

УДК 535.36

## ОБ АНАЛИТИЧЕСКОМ ОПИСАНИИ ДИНАМИКИ ПЛАНАРНЫХ ИМПУЛЬСОВ, РАСПРОСТРАНЯЮЩИХСЯ В РЕЖИМЕ ТУННЕЛЬНОЙ ИОНИЗАЦИИ

© 2022 г. В. А. Халяпин<sup>1, 2, \*</sup>, А. Н. Бугай<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования  
“Балтийский федеральный университет имени И. Канта”, Калининград, Россия

<sup>2</sup>Федеральное государственное образовательное бюджетное учреждение высшего образования  
“Калининградский государственный технический университет”, Калининград, Россия

<sup>3</sup>Международная межправительственная организация  
“Объединенный институт ядерных исследований”, Дубна, Россия

\*E-mail: slavasxi@gmail.com

Поступила в редакцию 30.06.2022 г.

После доработки 15.07.2022 г.

Принята к публикации 22.07.2022 г.

На основе метода моментов рассмотрена задача о динамике планарного импульса, распространяющегося в режиме туннельной ионизации. Получена система уравнений на параметры сигнала, с помощью метода Ляпунова найдены условия его квазистойчивого распространения.

DOI: 10.31857/S036767652211014X

### ВВЕДЕНИЕ

Исследование динамики интенсивных импульсов, распространяющихся в режиме ионизации, представляет как теоретический, так и практический интерес в связи с их применением в различных областях: дистанционном зондировании атмосферы [1], управлении молниями [2], генерации суперконтинуума [3], генерации терагерцового излучения [4] и др. Хорошо известно, что решение нелинейного уравнения Шрёдингера (НУШ) устойчиво только для одномерного случая  $D = 1$ , который отвечает чисто пространственным или временным сигналам. При размерности  $D = 2$ , что соответствует пучкам или планарным пространственно-временным импульсам и при  $D = 3$ , соответствующей оптическим пучкам, решения не устойчивы [5]. Для стабилизации сигналов с  $D > 1$  были предложены такие механизмы как насыщающая нелинейность [6], конкурирующие нелинейности [7], дифракция или дисперсия более высокого порядка [8], градиентный волновод [9], генерация второй гармоники [10]. Было показано, что ионизация также может стабилизировать сигнал [11–18]. Эта стабилизация обусловлена балансом между самофокусировкой, дифракцией и плазменной расходимостью. Известно, что ионизация приводит к сдвигу спектра импульса в сторону более высоких частот [19–21]. Это обусловлено генерацией свободных электро-

нов и приводит к отрицательному значению показателя преломления и, следовательно, к синему смещению спектра сигнала. Это явление противоположно хорошо известному вынужденному комбинационному саморассеянию (ВКС) [22–26].

Ионизация диэлектрика интенсивным световым импульсом может быть описана с помощью формулы Келдыша [27]. Различают два предельных режима (в зависимости от параметра Келдыша): многофотонный и режим туннельной ионизации. Аналитическое исследование импульсов, распространяющихся в режиме туннельной ионизации, представляет интерес поскольку область аномальной дисперсии групповой скорости для большинства сред относится к инфракрасной полосе пропускания [28]. Предел туннельной ионизации изучался в основном с помощью экспериментов и численного моделирования [28]. Это связано с математическими затруднениями, которые возникают при описании вклада туннельной ионизации в динамику сигнала. В работе [19] формула Келдыша для режима туннельной ионизации была аппроксимирована линейной функцией, а авторы [29] предложили использовать для этой цели степенную зависимость скорости ионизации от интенсивности. Недостатками этих подходов является то, что параметры приближенных формул для скорости ионизации приходится каждый раз подбирать в зависимости от рассматриваемого диапазона интенсивностей. В

настоящей работе мы предлагаем подход к приближенному учету вклада туннельной ионизации, лишенный вышеотмеченных недостатков.

