

УДК 517.957

## О ВЛИЯНИИ ХАРАКТЕРИСТИК ШУМОВОГО СИГНАЛА НА УСТАНОВЛЕНИЕ ОБОБЩЕННОЙ СИНХРОНИЗАЦИИ В СИСТЕМАХ СО СЛОЖНОЙ ТОПОЛОГИЕЙ АТТРАКТОРА

© 2022 г. В. А. Ханадеев<sup>1, 2, \*</sup>, О. И. Москаленко<sup>1, 2</sup>

<sup>1</sup>Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования  
“Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского”,  
Саратов, Россия

<sup>2</sup>Региональный научно-образовательный математический центр “Математика технологий будущего”,  
Саратов, Россия

\*E-mail: v.a.hanadeev@gmail.com

Поступила в редакцию 01.10.2021 г.

После доработки 11.10.2021 г.

Принята к публикации 22.10.2021 г.

Выполнен анализ влияния характеристик шумового сигнала на границу возникновения режима обобщенной синхронизации в системах со сложной топологией аттрактора. Установлено, что вне зависимости от типа шума режим обобщенной синхронизации оказывается устойчивым к шумам в широком, но ограниченном диапазоне изменения интенсивности шума.

DOI: 10.31857/S0367676522020120

### ВВЕДЕНИЕ

Одним из направлений нелинейной динамики, вызывающих большой интерес современных ученых, является изучение синхронизации неавтономных и связанных динамических систем, способных демонстрировать хаотическую динамику [1, 2]. Такое внимание исследователей к явлению хаотической синхронизации обусловлено, в первую очередь, его фундаментальностью. В то же самое время, известно, что это явление может найти практическое применение, например, в задачах передачи информации [3, 4], в том числе, скрытой, при диагностике динамики некоторых биологических систем [5–7], при контроле хаоса в СВЧ генераторах [8] и пр.

За последние несколько десятилетий обнаружено много разных типов хаотической синхронизации, среди которых не угасает интерес к исследованию режима обобщенной синхронизации [9]. Этот режим может наблюдаться как в односторонне, так и взаимно связанных хаотических системах, и подразумевает установление функционала между их состояниями. В случае односторонней связи этот функционал имеет вид  $u = F[x]$ , а для диагностики этого режима традиционно рассчитывается старший условный показатель Ляпунова [10] или используется метод вспомогательной системы [11].

Важным вопросом при изучении обобщенной синхронизации является анализ влияния шума на установление этого синхронного режима [12, 13]. На данный момент хорошо известно, что в системах с аттрактором ленточного типа (как, например, у систем Ресслера) с диссипативным типом связи [14–16] этот режим является устойчивым к шумам [13, 17], что позволяет предложить способы скрытой передачи информации, эффективно работающие, в том числе, при наличии высокого уровня шума в канале связи [18]. Изучение этого режима в более сложных системах находится только в начале своего развития и, несмотря на наличие работ по этой тематике (см., например, [19]), требует дополнительного внимания и изучения.

Выполнен анализ влияния характеристик внешнего шумового воздействия на установление режима обобщенной синхронизации в системах с так называемой сложной топологией аттрактора. При этом, под системами со сложной (двулистной) структурой аттрактора понимаются такие системы, фазовое пространство которых состоит из двух подпространств с небольшой общей областью, внутри которой фазовые траектории могут переходить из одного подпространства в другое и наоборот [20]. В качестве примеров таких систем рассмотрены односторонне диссипативно связанные системы Лоренца и системы Чена, а в качестве источников

шумового воздействия – белый шум с гауссовой плотностью распределения вероятностей и цветной шум с равномерной плотностью распределения вероятностей. Можно предположить, что ввиду диссипативного типа связи режим обобщенной синхронизации в изучаемых системах будет устойчив по отношению к шумам.

### ОБЪЕКТ И МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

Однонаправленно связанные системы Лоренца [20] описываются следующей системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \sigma(y_1 - x_1), \\ \dot{y}_1 &= r_1 x_1 - y_1 - x_1 z_1, \\ \dot{z}_1 &= -b z_1 + x_1 y_1, \\ \dot{x}_2 &= \sigma(y_2 - x_2) + \varepsilon(x_1 - x_2) + D\zeta, \\ \dot{y}_2 &= r_2 x_2 - y_2 - x_2 z_2, \\ \dot{z}_2 &= -b z_2 + x_2 y_2, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\bar{x}_{1,2} = (x_{1,2}, y_{1,2}, z_{1,2})$  – векторы состояний взаимодействующих ведущей и ведомой систем, соответственно,  $\sigma = 10$ ,  $b = 2$ ,  $r_1 = 40$  и  $r_2 = 35$  – управляющие параметры,  $\varepsilon$  – параметр связи,  $D$  – интенсивность шумового воздействия,  $\zeta$  – дельта-коррелированный белый гауссов шум с нулевым средним или цветной шум с нулевым средним и равномерной плотностью распределения вероятностей.

