ИЗВЕСТИЯ РАН. СЕРИЯ ФИЗИЧЕСКАЯ, 2022, том 86, № 2, с. 247–251

УДК 534.141.4:532.5.032

УСТОЙЧИВОСТЬ ЛАМИНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ НА ГРАНИЦЕ РАВНОМЕРНОГО И ЗАМЕДЛЯЮЩЕГОСЯ ПОТОКОВ

© 2022 г. О. Н. Мельникова[1, *], Х. Ян[1]

[1]Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования "Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова", физический факультет, Москва, Россия

*E-mail: olamel@yandex.ru

Поступила в редакцию 01.10.2021 г.
После доработки 11.10.2021 г.
Принята к публикации 22.10.2021 г.

Получены условия потери устойчивости ламинарного движения на границе равномерного и тормозящегося потоков, где возникает максимальный перепад скорости из-за периодического торможения жидкости на втором участке. В конце цикла на профиле скорости течения появляется локальный минимум с двумя точками перегиба, в верхней точке перегиба выше вязкого слоя формируется вихрь. Получена оценка периода формирования вихрей.

DOI: 10.31857/S036767652202020X

ВВЕДЕНИЕ

В [1] Прандтль впервые предположил, что в потоках с обратным градиентом давления, тормозящим жидкость, вблизи подстилающей поверхности, где вязкость играет существенную роль, могут возникать вихри. Математическое описание таких нестационарных пограничных течений пока не получено. В [2, 3] было показано, что процесс торможения происходит периодически, а цикл торможения заканчивается формированием цепочки цилиндрических вихрей с горизонтальной осью, направленной перпендикулярно потоку. В [4] экспериментально установлено, что существует такая фаза периодического процесса торможения течения, в которой формируется вертикальный профиль скорости с локальным минимумом и двумя точками перегиба над верхней границей вязкого слоя. Обнаружено, что ламинарное течение с таким профилем может потерять устойчивость, что приводит к формированию вихрей. После вылета вихрей ламинарное течение восстанавливается. Однако условия потери устойчивости при такой деформации вертикального профиля скорости исследованы не были. Целью настоящей работы является исследование диапазона параметров потока с обратным градиентом давления, для которого происходит потеря устойчивости ламинарного течения в пограничном слое воды со свободной поверхностью. Задача решалась экспериментально. Экспериментальное исследование тормозящихся течений осложняется тем, что параметры течения меняются в направлении движения потока. Для того, чтобы выделить узкую рабочую зону течения с заданными локальными параметрами исследования проводились на границе двух участков прямого канала. На первом участке скорость течения u и давление p не менялись в направлении движения (равномерное течение $\partial u/\partial x = 0$, $\partial p/\partial x = 0$), а на втором участке скорость убывала в направлении движения. В результате в процессе торможения жидкости на границе участков перепад скорости вдоль оси канала принимал максимальное значение в узкой зоне продольной оси за короткий интервал времени. Ниже по течению от границы между участками параметры потока, определяющие потерю устойчивости, не успевали достичь критической величины. В результате вылет вихрей ниже по течению от границы не происходил и не искажал поле скорости.

МЕТОДИКА ЭКСПЕРИМЕНТА

Эксперименты проводились в прямом канале с прозрачными гладкими стенками длиной 3.5 м, шириной 15 см, с регулируемым наклоном дна. Расход воды не менялся во времени, обеспечивая стационарное течение на участке с равномерным движением жидкости. На участках, где скорость падала в направлении движения, течение было периодическим. Изменение продольного профиля скорости обеспечивалось переменным наклоном дна канала, изменением расхода воды. Толщина слоя воды составляла $2.1 < h < 3.1$ см. Максимальная (в сечении) скорость потоков в серии экспериментов составляла $15 < U_{max} < 40$ см · с$^{-1}$,