### МЕТОД МОМЕНТОВ

В настоящей работе рассматривается динамика планарных сигналов, распространяющихся в режиме туннельной ионизации, с помощью метода моментов [25, 30, 31]. Уравнения, описывающие соответствующую динамику, имеют вид

$$\frac{\partial \Psi}{\partial z} + \frac{i\beta_2}{2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \tau^2} - \frac{\beta_3}{6} \frac{\partial^3 \Psi}{\partial \tau^3} - i\gamma \Psi |\Psi|^2 + \frac{\gamma}{\omega} \frac{\partial}{\partial \tau} (\Psi |\Psi|^2) + i\gamma T_R \Psi \frac{\partial |\Psi|^2}{\partial \tau} + i\eta \Psi \int_{-\infty}^{\tau} W d\tau' - \frac{i\mu}{2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = 0. \quad (1)$$

Здесь  $\omega$  – центральная частота сигнала,  $k$  – волновое число на центральной частоте,  $z$  – координата, вдоль которой распространяется сигнал,  $x$  – поперечная координата,  $\tau = t - z/v_g$  – время в сопутствующей системе координат,  $v_g$  – групповая скорость на частоте  $\omega$ ,  $\mu = 1/k$ ,  $\eta = s\omega\tau_c N_0/2$  – параметр, связанный с электронной плазмой,  $s = k_0\omega\tau_c/n_0 N_c (1 + \omega^2\tau_c^2)$  – поперечное сечение лавинной ионизации,  $N_c = \epsilon_0 m_e \omega^2/e^2$  – критическая плотность плазмы, выше которой плазма перестает быть прозрачной,  $\epsilon_0$  – восприимчивость вакуума,  $\tau_c$  – время столкновения электронов,  $e$  и  $m$  – соответственно заряд и масса электрона,  $N_0$  – концентрация неионизированных молекул,  $W$  – степень ионизации, определяемая формулой Келдыша в пределе малых значений параметра Келдыша (режим туннельной ионизации).  $\beta_2$  – коэффициент дисперсии групповой скорости (ДГС),  $\beta_3$  – положительный параметр, определяющий дисперсию третьего порядка,  $\gamma$  – коэффициент кубической нелинейности,  $T_R$  – характеризует вклад ВКС. Коэффициент  $\beta_2$  положителен, если центральная частота импульса лежит в области нормальной дисперсии групповой скорости, и отрицателен в противоположном случае. Зависимость степени ионизации  $W$  от интенсивности  $I$  для диэлектрика в пределе туннельной ионизации определяется формулой Келдыша [27].

$$W = W_0 \left( \frac{|\Psi|}{B_T} \right)^{5/2} \exp\left(-\frac{B_T}{|\Psi|}\right). \quad (2)$$

Здесь  $W_0 = \sqrt{\pi} U_i^{5/2} m^{3/2} / 9\sqrt{8} \hbar^4 N_0$ ,  $B_T = \pi m^{1/2} U_i^{3/2} / 2e\hbar$ ,  $\hbar$  – постоянная Планка,  $U_i$  – потенциал ионизации.

Анализ динамики параметров импульса проводился на основе метода моментов. Пробное решение выберем в виде

$$\Psi = B \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\tau}{\tau_p}\right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{a}\right)^2 + i\left(\phi - \frac{C\tau^2}{2\tau_p^2} - \frac{\epsilon x^2}{2a^2}\right)\right], \quad (3)$$

где  $B$  – амплитуда сигнала,  $\tau_p$  – его длительность,  $C$  – параметр, определяющий частотную модуляцию,  $\phi$  – фаза,  $a$  – параметр, пропорциональный ширине планарного сигнала,  $\epsilon$  – описывает кривизну волновых поверхностей. Все параметры зависят от координаты  $z$ . Определим моменты импульса в виде

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi|^2 d\tau dx, \quad (4)$$

$$\tau_p^2 = \frac{2}{E} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tau^2 |\Psi|^2 d\tau dx, \quad (5)$$

$$a^2 = \frac{2}{E} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 |\Psi|^2 d\tau dx, \quad (6)$$

$$C = \frac{i}{E} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tau \left( \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial \tau} - \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial \tau} \right) |\Psi|^2 d\tau dx, \quad (7)$$

$$\epsilon = \frac{i}{E} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x \left( \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} \right) |\Psi|^2 d\tau dx. \quad (8)$$

Следуя методу моментов, получаем систему уравнений

$$E = B^2 \pi \tau_p a = \text{const}, \quad (9)$$

$$\frac{dv}{dz} = -\frac{C}{L_d v}, \quad (10)$$

$$\frac{d\rho}{dz} = -\frac{\epsilon}{L_D \rho}, \quad (11)$$

$$\frac{dC}{dz} = -\frac{(1+C^2)}{L_d v^2} + \frac{1}{L_N v \rho}, \quad (12)$$

$$\frac{d\epsilon}{dz} = -\frac{1}{L_D \rho^2} (1 + \epsilon^2) + \frac{1}{L_N v \rho} - \frac{\exp(-\sqrt{I_T v \rho} / I_0)}{L_\eta v^{3/4} \rho^{7/4}}. \quad (13)$$

