

УДК 535.36

ОБ АНАЛИТИЧЕСКИХ ПОДХОДАХ, ОПИСЫВАЮЩИХ ДИНАМИКУ ПУЧКА, РАСПРОСТРАНЯЮЩЕГОСЯ В РЕЖИМЕ МНОГОФОТОННОЙ ИОНИЗАЦИИ

© 2022 г. В. А. Халяпин^{1, 2, *}, А. Н. Бугай³

¹Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
“Балтийский федеральный университет имени Иммануила Канта”, Калининград, Россия

²Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
“Калининградский государственный технический университет”, Калининград, Россия

³Международная межправительственная организация
“Объединенный институт ядерных исследований”, Дубна, Россия

*E-mail: slavasxi@gmail.com

Поступила в редакцию 24.08.2021 г.

После доработки 06.09.2021 г.

Принята к публикации 22.09.2021 г.

На основе метода моментов и подхода, связанного с приосевым приближением, рассмотрена задача о распространении пучка в режиме многофотонной ионизации. Получена система уравнений на параметры пучка и найдены условия квазиустойчивого распространения. Результаты аналитических подходов верифицированы с помощью численного эксперимента.

DOI: 10.31857/S0367676522010148

ВВЕДЕНИЕ

Хорошо известно, что в средах с кубической нелинейностью пучки, планарные сигналы и трехмерные импульсы неустойчивы [1]. В то же время интенсивные сигналы способны генерировать плазму за счет фотоионизации и формировать плазменный канал, вдоль которого распространение может быть квазиустойчивым [2–11]. В настоящей работе рассматривается динамика оптических пучков, распространяющихся в режиме многофотонной ионизации, и рассматривается вопрос об их устойчивости с помощью двух аналитических методов: метода моментов [1, 12–14] и метода приосевого приближения [11, 15]. Представляется интересным сравнить результаты этих методов с численным экспериментом и выявить наиболее адекватный.

МЕТОД МОМЕНТОВ

В настоящей работе рассматривается динамика филаментов, распространяющихся в режиме многофотонной ионизации, с помощью метода моментов и подхода, связанного с приосевым приближением. Уравнения, описывающие соответствующую динамику, имеют вид [11]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial z} - i\gamma \Psi |\Psi|^2 - \frac{i\mu}{2} \Delta_{\perp} \Psi + \eta \left(1 + i \frac{\omega}{v}\right) N_e \Psi + \\ + \Phi \frac{\sigma^{(n)} I^n}{|\Psi|^2} \Psi = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\frac{\partial N_e}{\partial t} = \sigma^{(n)} (N_0 - N_e) I^n - \beta N_e^2. \quad (2)$$

Здесь Ψ – огибающая электрического поля, z – координата распространения, $\eta = 2\pi e^2 v / \omega m_e k_0 c^2$ – параметр, связанный с электронной плазмой, e , m_e – заряд и масса электрона соответственно, c – скорость света в вакууме, $1/\mu = k_0 = 2\pi n_0 / \lambda_0 = \omega n_0 / c$, n_0 – линейный показатель преломления, ω – несущая частота, v – частота столкновения электронов с атомами, λ_0 – длина волны света в вакууме, N_0 – плотность нейтральных молекул, N_e – плотность электронов, $\gamma = 3\pi \chi^{(3)} \omega / 2n_0 c$ – параметр, определяющий кубическую нелинейность, $\chi^{(3)}$ – нелинейная восприимчивость третьего порядка, I – интенсивность, $\sigma^{(n)}$ – коэффициент n – фотонной ионизации, β – коэффициент рекомбинации электронов с положительными ионами. В соответствии с [11] можно найти равновесную электронную плотность N_{eq} как решение уравнения (2) с нулевой производной

$$N_{eq} = \sqrt{\frac{N_0 \tilde{\sigma} |\Psi|^{2n}}{\beta}}, \quad (3)$$

где $\tilde{\sigma} = \sigma^{(n)} (cn_0 / 8\pi)^n$.