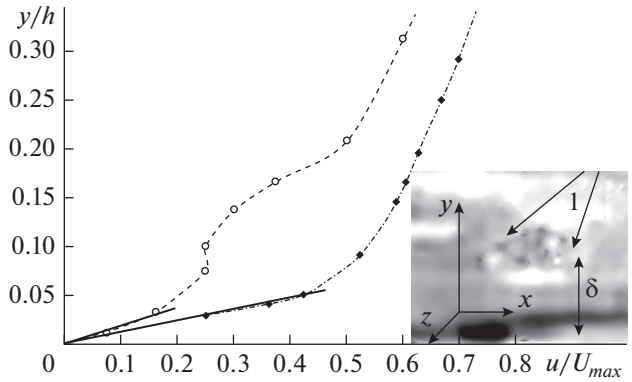

Рис. 1. Профили скорости в начальной фазе (закрашенные маркеры) и в фазе максимального торможения (пустые маркеры). Сплошные линии – аппроксимируют данные в вязком слое. На кадре видеозаписи 1 – формирование цилиндрического вихря.

$u_x = \dfrac{\partial u}{\partial x} > -0.1$ с$^{-1}$. Для исследования поля скорости использовалась видеозапись перемещения частиц плотности $\rho = 1.05$ г · см$^{-3}$ со средним диаметром 0.2 мм. Размер частиц позволял разрешать скорость течения в вязком слое потока толщиной порядка 2 мм. Запись велась через боковую стенку канала. Скорость видеозаписи – 25 кадров в секунду. Камера вручную фокусировалась на ось канала, чтобы по четкости изображения отличать и использовать частицы, перемещающиеся вдали от вертикальных стенок.

Обработка данных с помощью программы Adobe Photoshop позволила получить траектории и скорости частиц, перемещавшихся вдоль рабочего участка на разных горизонтах. Для исследования поля скорости основного течения использовались частицы, не меняющие своего положения по вертикали, что исключало учет возмущений, вносимых вихрями [2, 5].

ДЕФОРМАЦИЯ ВЕРТИКАЛЬНОГО ПРОФИЛЯ СКОРОСТИ

В [4] показано, что в процессе торможения жидкости в пограничном слое потока с обратным градиентом давления периодически происходит деформация вертикального профиля мгновенной скорости. В фазе максимального торможения на профиле появляется локальный минимум с двумя точками перегиба (рис. 1). Если разбить слой, в котором наблюдается минимум скорости, на два подслоя, содержащих по одной точке перегиба, – нижний $0.04 < \dfrac{y}{h} < 0.14$ и верхний $0.14 < \dfrac{y}{h} < 0.23$, то можно оценить устойчивость ламинарного течения в каждом подслое по форме вертикального профиля скорости течения. Из данных, приведенных на рис. 1 следует, что скорость течения монотонно увеличивается вдоль вертикальной оси y, а производная скорости $\dfrac{\partial u}{\partial y} = u_y(y)$ имеет минимум в нижней точке перегиба и максимум в верхней точке перегиба. Для таких течений получен ряд теорем, позволяющих оценить устойчивость ламинарного движения по форме профиля скорости [6]. В нижней точке перегиба, где $u_y(y)$ имеет минимум, выполняются условия теоремы Фьортофта, гарантирующие устойчивость ламинарного движения к малым возмущениям [6]. В верхней точке перегиба $u_y(y)$ имеет максимум, что является одним из условий теоремы Розенблюта–Симона, которая дает необходимое и достаточное условие устойчивости ламинарного течения, если $u_y(y)$ имеет максимум в точке перегиба, а следующее выражение имеет отрицательный знак [6]:

$$I = -\frac{dy}{du}\frac{1}{u-u_d}\bigg|_{u(y_1)}^{u(y_2)} + \int\limits_{u(y_1)}^{u(y_2)} \frac{d^2y}{du^2}\frac{du}{u-u_d} < 0, \qquad (1)$$

где u_d – скорость течения в точке перегиба, y_1, y_2 – координаты границ слоя с точкой перегиба. Если I в (1) больше нуля, то течение неустойчиво. Для проверки устойчивости течения в фазе максимального торможения в слое, содержащем верхнюю точку перегиба, были использованы данные, полученные в потоке глубиной $h = 3$ см и скоростью течения на свободной поверхности $U_{max} = 30$ см/с. Зависимость $y(U)$ в слое с верхней точкой перегиба была аппроксимирована полиномом (рис. 2):

$$\begin{gathered} y = au^3 + bu^2 + cu + d, \quad a = 0.0029, \\ b = -0.1068, \quad c = 1.318, \quad d = -4.9153. \end{gathered} \qquad (2)$$