В системе (10)–(13) были введены безразмерные параметры  $v = \tau_p/\tau_0$ ,  $\rho = a/a_0$ , где  $\tau_0$ ,  $a_0$  – начальные значения соответствующих параметров. Характерные дисперсионная, дифракционная, нелинейная и ионизационные длины определяются следующими выражениями  $L_d = \tau_0^2/|\beta_2|$ ,  $L_D = a_0^2/\mu$ ,  $L_N = cn_0/4\pi\gamma I_0$ ,  $L_\eta = I_T^{7/4}/2\sqrt{\pi}\eta W_0 \tau_0 I_0^{7/4}$ , где введены обозначения  $I_{0,T} = cn_0 B_{0,T}^2/8\pi$ . В выраже-

нии (13) для учета ионизационного слагаемого использовали оценку  $I_T/I \sim (U_i/\hbar\omega)^2 \gg 1$  и ключевое приближение  $\exp(B_T/|\psi|) \approx \exp(B_T/B_0 - (B_T/2B_0)(r^2/R^2 + \tau^2/\tau_p^2))$ , которое позволило нам учесть вклад туннельной ионизации в динамику сигнала.

### СТАЦИОНАРНОЕ РЕШЕНИЕ И ЕГО УСТОЙЧИВОСТЬ

Для того чтобы найти параметры стационарного состояния и условия его устойчивости, переписем (10)–(13) в виде

$$\frac{dv}{d\xi} = \frac{P_v}{m_v}, \quad (14)$$

$$\frac{dP_v}{d\xi} = -\frac{\partial U}{\partial v}, \quad (15)$$

$$\frac{d\rho}{d\xi} = \frac{P_\rho}{m_\rho}, \quad (16)$$

$$\frac{dP_\rho}{d\xi} = -\frac{\partial U}{\partial \rho} + \tilde{F}. \quad (17)$$

Здесь  $P_v = m_v dv/d\xi = -C/v$ ,  $P_\rho = m_\rho d\rho/d\xi = -\varepsilon/\rho$ ,  $m_v = 1$ ,  $m_\rho = L_D/L_d$ ,  $\xi = z/L_d$ . Систему (14)–(17) можно трактовать как механическую аналогию, описывающую движение частицы по поверхности с координатными осями  $v$  и  $\rho$  в потенциальном поле

$$U = \frac{1}{2v^2} + \frac{L_d}{2L_D\rho^2} - \frac{L_d}{L_N v\rho}. \quad (18)$$

При этом масса частицы зависит от направления движения. Роль внешней силы, действующей

вдоль координаты  $\rho$ , играет ионизационное слагаемое  $\tilde{F} = L_d \exp(-\sqrt{I_T v \rho}/I_0)/L_\eta v^{3/4} \rho^{11/4}$ . Стационарное решение этой системы уравнений можно записать как

$$L_d = L_N, \quad (19)$$

$$\frac{1}{L_D} = \frac{1}{L_N} - \frac{\exp(-\sqrt{I_T/I_0})}{L_\eta}. \quad (20)$$

Выражения (19), (20) можно переписать в виде

$$\tau_0 = \sqrt{\frac{2|\beta_2|}{k_0 n_2 I_0}}, \quad (21)$$

$$\frac{1}{a_0} = \sqrt{k_0 n_0 \left( \frac{k_0 n_2 I_T}{2X} - 2\sqrt{\pi} \eta W_0 \sqrt{\frac{2|\beta_2|}{k_0 n_2 I_T}} \frac{\exp(-\sqrt{X})}{X^{5/4}} \right)}. \quad (22)$$

Здесь  $X = I_T/I_0$  и мы использовали соотношение  $8\pi\gamma/cn_0 \equiv k_0 n_2$ , где  $n_2$  – нелинейный показатель преломления среды. Из (21), (22) следует, что с ростом интенсивности длительность сигнала уменьшается, а ширина увеличивается. Подкоренное выражение в (25) должно быть положительным (равенство нулю подкоренного выражения соответствует бесконечной ширине сигнала). Из этого условия находим

$$I_0 < 4I_T / (\tilde{W}(2A^2))^2, \quad (23)$$

где  $A = 4\eta W_0 \sqrt{2\pi|\beta_2|}/(k_0 n_2 I_T)^{3/2}$ ,  $\tilde{W}(x)$  – функция Ламберта [32].