В аналитических расчетах мы будем пренебрегать вкладом поглощения. Численный эксперимент, приведенный ниже, поможет нам опре-

делить, на каких расстояниях такой подход будет справедлив. Сперва получим уравнения на параметры филамента, используя метод моментов [12]. Выберем пробную функцию в виде

$$\psi = B \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{r}{R} \right)^2 + i \left(\phi - \frac{\varepsilon r^2}{2R^2} \right) \right], \quad (4)$$

где B – амплитуда сигнала, R – параметр, пропорциональный радиусу сигнала, ε – описывает кривизну волновых поверхностей, ϕ – фаза. Все параметры зависят от координаты z . Определим моменты пучка следующим образом

$$E = \int_0^{\infty} |\psi|^2 2\pi r dr, \quad (5)$$

$$R^2 = \frac{1}{E} \int_0^{\infty} |\psi|^2 2\pi r^3 dr, \quad (6)$$

$$\varepsilon = \frac{i}{2E} \int_0^{\infty} (\psi^* \nabla_{\perp} \psi - \psi \nabla_{\perp} \psi^*) 2\pi r^2 dr. \quad (7)$$

Здесь E – величина, пропорциональная мощность пучка $P = cn_0 E / 8\pi$.

Дифференцируя (5)–(7) по z и используя (4), получаем систему уравнений

$$\frac{dE}{dz} = 0, \quad (8)$$

$$\frac{dR^2}{dz} = \frac{i\mu}{E} \int_0^{\infty} (\psi \nabla_{\perp} \psi^* - \psi^* \nabla_{\perp} \psi) 2\pi r^2 dr, \quad (9)$$

$$\frac{d\varepsilon}{dz} = \frac{1}{E} \int_0^{\infty} \left(-\gamma r |\psi|^2 \nabla_{\perp} |\psi|^2 - \mu |\nabla_{\perp} \psi|^2 + \frac{\eta\omega}{v} r |\psi|^2 \nabla_{\perp} N_{eq} \right) 2\pi r dr. \quad (10)$$

Выражение для фаз ϕ можно получить из уравнения

$$\int_0^{\infty} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial z} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial z} - 2i\gamma |\psi|^4 + 2i\eta N_{eq} |\psi|^2 - \frac{i\mu}{2} (\psi^* \Delta_{\perp} \psi + \psi \Delta_{\perp} \psi^*) \right) 2\pi r dr = 0. \quad (11)$$

Следуя методу моментов, получаем систему уравнений

$$E = \pi B^2 R^2 = const, \quad (12)$$

$$\frac{d\rho}{dz} = -\frac{\varepsilon}{L_D \rho}, \quad (13)$$

$$\frac{d\varepsilon}{dz} = -\frac{1}{L_D \rho^2} (1 + \varepsilon^2) + \frac{1}{L_N \rho^2} - \frac{1}{L_{\eta} \rho^n}, \quad (14)$$

$$\frac{d\phi}{dz} = -\frac{1}{L_D \rho^2} + \frac{3}{2L_N} - \frac{(n+1)}{nL_{\eta}}. \quad (15)$$

Здесь $\rho = R/R_0$ – относительный радиус, R_0 – начальный радиус, $L_D = R_0^2/\mu$, $L_N = 2/\gamma B^2$, $L_{\eta} = (n+2)^2 \sqrt{\beta}/4m\eta B^n \sqrt{\sigma N_0}$ – характерные дифракционная, нелинейная и ионизационная длины. Величина E пропорциональна мощности пучка $P = cn_0 E / 8\pi$. Решая (12)–(14), получаем уравнение, аналогичное второму закону Ньютона для частицы единичной массы в потенциальном поле

$$\frac{d^2 \rho}{dz^2} = -\frac{\partial U}{\partial \rho}. \quad (16)$$

Здесь U – имеет смысл энергии частицы в потенциальной яме. С точностью до константы интегрирования находим

$$U = -\left(\frac{L_D}{L_N} - 1 \right) \frac{1}{2L_D \rho^2} + \frac{1}{nL_D L_{\eta} \rho^n}. \quad (17)$$

Устойчивое стационарное распространение пучка возможно, если выполняются условия

$$\frac{\partial U}{\partial \rho}(\rho = 1) = 0, \quad (18)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2}(\rho = 1) > 0. \quad (19)$$

Отсюда с учетом (17) находим

$$\frac{L_D}{L_{\eta}} = \frac{L_D}{L_N} - 1, \quad (20)$$

$$n > 2. \quad (21)$$

Условие (20) можно переписать в виде

$$\frac{1}{R_0} = \sqrt{\frac{\pi I}{P_c} - \frac{4m\eta k_0 I^{n/2}}{(n+2)^2} \sqrt{\frac{\sigma^{(n)} N_0}{\beta}}}, \quad (22)$$