Границы слоя $y_1 = 0.41$ см, $y_2 = 0.65$ см выбраны таким образом, чтобы значения производной $y'(u)$ на границах совпадали. Тогда первое слагаемое в (1) равно $I_1 = -\dfrac{2y_b'}{u(y_2) - u(y_1)}$. Из (2) следует, что для подынтегрального выражения (1) имеем:

$$\frac{y''}{u-u_d} = \frac{6au+2b}{u+\dfrac{b}{3a}} = 6a\frac{u+\dfrac{b}{3a}}{u+\dfrac{b}{3a}} = 6a. \qquad (3)$$

В результате для второго слагаемого в (1) получаем $I_2 = 6a[u(y_2) - u(y_1)]$, а условие потери устойчивости $I > 0$ можно записать:

$$y_b' < 3a[u(y_2) - u(y_1)]^2. \qquad (4)$$

Подставляя значения $u(y_1) = 9$ см/с, $u(y_2) = 15.6$ см/с в (4), получаем, $0.103 < 0.379$, т.е. условие неустойчивости (4) выполнено в слое с верхней точкой перегиба. Однако надо учесть, что приведенные критерии устойчивости получены для профилей с одной точкой перегиба. Полученный вывод подтверждает эксперимент – наша видеозапись. На кадре видеозаписи (рис. 1) видно, что вихрь сворачивается в области, расположенной над верхней границей вязкого слоя в зоне, где на профиле скорости течения формируется локальный минимум. В экспериментальной работе [7] получен аналогичный результат: вихри периодически формируются выше вязкого слоя потока.

ОЦЕНКА ПЕРИОДА ВЫЛЕТА ВИХРЕЙ

Как показывает критерий (4), потеря устойчивости происходит при критической деформации профиля, определяемой перепадом скорости в зоне локального минимума. Этот перепад определяется скоростью торможения жидкости на границе равномерного и замедляющегося течения. Формирование вихрей зафиксировано при критическом значении перепада скорости на границе равномерного и тормозящегося участков. Для данного эксперимента вихри сворачивались, когда достигалось значение $\frac{\partial u}{\partial x} < -8$ с$^{-1}$. Считая, что перепад скорости в (4) примерно равен перепаду скорости на границе участков в фазе максимального торможения, можно оценить интервал времени достижения максимальной фазы торможения или период вылета вихрей.

Рассмотрим движение единичного объема жидкости массы m вдоль оси x в зоне торможения течения на заданном горизонте. Для получения приблизительных оценок будем полагать, что объем сохраняет свою форму и течение безвихревое. Тогда можно записать уравнение движения и интеграл движения Коши–Лагранжа

$$m\frac{du}{dt} = -\frac{dp}{dx} + F_{fr}, \quad p + m\left(\frac{u^2}{2} + \frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) = \text{const}, \qquad (5)$$

где φ – потенциал скорости. Сила трения определяется силой касательного напряжения на данном горизонте $F_{fr} = -\mu u_y S$, где μ – динамическая вязкость жидкости, а S – площадь горизонтальной поверхности объема. Пусть высота объема будет равна толщине вязкого слоя, тогда ускорение, обусловленное касательным напряжением $a_{fr} = \frac{F_{fr}}{m} = -\frac{\nu}{\delta}u_y$, где ν – кинематическая вязкость жидкости, δ – толщина вязкого слоя. Горизонтальная составляющая градиента давления определяется дифференцированием второго уравнения (5):