Рассмотрим вопрос устойчивости стационарного решения (21), (22) системы (14)–(17). Следуя методу Ляпунова [33], получаем четыре собственных значения

$$\lambda = \pm \sqrt{\frac{-(U_{,vv} m_2 - dm_1) \pm \sqrt{(U_{,vv} m_2 - dm_1)^2 - 4m_1 m_2 (hU_{,vp} - dU_{,vv})}}{2m_1 m_2}}. \quad (24)$$

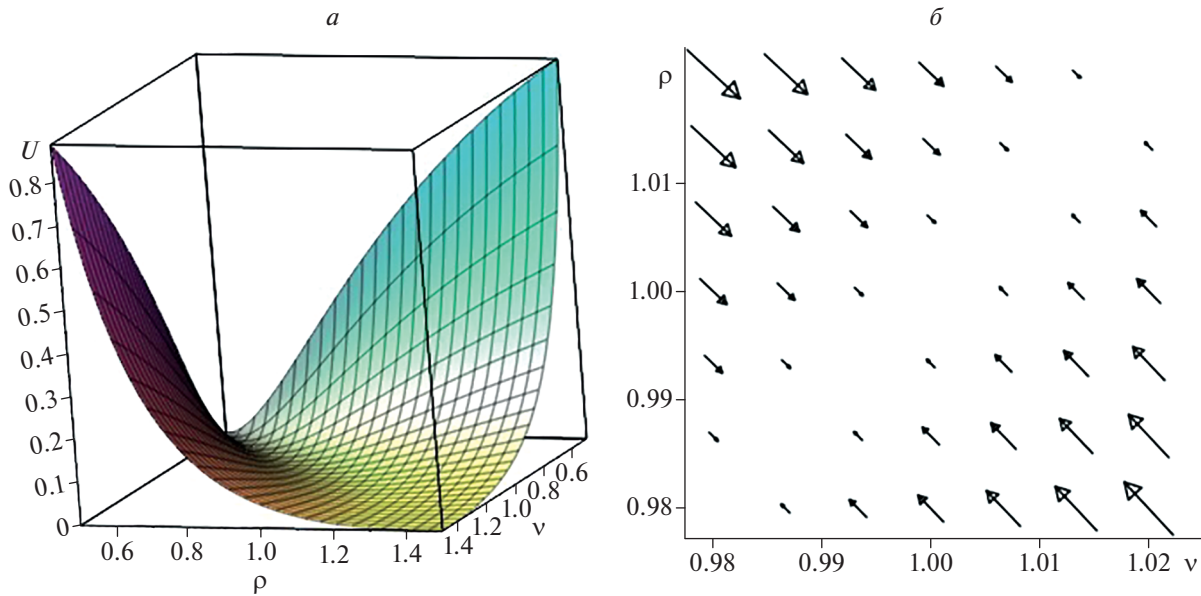
Здесь нижние индексы после запятой обозначают производную по соответствующим переменным,  $h = \tilde{F}_{,v} - U_{,vp}$ ,  $d = \tilde{F}_{,\rho} - U_{,\rho\rho}$ . Стационарное решение будет устойчивым, если  $\lambda$  не имеет положительной действительной части. Легко показать, что  $\lambda$  будет чисто мнимой, если выполняются условия

$$hU_{,vp} - dU_{,vv} > 0, \quad (25)$$

$$U_{,vv} m_2 - dm_1 > 0. \quad (26)$$

Равенство нулю действительной части означает, что вследствие малых возмущений параметры сигнала будут осциллировать в окрестности стаци-

онарных значений. Если убрать ионизационное слагаемое ( $\tilde{F} = 0$ ), то (25), (26) можно записать в виде условия минимума  $U_{,vv} U_{,\rho\rho} - (U_{,vp})^2 > 0$ ,  $U_{,vv} > 0$ . Как и следовало ожидать, потенциальная функция в этом случае не имеет минимума. На рис. 1а представлен вид потенциальной поверхности  $U$  без учета ионизации, а на рис. 1б соответствующее векторное поле  $F_v$ ,  $F_\rho$ . Если же учесть ионизацию, то в рамках используемого приближения ( $I_T/I_0 \gg 1$ ) условия (25), (26) выполняются при любых интенсивностях. Этот результат согласуется с полученным ранее в работе [34] выво-



**Рис. 1.** Потенциальное поле  $U(v, \rho)$ , определяющее динамику относительной длительности  $v$  и ширины  $\rho$  планарной пули (без вклада ионизации  $L_{\eta} = \infty$ ) (а). Соответствующее поле сил, проекции, которых определяются выражениями  $F_v = -\partial U/\partial v$ ,  $F_{\rho} = -\partial U/\partial \rho$  (б).