где P_c – критическая мощность, определяемая выражением

$$P_c = \frac{cn_0}{4k_0 \gamma} = \frac{c\lambda_0^2 n_0}{24\pi^3 \chi^{(3)}}. \quad (23)$$

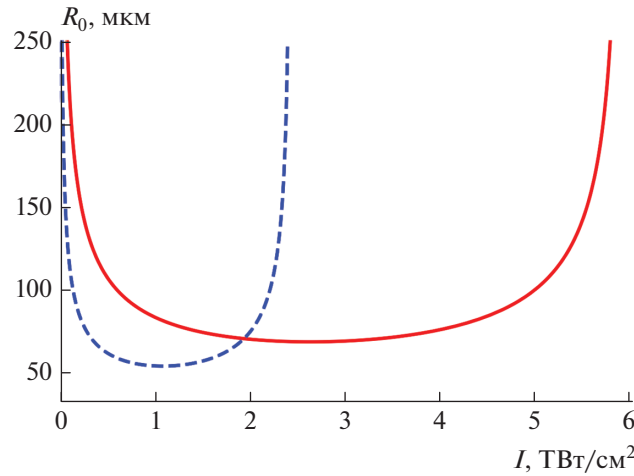


Рис. 1 Зависимость стационарного радиуса филамента R_0 от его пиковой интенсивности I в воздухе на длине волны 248.6 нм. Сплошная кривая соответствует формуле (22) (предсказание метода моментов), а штриховая кривая – формуле (29) (предсказание приосевого приближения).

Таким образом, стационарное решение для плоского фронта и начального радиуса, определяемого согласно (22), имеет вид

$$\psi = \frac{8\pi I}{cn_0} \times \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{r}{R_0} \right)^2 + i \left(-\frac{1}{L_D} + \frac{3}{2L_N} - \frac{(n+1)}{nL_\eta} \right) z \right]. \quad (24)$$

МЕТОД ПРИОСЕВОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

Применим другой аналитический подход к решению данной задачи. Для этого пробное решение (4) подставляем в (1) и рассматриваем приосевую область пучка ($r^2/R^2 \ll 1$). Это позволяет в нелинейных слагаемых использовать разложение $|\psi|^n \approx B^n (1 - nr^2/2R^2)$. Приравнивая слагаемые перед нулевой и второй степенями r и отделяя действительную и мнимую части, находим систему уравнений

$$\frac{dB}{dz} = \frac{B\varepsilon}{L_D \rho^2}, \quad (25)$$

$$\frac{d\rho}{dz} = -\frac{\varepsilon}{L_D \rho}, \quad (26)$$

$$\frac{d\varepsilon}{dz} = -\frac{1}{L_D \rho^2} (1 + \varepsilon^2) + \frac{4}{L_N \rho^2} - \frac{1}{L_\eta \rho^n} \left(\frac{n}{2} + 1 \right)^2, \quad (27)$$

$$\frac{d\varphi}{dz} = -\frac{1}{L_D \rho^2} + \frac{2}{L_N} - \frac{1}{nL_\eta} \left(\frac{n}{2} + 1 \right)^2. \quad (28)$$

Легко показать, что из (25) и (26) можно перейти к выражению (12). Сравнивая систему (12)–(15) и (25)–(26), можно заметить, что линейные слагае-

мые у них одинаковы, а различия проявляются в нелинейных слагаемых (кубическая нелинейность и ионизация). Для этого подхода начальный радиус пучка, при котором реализуется квазиустойчивый баланс между нелинейностью, дифракцией и ионизационной расходимостью, определяется следующим образом

$$\frac{1}{R_0} = \sqrt{\frac{4\pi I}{P_c} - m\eta k_0 I^{n/2} \sqrt{\frac{\sigma^{(n)} N_0}{\beta}}}. \quad (29)$$

Из сравнения (22) и (29) видно, что без учета вклада ионизации критическая мощность, определяемая с помощью метода моментов, в четыре раза больше таковой, получаемой с помощью приосевого приближения. Слагаемые же, связанные с ионизацией, по-разному себя ведут в зависимости от n . Стационарное решение в этом подходе определяется согласно

$$\psi = \frac{8\pi I}{cn_0} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{r}{R_0} \right)^2 + i \left(-\frac{1}{L_D \rho^2} + \frac{2}{L_N} - \frac{1}{nL_\eta} \left(\frac{n}{2} + 1 \right)^2 \right) z \right]. \quad (30)$$

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Представляет интерес численное исследование, которое позволит выявить, какой из подходов дает лучшие результаты в рамках данной задачи. В качестве среды рассмотрим воздух, где основной вклад в образование плазмы дает кислород. Материальные параметры, входящие в уравнения (1), (2) для импульсов на длине волны 248.6 нм, взяты из [11].