Уравнения однонаправленно связанных систем Чена [21] являются модификацией уравнений систем Лоренца и записываются в следующем виде:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \sigma(y_1 - x_1) + e y_1 z_1, \\ \dot{y}_1 &= c x_1 - d x_1 z_1 + y_1 + u_1, \\ \dot{z}_1 &= x_1 y_1 - b z_1, \\ \dot{u}_1 &= -k_1 y_1, \\ \dot{x}_2 &= a(y_2 - x_2) - e y_2 z_2, \\ \dot{y}_2 &= c x_2 + d x_2 z_2 + y_2 + u_2, \\ \dot{z}_2 &= x_2 y_2 - b z_2, \\ \dot{u}_2 &= -k_2 y_2 + \varepsilon(x_1 - x_2) + D\zeta. \end{aligned} \quad (2)$$

где  $a = 35$ ,  $b = 4.9$ ,  $c = 25$ ,  $d = 5$ ,  $e = 35$ ,  $k_1 = 190$ ,  $k_2 = 110$  – управляющие параметры,  $\varepsilon$  – параметр связи, слагаемое  $D$  соответствует источнику шума с теми же характеристиками, что и для системы (1). Управляющие параметры  $k_1$  и  $k_2$  подобраны таким образом, что первая система находится в хаотическом режиме, а вторая система в режиме гиперхаоса.

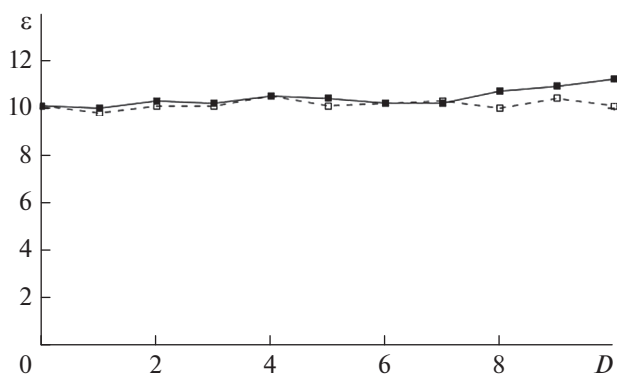
Решение систем (1) и (2) осуществлялось путем численного решения стохастических дифференциальных уравнений методом Рунге–Кутты 4 порядка, адаптированным на данный случай

[22], с шагом  $h = 0.001$ . Режим обобщенной синхронизации в системах (1) и (2), как отмечалось во Введении, диагностировался при помощи метода вспомогательной системы [11] и путем расчета спектра показателей Ляпунова [10].

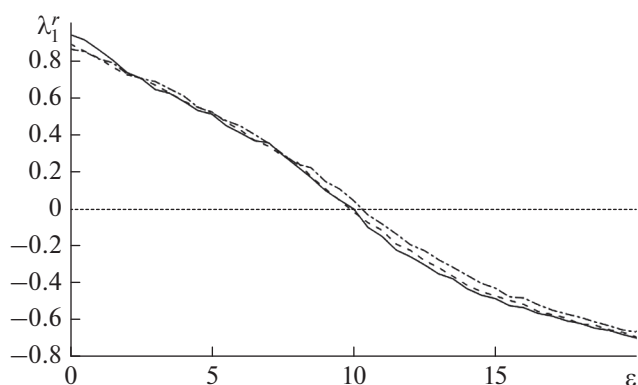
Метод вспомогательной системы заключается в рассмотрении дополнительной системы, так называемой вспомогательной системы  $\mathbf{u}$ , идентичной ведомой системе  $\mathbf{y}$  по управляющим параметрам, начальные условия которой  $\mathbf{u}(0)$  отличаются от начальных состояний ведомой системы  $\mathbf{y}(0)$ , но находятся в бассейне притяжения того же самого аттрактора [11]. При этом, и ведомая, и вспомогательная системы должны подвергаться одному и тому же воздействию как со стороны ведущей системы, так и шумового сигнала. В отсутствие режима обобщенной синхронизации между исходными однонаправленно связанными системами состояния ведомой  $\mathbf{y}$  и вспомогательной  $\mathbf{u}$  систем являются различными, однако, эти системы эволюционируют на одном и том же хаотическом аттракторе. Если исходные ведущая и ведомая системы находятся в режиме обобщенной синхронизации, состояния ведомой и вспомогательной систем после завершения переходного процесса будут тождественно равны  $\mathbf{y} \equiv \mathbf{u}$  в силу выполнения соотношений  $\mathbf{y} = \mathbf{F}[\mathbf{x}]$  и, соответственно,  $\mathbf{u} = \mathbf{F}[\mathbf{x}]$  [11].