дом для планарных сигналов, в которой была использована линейная аппроксимация формулы Келдыша в туннельном пределе. Следует отметить, что при рассмотрении вопроса устойчивости мы пренебрегли смещением частоты сигнала. Учет этого эффекта привел бы к выводу систему из равновесия. Однако, поскольку смещение частоты входит в систему уравнений на параметры сигнала через высшую дисперсию ( $\beta_3$ ) и нелинейность ( $\gamma/\omega$ ) [34], то этой дестабилизацией на начальном этапе динамики можно пренебречь. Кроме того, как было показано в работах [28, 35, 36], поглощение, вызванное ионизацией, приводит к тому, что сигнал распространяется в режиме световой пули на расстояниях порядка нескольких миллиметров в диэлектрике.

Исследуем область интенсивностей, удовлетворяющую условию (23), в зависимости от центральной длины волны сигнала. В качестве материала возьмем сапфир. Для сапфира ( $U_I = 7.3$  эВ,  $N_0 = 2.36 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}$ ,  $\tau_c = 1.59 \cdot 10^{-15} \text{ с}$ ) приближенная зависимость показателя преломления от длины волны в среднем инфракрасном диапазоне может быть записана в виде [37]

$$n_0 = 1.75 \sqrt{1 + \frac{1.73(\lambda_{\text{мкм}})^2}{(\lambda_{\text{мкм}})^2 - 18^2}}, \quad (27)$$

а коэффициент ДГС определяется следующей зависимостью

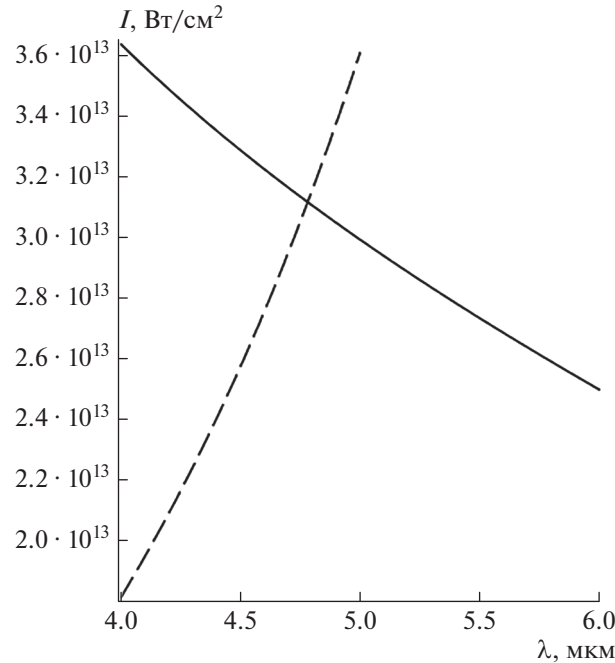
$$\beta_2 = \frac{\lambda^3}{2\pi c^2} \frac{d^2 n_0}{d\lambda^2}. \quad (28)$$

Нелинейный показатель преломления аппроксимируется выражением [38]

$$n_2 = n_2^0 + N_1 \exp\left(-\frac{(\lambda - \lambda_0)}{\lambda_1}\right) + N_2 \exp\left(-\frac{(\lambda - \lambda_0)}{\lambda_2}\right). \quad (29)$$

Здесь  $n_2^0 = 2.5 \cdot 10^{-16} \text{ см}^2/\text{Вт}$ ,  $N_1 = 2.3 \cdot 10^{-16} \text{ см}^2/\text{Вт}$ ,  $N_2 = 1.0 \cdot 10^{-16} \text{ см}^2/\text{Вт}$ ,  $\lambda_0 = 266.0 \text{ нм}$ ,  $\lambda_1 = 46.6 \text{ нм}$ ,  $\lambda_2 = 1086.3 \text{ нм}$ . Подставляя (27)–(29) в (23), находим искомую зависимость (рис. 2). Для области, лежащей правее пунктирной линии выполняется условие  $\omega\tau_p > 10$ , при котором справедливо используемое в работе приближение медленно меняющейся огибающей. Взяв  $I_0 = 2.8 \cdot 10^{13} \text{ Вт}/\text{м}^2$ ,  $\lambda = 5 \text{ мкм}$ , из (21), (22) находим оценки для параметров планарного импульса:  $\tau_0 = 30 \text{ фс}$ ,  $a = 10 \text{ мкм}$ .