Как видно из рис. 1 метод моментов и приосевое приближение дают различные предсказания

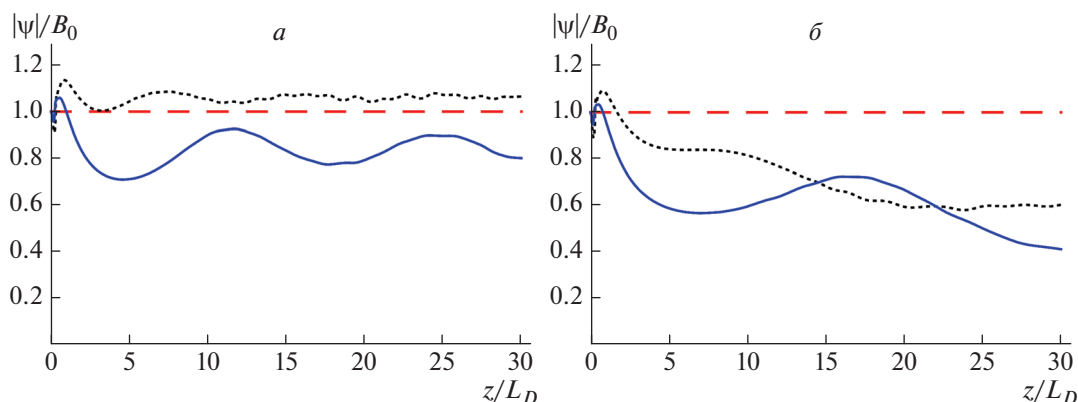


Рис. 2. Изменение пиковой амплитуды филамента при его распространении в среде, соответствующая численному решению (1), (2) с начальным условием (24) при $R_0 = 70$ нм (пунктирная кривая), и с начальным условием (30) при $R_0 = 63$ нм (сплошная кривая) и начальной интенсивности $I = 1.8 \cdot 10^{12}$ Вт \cdot см $^{-2}$ без учета (а) и с учетом (б) эффектов поглощения. Штриховая линия соответствует ожидаемому в теории стационарному режиму.

для стационарного радиуса филамента в зависимости от его интенсивности. Отметим, что существует верхний предел по интенсивности филамента. Рассматриваемые подходы дают для данного предела различие примерно в 2.5 раза.

Проведем теперь численное интегрирование исходной системы уравнений в частных производных (1), (2), задав в качестве начальных условий выражения (24) и (30), предсказывающие стационарный режим распространения филамента методом моментов и приосевым приближением, соответственно. Краевые условия соответствуют нулевым значениям поля и концентрации электронов на границе области.

Результаты расчетов для начальной пиковой интенсивности $I = 1.8 \cdot 10^{12}$ Вт \cdot см $^{-2}$ приведены на рис. 2 и 3. В этом случае метод моментов и приосевое приближение дают близкие предсказания для стационарного радиуса филамента, $R_0 = 70$ нм и $R_0 = 63$ нм, соответственно. Как показывает моделирование, метод моментов дает лучший результат в рамках данной задачи. Амплитуда и радиус филамента отличаются от теоретического предсказания не более чем на 5% (рис. 2а, рис. 3а), в то время как в противоположном случае развивается осцилляционный режим относительно среднего значения амплитуды на 20% меньше ожидаемого (рис. 2а, рис. 3б). Для начальной пиковой интенсивности $I = 3 \cdot 10^{12}$ Вт \cdot см $^{-2}$ приосевое приближение предсказывает отсутствие устойчивого режима. В этом случае численное моделирование (1), (2) с начальным условием (24), где $R_0 = 68$ нм, показывает хорошее соответствие с предсказанием метода

моментов аналогично пунктирной кривой на рис. 2а. При интенсивностях $I = 1.6 \cdot 10^{12}$ Вт \cdot см $^{-2}$ и меньше предсказание приосевого приближения для квазистационарного режима не оправдывается, а развивается дефокусировка филамента.