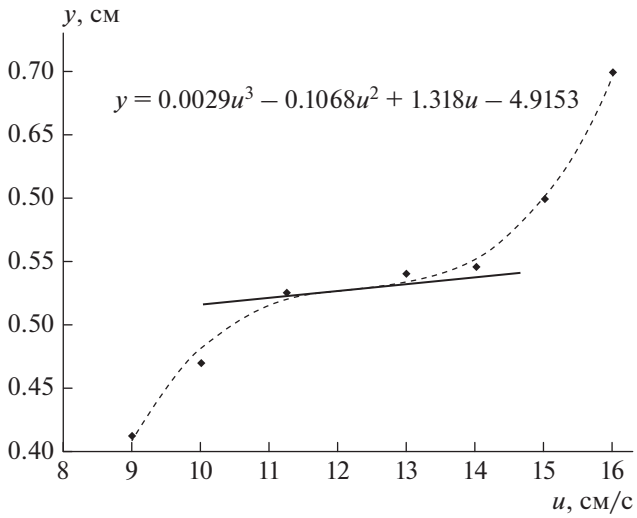

Рис. 2. Зависимость $y(u)$ в слое, содержащем верхнюю точку перегиба. Маркеры – экспериментальные данные, штриховая линия – аппроксимирующая функция, сплошная линия – касательная в точке перегиба.

$$\frac{1}{m}\frac{dp}{dx} = -uu_x - u_t, \quad u_t = \frac{\partial u}{\partial t}. \qquad (6)$$

Для ускорения единицы объема получаем выражение

$$\frac{du}{dt} = uu_x + u_t - a_{fr}, \text{ где } a_{fr} = \frac{\nu}{\delta}u_y. \qquad (7)$$

Данные эксперимента показали, что в начале процесса максимальная интенсивность торможения приходится на силу трения в вязком слое. В верхнем подслое вклады силы трения и обратного градиента давления равны и на порядок меньше, чем сила трения в вязком слое. В процессе торможения вклад обратного градиента давления быстро растет, так как растет перепад скорости и производная u_x на границе участков с равномерным и замедляющимся течением. Из данных рис. 3 следует, что в фазе максимального торможения жидкости сила обратного градиента давления на порядок превышает силу трения в слое, содержащем верхнюю точку перегиба. Это позволяет сделать приблизительную оценку времени, необходимого для достижения критического перепада скорости. Считая, что ускорение объема в основном определяется уравнением $\frac{du}{dt} = u_x u$, получаем, что скорость объема на границе между равномерным и замедляющимся течением уменьшается за малое время Δt до значения $u_1 = u_0 \exp(u_{x0}\Delta t)$. Здесь u_{x0} производная скорости по продольной коорди-

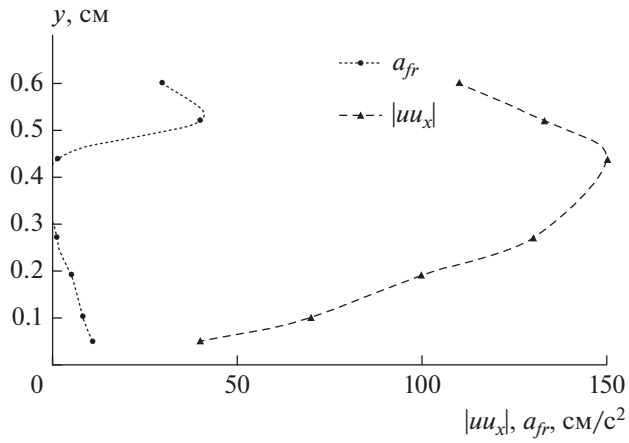

Рис. 3. Компоненты сил обратного градиента давления $|uu_x|$ и трения (a_{fr}) в фазе максимального торможения жидкости на границе участков равномерного и замедляющегося течений.