Выше мы получили, что условия устойчивости планарной пули относительно возмущений ее длительности и ширины (25), (26) выполняются для любых интенсивностей. Это означает, что



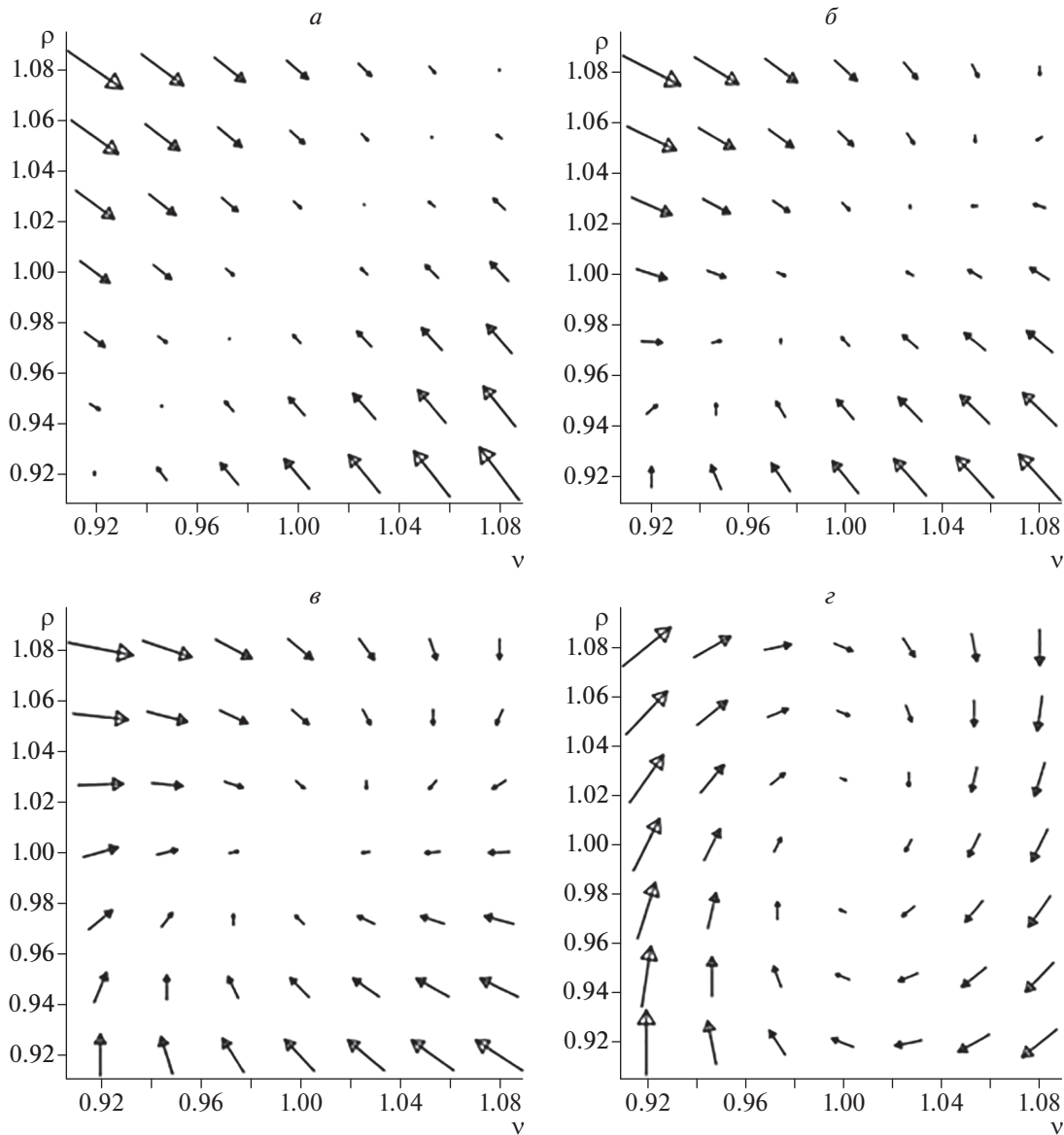
**Рис. 2.** Сплошная линия описывается правой частью условия (23), которое определяет верхнюю границу интенсивности для существования стационарного решения в сапфире. Область правее пунктирной линии, определяющей интенсивность по формуле (21) для случая  $\tau_p \omega = 10$ , соответствует области применимости метода медленно меняющейся огибающей ( $\tau_p \omega \geq 10$ ).