Следует отметить, что рассматриваемый баланс носит квазиустойчивый характер вследствие влияния нелинейного поглощения. Характерный масштаб проявления эффектов поглощения за счет потерь энергии на ионизацию среды можно оценить как $L_{abs} = V / (\Phi \sigma^{(n)} I^n)$. Как следует из рис. 2б, квазиустойчивый филамент постепенно теряет энергию, а его радиус при этом изменяется незначительно (рис. 3в, 3г). Таким образом, поглощение не приводит к распаду филамента, а лишь к ослаблению его интенсивности.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Получено аналитическое описание распространения филаментов в режиме взаимной компенсации эффектов дифракции и ионизационной расходимости, с одной стороны, и самофокусировки, с другой. С помощью метода моментов и метода приосевого приближения проанализирована динамика филаментов в газе в режиме многофотонной ионизации (для произвольного порядка процесса ионизации). Получены условия квазистационарного распространения филамента. Следует отметить, что более простое математически приосевое приближение следует использовать с осторожностью в данной задаче, так как происходит недооценка роли профиля импульса. Численное моделирование показывает, что потери на ионизацию не приводят к распаду филамента, а лишь к ослабле-

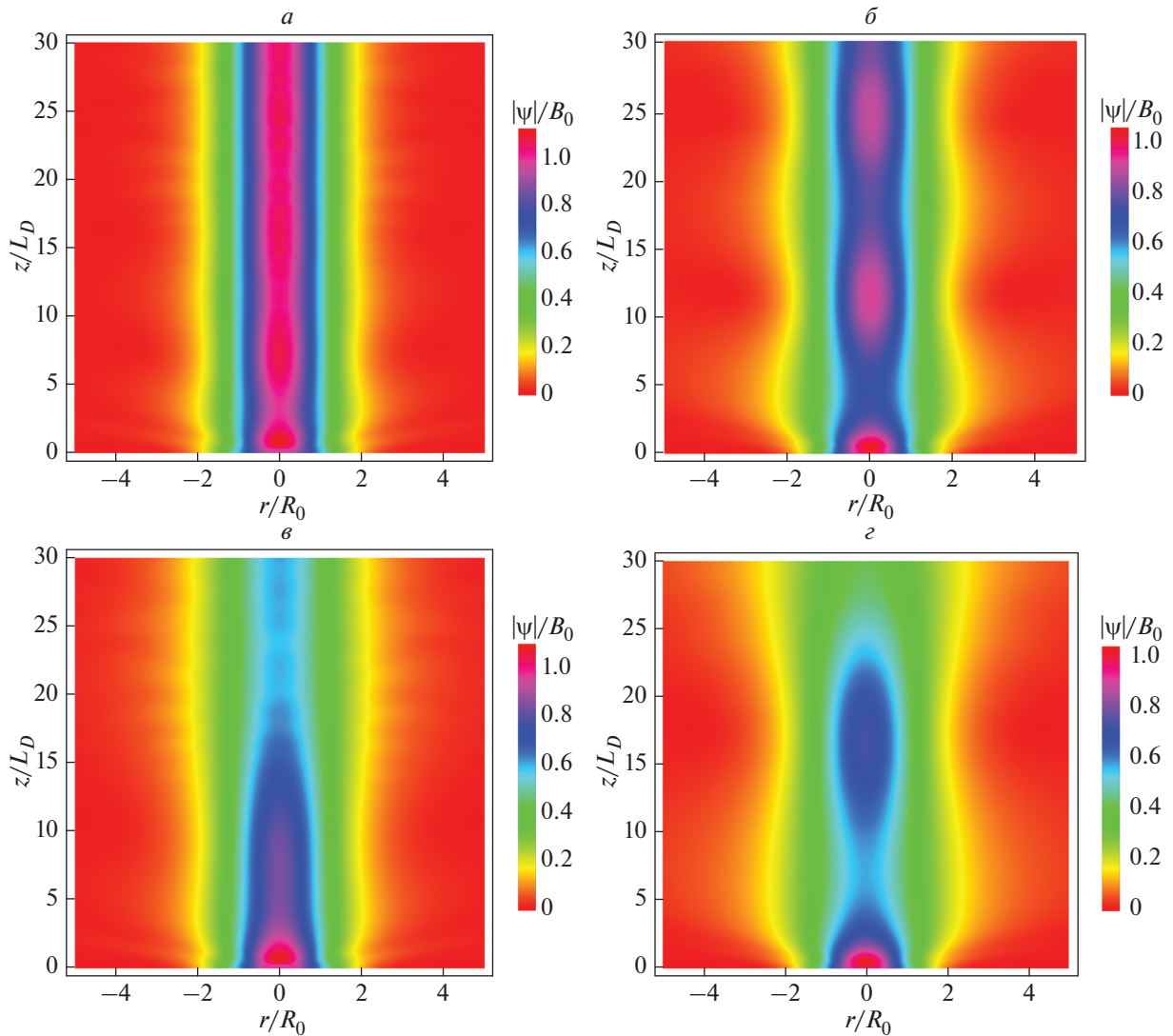


Рис. 3. Пространственная динамика филамента при его распространении в среде, соответствующая численному решению (1), (2) с начальным условием (24) при $R_0 = 70$ нм (*a*, *в*), и с начальным условием (30) при $R_0 = 63$ нм (*б*, *г*) и начальной интенсивности $I = 1.8 \cdot 10^{12}$ Вт \cdot см $^{-2}$ без учета (*a*, *б*) и с учетом (*в*, *г*) эффектов поглощения. Цветом обозначено относительное изменение амплитуды.

нию его интенсивности, вследствие чего рассмотренный режим можно считать квазистойчивым.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-02-00234а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kivshar Yu.S., Agrawal G.P. Optical solitons: from fibers to photonic crystals. N.Y.: Academic Press Inc., 2003.
