 167. № 9. С. 945; *Елецкий А.В.* // Phys. Usp. 1997. V. 40. P. 899.
16. *Dresselhaus M.S., Dresselhaus G., Eklund P.C.* Science of fullerenes and carbon nanotubes. San Diego: Academic Press, 1996. 965 p.
17. *Belonenko M.B., Demushkina E.V., Lebedev N.G.* // J. Russ. Laser Res. 2006. V. 27. P. 457.
18. *Абрамовиц М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям, с формулами, графиками и тематическими таблицами. М.: Наука, 1979. 832 с.

### 3D Mathieu and Bessel pulses in an array of impurity carbon nanotubes

**M. B. Belonenko<sup>a, \*</sup>, N. N. Konobeeva<sup>a</sup>**

<sup>a</sup> *Volgograd State University, Volgograd, 400062 Russia*

<sup>\*</sup>*e-mail: mbelonenko@yandex.ru*

The propagation of three-dimensional pulses with a Mathieu and Bessel cross section in an array of semiconductor carbon nanotubes with impurities is investigated. Based on the Maxwell's equations, we obtain an effective equation for the vector potential of the electromagnetic field. The dependence of the pulse shape on the impurity parameters and the parameters of Mathieu and Bessel functions is analyzed.