при малых отклонениях частицы из положения равновесия (мы используем механическую аналогию) на нее действуют возвращающие силы, направленные в точку равновесия  $\nu = 1$ ,  $\rho = 1$ . Из анализа векторного поля (с учетом ионизации) можно видеть (см. рис. 3), что возвращающие силы уменьшаются по экспоненциальному закону при уменьшении  $\nu$ . 3а) возвращающие силы таковы, что векторное поле напоминает векторное поле для случая без ионизации (рис. 1). Таким образом, хотя формально условия устойчивости при такой интенсивности выполнены и возвращающие силы не равны нулю, фактически небольшие возмущения, связанные с эффектами, которыми мы пренебрегли, быстро выбьют систему из равновесия. Из анализа векторного поля можно предположить, что квазиустойчивость планарной пули при длине волны  $\lambda = 5$  мкм можно ожидать начиная с интенсивности  $I_0 = 2 \cdot 10^{13}$  Вт/см<sup>2</sup>. Схожая ситуация наблюдалась при исследовании области устойчивости трехмерных световых пульс [39]. В отличие от планарной пули область устойчивости трехмерной пули ограничена и снизу по интенсивности. Здесь мы также проводили анализ векторного поля и показали, что фактическая область устойчивости (ввиду влияния эффектов поглощения и слагаемых следующего порядка

малости) лежит выше нижней границы формального окна устойчивости.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Получено аналитическое описание распространения планарных импульсов в режиме взаимной компенсации эффектов дифракции и ионизационной расходимости, с одной стороны, и самофокусировки, с другой. Баланс временной динамики обуславливался компенсацией дисперсионного уширения кубической нелинейностью. С помощью метода моментов проанализирована динамика планарного сигнала в режиме туннельной ионизации. Получены аналитические выражения для квазистационарных длительности и ширины планарного импульса. С помощью метода Ляпунова найдены условия квазиустойчивого распространения. Следует отметить, что учет смещения частоты в красную область спектра за счет явления вынужденного комбинационного саморассеяния или в синюю, если преобладают эффекты ионизации, будет приводить к медленному выходу системы из баланса и возникновению осцилляций. Кроме того, равновесие будет нарушаться и за счет поглощения фотонов в процессе ионизации, которым мы пренебрегли в данном исследовании. Поэтому равновесие, исследованное в работе, имеет квазиустойчивый характер.



**Рис. 3.** Векторное поле  $F_v = -\partial U/\partial v$ ,  $F_\rho = -\partial U/\partial \rho + \tilde{F}$  (с учетом ионизации), определяющее динамику планарного импульса с центральной длиной волны  $\lambda = 5$  мкм, распространяющегося в сапфире, с интенсивностью  $I_0 = 1.5 \cdot 10^{13}$  (а),  $2 \cdot 10^{13}$  (б),  $2.3 \cdot 10^{13}$  (в),  $2.8 \cdot 10^{13}$  Вт/см<sup>2</sup> (г).

Работа Халяпина В.А. выполнена при финансовой поддержке гранта Министерства науки и высшего образования РФ (проект № 075-02-2021-1748).

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. *Rairoux P., Schillinger H., Niedermeier S. et al. // Appl. Phys. B. 2000. V. 71. P. 573.*
2. *Diels J.-C., Bernstein R., Stahlkopf K. et al. // Sci. Amer. 1997. V. 277. P. 50.*
3. *Alfano R.R. The supercontinuum laser source. N.Y.: Springer, 1989. 538 p.*
4. *D'Amico C., Houard A., Franco M. et al. // Phys. Rev. Lett. 2007. V. 98. Art. No. 235002.*
5. *Kivshar Yu.S., Agrawal G.P. Optical solitons: from fibers to photonic crystals. N.Y.: Academic Press Inc., 2003. 540 p.*
6. *Edmundson D.E., Enns R.H. // Opt. Lett. 1992. V. 17. P. 586.*
7. *Mihalache D., Mazilu D., Crasovan L.-C. et al. // Phys. Rev. Lett. 2002. V. 88. Art. No. 073902.*
8. *Fibich G., Ilan B. // Opt. Lett. 2004. V. 29. P. 887.*
9. *Raghavan S., Agrawal Govind P. // 2000. V. 180. P. 377.*
10. *Sazonov S.V., Kalinovich A.A., Komissarova M.V. et al. // Phys. Rev. A. 2019. V. 100. Art. No. 033835.*