Для анализа режима обобщенной синхронизации при помощи вычисления спектра показателей Ляпунова необходимо рассчитать так называемый старший условный показатель Ляпунова – старший ляпуновский показатель ведомой системы – при изменении параметра связи. Когда этот показатель Ляпунова становится отрицательным, в исходных однонаправленно связанных системах диагностируется наступление режима обобщенной синхронизации [10].

Известно, что метод расчета спектра показателей Ляпунова дает несколько заниженную оценку критического значения установления синхронного режима по сравнению с методом вспомогательной системы, что обусловлено наличием перемежающегося поведения вблизи границы обобщенной синхронизации [10, 15, 19]. Метод вспомогательной системы, в свою очередь, может привести к неточному определению порога обобщенной синхронизации из-за возникновения “ловушки” численного счета, во избежание которой необходимо ввести в рассмотрение небольшую расстройку между параметрами ведомой и вспомогательной систем. С целью оптимального выбора величины расстройки и более точного детектирования режима обобщенной синхронизации в данной работе оба метода использовались одновременно.



**Рис. 1.** Зависимости порога возникновения режима обобщенной синхронизации в двух одинаково связанных системах Лоренца (1) от интенсивности шумового воздействия с гауссовой плотностью распределения вероятностей (сплошная линия) и равномерной плотностью распределения вероятностей (пунктирная линия).

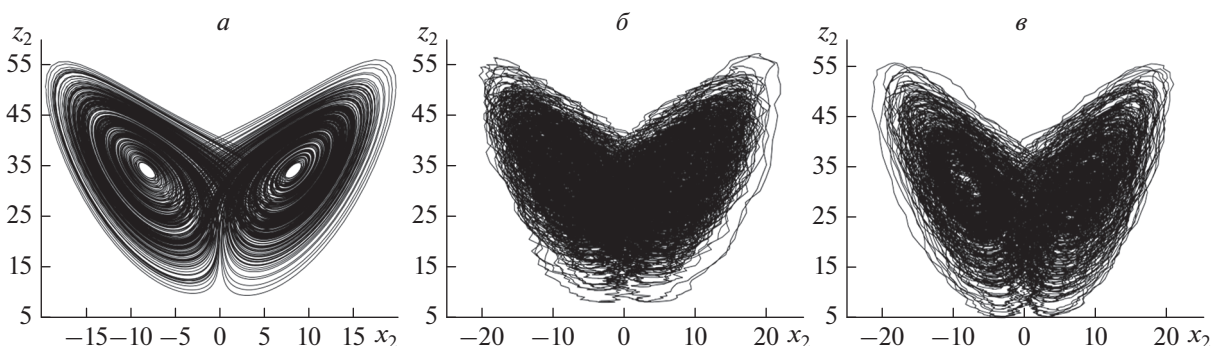


**Рис. 2.** Зависимости старшего условного показателя Ляпунова  $\lambda_1^r$  системы (1) от параметра связи  $\varepsilon$  в отсутствии и при наличии различных типов шумового воздействия. Сплошной линией показан старший ляпуновский показатель в отсутствии шума  $D = 0$ , штриховой линией – при воздействии шума с гауссовым распределением интенсивности  $D = 8$ , и штрих-пунктирной линией – при воздействии шума с равномерным распределением интенсивности  $D = 8$ .