2. Couairon A. // Eur. Phys. J. D. 1996. V. 27. P. 159.
3. Henz S., Herrmann J. // Phys. Rev. E. 2006. V. 53. Art. No. 4092.
4. Sprangle P., Penano J.R., Hafizi B. // Phys. Rev. E. 2002. V. 66. Art. No. 046418.
5. Esarey E., Sprangle P., Ting A. // Quant. Electron. 1997. V. 33. P. 1879.
6. Sprangle P., Esarey E., Krall J. // Phys. Rev. E. 1996. V. 54. Art. No. 4211.
7. Penano J., Palastro J.P., Hafizi B. et al. // Phys. Rev. A. 2017. V. 96. Art. No. 013829.
8. Couairon A., Mysyrowicz A. // Phys. Rep. 2007. V. 441. P. 47.
9. Chekalin S.V., Dokukina E.A., Dormidonov A.E. et al. // J. Phys. B. 2015. V. 48. Art. No. 094008.
10. Воронин А.А., Желтиков А.М. // УФН. 2016. Т. 186. № 9. С. 957; Voronin A.A., Zheltikov A.M. // Phys. Usp. 2016. V. 59. P. 869.
11. Schwarz J., Diels J.C. // Phys. Rev. A. 2001. V. 65. Art. No. 013806.

12. *Santhanam J., Agraval G.* // Opt. Commun. 2003. V. 222. P. 413.
13. *Власов С.Н., Петрищев В.А., Таланов В.И.* // Изв. вузов. Радиофиз. 1971. Т. 14. № 9. С. 1453.
14. *Маймистов А.И.* // ЖЭТФ. 1993. Т. 104. № 5. С. 3620.
15. *Ахманов С.А., Сухоруков А.П., Хохлов Р.В.* // УФН. 1967. Т. 93. С. 19; *Akhmanov S.A., Sukhorukov A.P., Khokhlov R.V.* // Sov. Phys. Usp. 1968. V. 10. P. 609.

On the analytical approaches describing the dynamics of a beam propagating in the multiphoton ionization mode

V. A. Khalyapin^{a, b, *}, A. N. Bugay^c

^a *Immanuel Kant Baltic Federal University, Kalinigrad, Russia*

^b *Kaliningrad State Technical University, Kaliningrad, Russia*

^c *Joint Institute for Nuclear Research, Dubna, Russia*

**e-mail: slavasxi@gmail.com*

The problem of beam propagation in the multiphoton ionization regime is considered using the moments method and the approach associated with the axial approximation. A system of equations for the beam parameters is obtained, and conditions for quasi-stable (neglecting absorption) propagation are found. The results of analytical approaches are verified by a numerical experiment.