нате в начале процесса торможения считается заданной. Изменение скорости объема за n равных и малых интервалов Δt составляет:

$$u_n = u_0 \exp\left(\Delta t \sum_{i=0}^{n} u_{xi}\right), \tag{8}$$

где для малого интервала Δt можно полагать $u_{xi} \approx 2\dfrac{u_i - u_0}{\Delta t(u_0 + u_i)}$. Когда перепад скорости $u_0 - u_n$ на границе участков равномерного и замедляющегося течений достигнет значения, определяемого критерием (4), можно ожидать потерю устойчивости ламинарного течения. Период процесса торможения равен $T = n\Delta t$. Полагая, что на верхней границе вязкого слоя скорость течения и u_x в два раза меньше значений на свободной поверхности [4], рассчитаем период процесса торможения для начальных данных, полученных в эксперименте: $u_0 = 15$ см $\cdot$ с$^{-1}$, $u_{x0} = 0.05$ с$^{-1}$. Интервал времени Δt положим равным 0.04 с, что соответствует интервалу времени между последовательными кадрами. В эксперименте в фазе максимального торможения (конец цикла) перепад скорости в верхнем подслое составил 6.6 см/с. Такому значению соответствует $9 < n < 10$ и период $T = 0.38$ с. Среднее значение периода вылета вихрей в эксперименте составил 0.45 с, доверительный интервал для вероятности 0.67 равен 0.1 с. Расчетное значение не выходит за рамки доверительного интервала экспериментального значения, что согласуется с предложенной физической моделью процесса торможения жидкости на границе равномерного и замедляющегося потоков.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенная методика исследования устойчивости ламинарного течения на границе равномерного и тормозящегося потоков позволила определить характеристики течения с обратным градиентом давления, при которых происходит потеря устойчивости и формирование вихрей. Показано, что в процессе торможения жидкости на границе потоков быстро деформируется вертикальный профиль скорости течения, на котором возникает локальный минимум в пограничном слое. Максимум деформации наблюдается в слое, в котором сила обратного градиента давления растет пропорционально перепаду скорости на границе потоков. Существует критическое значение перепада скорости, при котором ламинарное течение теряет устойчивость и формируется вихрь. Потеря устойчивости происходит в зоне локального минимума на вертикальном профиле скорости, который формируется в фазе максимального торможения. В этой зоне профиль содержит две точки перегиба: в нижней точке перегиба течение оказывается устойчивым, а в верхней нет – вместо ламинарного течения формируется вихрь. После вылета вихрей из слоя, содержащего верхнюю точку перегиба, параметры поля скорости возвращаются к начальному значению. Получена оценка интервала времени от начала процесса торможения ламинарного течения до вылета вихрей. Результат подтверждается данными эксперимента.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Prandtl L.* // Proc. Third Inter. Math. Congr. (Heidelberg, 1904). P. 484.
2. *Мельникова О.Н.* // Изв. РАН. Физ. атм. и океана. 2005. Т. 41. № 5. С. 682; *Mel'nikova O.N.* // Izv. Atm. Ocean. Phys. 2005. V. 41. No. 5. P. 620.
3. *Lebon B., Nguyen M.Q., Peixinho J. et al.* // Phys. Fluids. 2018. V. 30. Art. No. 031701.
4. *Мельникова О.Н., Показеев К.В., Ян Х.* // Изв. РАН. Сер. физ. 2021. № 1. С. 134; *Melnikova O.N., Pokazeev K.V., Yang H.* // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2021. No. 1. P. 98.
5. *Ahmadi F., Sanders S., Ghaemi S.* // Phys. Rev. Fluids. 2020. V. 5. No. 1. Art. No. 014302.
6. *Дикий Л.А.* Гидродинамическая устойчивость и динамика атмосферы. М.: Гидрометеоиздат, 1976.
7. *He L., Yi Sh.-H., Chen Zh., Zhu Y.-Zh.* // Proc. 14th Europ. Turbul. Conf. (Lyon, 2013).

Stability of laminar flow at the boundary of uniform and decelerating flows

O. N. Melnikova[a], *, H. Yang[a]

[a] *Department of Physics, Lomonosov Moscow State University, Moscow, 119992 Russia*

**e-mail: olamel@yandex.ru*

Conditions for the loss of stability of laminar motion at the boundary of uniform and decelerating flows, where the maximum velocity drop occurs due to periodic deceleration of the fluid in the second section, are obtained. At the end of the cycle, a local minimum with two inflection points appears on the flow velocity profile; a vortex forms at the upper inflection point above the viscous layer. An estimate of the period of vortex formation is obtained.