11. Couairon A. // Eur. Phys. J. D. 1996. V. 27. P. 159.
12. Henz S., Herrmann J. // Phys. Rev. E. 2006. V. 53. P. 4092.
13. Sprangle P., Penano J.R., Hafizi B. // Phys. Rev. E. 2002. V. 66. Art. No. 046418.
14. Sprangle P., Esarey E., Krall J. // Phys. Rev. E. 1996. V. 54. P. 4211.
15. Penano J., Palastro J.P., Hafizi B. et al. // Phys. Rev. A. 2017. V. 96. Art. No. 013829.
16. Couairon A., Mysyrowicz A. // Phys. Rep. 2007. V. 441. P. 47.
17. Chekalin S.V., Dokukina E.A., Dormidonov A.E. et al. // J. Phys. B. 2015. V. 48. Art. No. 094008.
18. Воронин А.А., Желтиков А.М. // УФН. 2016. Т. 186. С. 957; Voronin A.A., Zheltikov A.M. // Phys. Usp. 2016. V. 59. P. 869.
19. Saleh M.F., Chang W., Hölzer P. et al. // Phys. Rev. Lett. 2011. V. 107. Art. No. 203902.
20. Hölzer P., Chang W., Travers. J. et al. // Phys. Rev. Lett. 2011. V. 107. Art. No. 203901.
21. Facao M., Carvalho M.I., Almeida P. // Phys. Rev. A. 2013. V. 87. Art. No. 063803.
22. Дианов Е.М., Карасик А.Я., Мамышев П.В. // Письма в ЖЭТФ. 1985. Т. 41. № 6. С. 242; Dianov E.M., Karasik A.Y., Mamyshv P.V. et al. // JETP Lett. 1985. V. 41. No. 6. P. 294.
23. Mitschke F.M., Mollenauer L.F. // Opt. Lett. 1986. V. 11. P. 659.
24. Gordon J.P. // Opt. Lett. 1986. V. 11. P. 662.
25. Santhanam J., Agraval G. // Opt. Commun. 2003. V. 222. P. 413.
26. Bugay A.N., Khalyapin V.A. // Phys. Lett. A. 2017. V. 381. P. 399.
27. Келдыш Л.В. // ЖЭТФ. 1964. Т. 47. С. 1945; Keldysh L.V. // Sov. Phys. JETP. 1965. V. 20. P. 1307.
28. Залозная Е.Д., Дормидонов А.Е., Компанец В.О. и др. // Письма в ЖЭТФ. 2021. Т. 113. № 12. С. 817; Zaloznaya E.D., Dormidonov A.E., Kompanets V.O. et al. // JETP Lett. 2021. V. 113. No. 12. P. 817.
29. Talepbour A., Yang J., Chin S.L. // Opt. Commun. 1999. V. 163. P. 29.
30. Власов С.Н., Петрищев В.А., Таланов В.И. // Изв. вузов. Радиофиз. 1971. Т. 14. № 9. С. 1453.
31. Маймистов А.И. // ЖЭТФ. 1993. Т. 104. № 5. С. 3620; Maimistov A.I. // JETP. 1993. V. 77. P. 727.
32. Corless R., Gonnet G., Hare D.E.G. et al. // Adv. Comput. Math. 1996. V. 5. P. 329.
33. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. М.: Гостехиздат, 1950. 472 с
34. Халыпин В.А., Бугай А.Н. // Изв. РАН. Сер. физ. 2021. Т. 85. № 12. С. 1781; Khalyapin V.A., Bugay A.N. // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2021. V. 85. No. 12. P. 1424.
35. Дормидонов А.Е., Компанец В.О., Чекалин С.В. и др. // Квант. электрон. 2018. Т. 48. № 4. С. 372; Dormidonov A.E., Kompanets V.O., Chekalin S.V. et al. // Quantum Electron. 2018. V. 48. No. 4. P. 372.
36. Bugay A.N., Khalyapin V.A. // Laser Phys. 2022. V. 32. Art. No. 025401.
37. Malitson I.H. // J. Opt. Soc. Amer. 1962. V. 52. P. 1377.
38. Major A., Yoshino F., Nikolakakos I. et al. // Opt. Lett. 2004. V. 15. P. 602.
39. Bugay A.N., Khalyapin V.A. // Chaos Solitons Fractals. 2022. V. 156. Art. No. 111799.

## On the analytical description of the dynamics of planar pulses propagating in the tunnel ionization mode

V. A. Khalyapin<sup>a, b, \*</sup>, A. N. Bugay<sup>c</sup>

<sup>a</sup>Immanuel Kant Baltic Federal University, Kaliningrad, Russia

<sup>b</sup>Kaliningrad State Technical University, Kaliningrad, Russia

<sup>c</sup>Joint Institute for Nuclear Research, Dubna, Russia

\*e-mail: slavasxi@gmail.com

The problem of the planar pulse propagation in the tunnel ionization regime is considered on the basis of the moments method. A system of equations for the signal parameters is obtained and using Lyapunov method conditions for quasi-stable propagation are found.