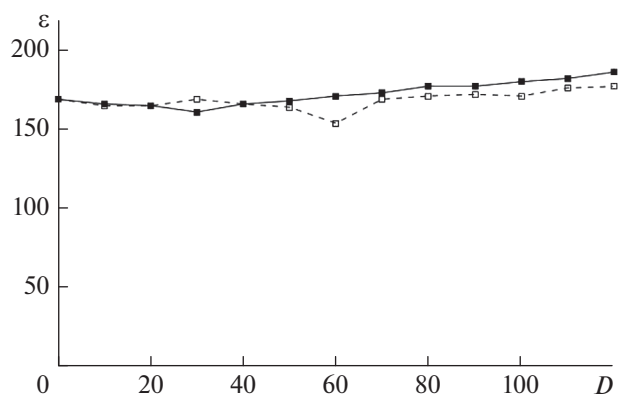
## РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЙ

Применим метод вспомогательной системы и расчет старшего условного показателя Ляпунова для определения границ обобщенной синхронизации при изменении интенсивности шумового воздействия в системах (1) и (2). На рис. 1 приведены рассчитанные таким образом границы обобщенной синхронизации в системе двух одинаково связанных осцилляторов Лоренца (1) для двух типов шумового воздействия, упомянутых в предыдущем разделе. На рисунке наглядно видно, что полученные границы оказываются близки друг к другу. Более того, пороговые значения установления синхронных режимов оказывается практически одинаковыми в широком диапазоне изменения интенсивности шумового воздействия как для белого, так и цветного шума. Иными словами, режим обобщенной синхронизации в системе (1) оказывается устойчивым к шумам независимо от интенсивности и типа шумового воздействия.

На рис. 2 показаны зависимости старшего условного показателя Ляпунова от параметра связи для систем Лоренца в отсутствии шума и при наличии шума одинаковой интенсивности  $D = 8$  с гауссовым и равномерным распределениями вероятностей. Видно, что приведенные зависимости немного отличаются друг от друга. Однако, во всех рассмотренных случаях с ростом величины параметра связи старший условный показатель Ляпунова переходит в отрицательную область практически при одинаковых значениях параметра связи, что и соответствует практически одному и тому же порогу установления обобщенной синхронизации в исследуемой системе. На рис. 3 представлены фазовые портреты ведомой системы Лоренца при тех же значениях характера и интенсивности шумового воздействия. Из рисунка



**Рис. 3.** Фазовые портреты ведомой системы Лоренца (1) в отсутствие шума (а) и при наличии шума интенсивности  $D = 8$  с гауссовым (б) и равномерным распределениями (с).



**Рис. 4.** Зависимости порога возникновения режима обобщенной синхронизации в двух однонаправленно связанных системах Чена (2) от интенсивности шума с гауссовой плотностью распределения вероятностей (сплошная линия) и равномерной плотностью распределения вероятностей (пунктирная линия).

видно, что при добавлении шума аттрактор Лоренца заметно трансформируется, в частности, для обоих источников шума происходит его достаточно сильное зашумление, но в обоих случаях двулистная структура аттрактора сохраняется, что может быть причиной устойчивости режима обобщенной синхронизации к шумам.

Аналогичное поведение границ обобщенной синхронизации наблюдается и для однонаправленно связанных систем Чена. На рис. 4 приведены зависимости порога возникновения режима обобщенной хаотической синхронизации от интенсивности шума для систем Чена, находящихся под воздействием шума с гауссовым и равномерным распределениями. Легко видеть, что по аналогии с осцилляторами Лоренца, при различных типах шумового воздействия границы режима обобщенной синхронизации практически не зависят от интенсивности шума  $D \in [0; 120]$ . Устойчивость режима обобщенной синхронизации в двух однонаправленно связанных системах Чена по отношению к шумам обусловлена также слабым влиянием шума на структуру аттрактора ведомой системы и поведение старшего условного показателя Ляпунова.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, проведено исследование влияния двух типов шумового воздействия на установление режима обобщенной синхронизации в системе со сложной (двулистной) топологией аттрактора с однонаправленным типом связи. С помощью метода вспомогательной системы и расчета старшего условного показателя Ляпунова установлено, что характер шумового сигнала не оказывает суще-

ственного влияния на порог возникновения синхронного режима как в системах Лоренца, так и осцилляторах Чена. Независимо от типа шумового воздействия режим обобщенной синхронизации в системах со сложной топологией аттрактора оказывается устойчивым по отношению к шумам в широком, но ограниченном диапазоне изменения интенсивности шумового воздействия.

Подобное поведение однонаправленно связанных систем, находящихся под действием шума, обусловлено слабым влиянием шумового сигнала на двулистную структуру аттрактора ведомой системы и величину старшего условного показателя Ляпунова, отвечающего за установление обобщенной синхронизации в таких системах.

Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых — докторов наук (проект № МД-21.2020.2).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J.* Synchronization: a universal concept in nonlinear sciences. N.Y.: Cambridge Univ. Press, 2001. 411 p.
2. *Анищенко В.С.* Сложные колебания в простых системах. Механизмы возникновения, структура и свойства динамического хаоса в радиофизических системах. М.: URSS, 2009. 320 с.
3. *Kocarev L., Parlitz U.* // Phys. Rev. Lett. 1995. V. 74. No. 25. P. 5028.
4. *Коронковский А.А., Москаленко О.И., Храмов А.Е.* // УФН. 2009. Т. 179. № 12. С. 1281.
5. *Pavlov A., Sosnovtseva O., Ziganshin A. et al.* // Phys. A. 2002. V. 316. No. 1–4. P. 233.
6. *Масленников О.В., Некоркин В.И.* // УФН. 2017. Т. 187. С. 745.
7. *Храмов А.Е., Фролов Н.С., Максименко В.А. и др.* // УФН. 2021. Т. 191. С. 614.
8. *Dmitriev B.S., Hramov A.E., Koronovskii A.A. et al.* // Phys. Rev. Lett. 2009. V. 102. No. 7. Art. No. 074101.
9. *Rulkov N.F., Sushchik M.M., Tsimring L.S., Abarbanel H.D.I.* // Phys. Rev. E. 1995. V. 51. No. 2. P. 980.
10. *Pyragas K.* // Phys. Rev. E. 1996. V. 54. No. 5. Art. No. R4508.
11. *Abarbanel H.D.I., Rulkov N.F., Sushchik M.M.* // Phys. Rev. E. 1996. V. 53. No. 5. P. 4528.
12. *Toral R., Mirasso C.R., Hernández-García E., Piro O.* // Chaos. 2001. V. 11. P. 665.
13. *Moskalenko O.I., Hramov A.E., Koronovskii A.A., Ovchinnikov A.A.* // Eur. Phys. J. B. 2011. V. 82. No. 1. P. 69.
14. *Hramov A.E., Koronovskii A.A.* // Phys. Rev. E. 2005. V. 71. Art. No. 067201.
15. *Hramov A.E., Koronovskii A.A., Moskalenko O.I.* // Europhys. Lett. 2005. V. 72. No. 6. P. 901.

16. *Hramov A.E., Koronovskii A.A., Moskalenko O.I.* // Phys. Lett. A. 2006. V. 354. No. 5–6. P. 423.
17. *Короновский А.А., Москаленко О.И., Овчинников А.А., Храмов А.Е.* // Изв. РАН. Сер. физ. 2009. Т. 73. № 12. С. 1726; *Koronovskii A.A., Moskalenko O.I., Ovchinnikov A.A., Hramov A.E.* // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2009. V. 73. No. 12. P. 1616.
18. *Moskalenko O.I., Koronovskii A.A., Hramov A.E.* // Phys. Lett. A. 2010. V. 374. No. 29. P. 2925.
19. *Москаленко О.И., Ханадеев В.А.* // Изв. Саратов. ун-та. Сер. физ. 2021. Т. 21. № 3. С. 233.
20. *Ханадеев В.А., Москаленко О.И., Короновский А.А.* // Изв. РАН. Сер. физ. 2021. Т. 85. № 2. С. 265; *Khanadeev V.A., Moskalenko O.I., Koronovskii A.A.* // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2021. V. 85. No. 2. P. 192.
21. *Chen Z., Yang Y., Qi G., Yuan Z.* // Phys. Lett. A. 2007. V. 360. No. 6. P. 696.
22. *Никитин Н.Н., Первачев С.В., Разевиг В.Д.* // Автомат. и телемех. 1975. № 4. С. 133.

## On influence of characteristics of noise signal on the generalized synchronization regime onset in systems with a complex attractor topology

V. A. Khanadeev<sup>a, b, \*</sup>, O. I. Moskalenko<sup>a, b</sup>

<sup>a</sup> *Saratov State University, Saratov, 410012 Russia*

<sup>b</sup> *Regional Scientific and Educational Mathematical Center “Mathematics of Future Technologies”, Saratov, 410012 Russia*

<sup>\*</sup>*e-mail: v.a.hanadeev@gmail.com*

The influence of the noise signal characteristics on the boundary of the generalized synchronization regime onset in systems with a complex attractor topology is analyzed. It is shown that, regardless of the type of noise, the generalized synchronization regime is stable to it in a wide, but limited range of the noise intensity variation.