

УДК 532.65

## ДВУМЕРНОЕ ВОЛНОВОЕ ДВИЖЕНИЕ В ВЯЗКОЙ ОДНОРОДНОЙ ЖИДКОСТИ

© 2023 г. А. А. Очиров<sup>1, 2, \*</sup>

<sup>1</sup>Федеральное государственное бюджетное учреждение науки  
“Институт проблем механики имени А.Ю. Ишлинского Российской академии наук”, Москва, Россия

<sup>2</sup>Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования  
“Ярославский государственный университет имени П.Г. Демидова”, Ярославль, Россия

\*E-mail: otchirov@mail.ru

Поступила в редакцию 29.08.2022 г.

После доработки 16.09.2022 г.

Принята к публикации 26.09.2022 г.

Исследовано распространение двумерных периодических капиллярно-гравитационных волн в вязкой однородной жидкости со свободной поверхностью в диапазоне частот от  $5 \cdot 10^{-2}$  до  $5 \cdot 10^4$  Гц. Получены дисперсионные соотношения, а также выражения для фазовых и групповых скоростей для поверхностных волн в физически наблюдаемых переменных. Показано, что существует еще один класс решений, который не наблюдается в модели идеальной жидкости.

DOI: 10.31857/S036767652270017X, EDN: JTPIDR

### ВВЕДЕНИЕ

Процесс исследования распространения волн вдоль поверхности жидкости имеет давнюю историю и берет свое начало еще с работ Эйлера, Лагранжа, Даламбера, Стокса и других. Обобщение этих исследований можно найти в большом количестве обзорных работ и монографий [1–3]. Волны могут оказывать влияние на перераспределение поверхностно-активных веществ вдоль поверхности жидкости [4, 5], меняют морфологию дна в море, реках и каналах [6]. Короткие капиллярные волны на склонах гравитационных волн [7], меняют шероховатость контактной поверхности, определяющую взаимодействие океана и атмосферы, (расчеты распространения капиллярных волн по сферической поверхности проведены в [8]) а также могут служить причиной усиления гравитационных волн в присутствии поверхностно-активных веществ [9]. В экспериментальных исследованиях капельных течений можно заметить сложность картины волнового переноса вещества, включающего образование вихрей, и тонких волокон [10].

Настоящая работа посвящена анализу и исследованию волновой компоненты решения дисперсионного уравнения, возникающего при распространении волн по свободной поверхности вязкой однородной жидкости.

### МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим задачу о распространении поверхностных волн в вязкой однородной жидкости с кинематической вязкостью  $\nu$ , плотностью  $\rho_0$ , коэффициентом поверхностного натяжения  $\sigma$ , находящуюся в поле сил тяжести  $\vec{g}$ . В декартовой системе координат  $Oxyz$ , в которой ось  $Oz$  направлена вертикально вверх, а плоскость  $Oxy$  совпадает с равновесным положением свободной поверхности жидкости. Будем считать, что жидкость неограничена и занимает нижнее полупространство  $z < 0$ , а вдоль свободной поверхности распространяется бегущая волна, задающая отклонение свободной поверхности от равновесного значения, которое описывается функцией  $z = \zeta(x, y, t)$ . Также будем рассматривать задачу в плоской постановке, т.е. будем полагать, что движение жидкости не зависит от горизонтальной координаты  $y$ . Математическая формулировка задачи базируется на упрощенной системе фундаментальных уравнений [11], в которой пренебрегаются эффектами, связанными с переносом вещества, тепла и стратификацией:

$$z < \zeta: \begin{cases} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -(\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} + \nu \Delta \vec{u} - \frac{1}{\rho_0} \nabla P + \vec{g} \\ \nabla \cdot \vec{u} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Здесь символом  $P$  обозначено гидродинамическое давление, а поле скоростей в двумерном случае представляется в виде  $\vec{u} = u\vec{e}_x + v\vec{e}_z$ . Задача (1) должна быть дополнена граничными условиями на свободной поверхности жидкости  $z = \zeta$ :

$$z = \zeta: \frac{\partial(z - \zeta)}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla(z - \zeta) = 0, \quad (2)$$

$$P - P_0 - \sigma \nabla \cdot \vec{n} - 2\rho_0 v \vec{n} \cdot (\vec{n} \cdot \nabla \vec{u}) = 0, \quad (3)$$

$$\vec{\tau} \cdot (\vec{n} \cdot \nabla \vec{u}) + \vec{n} (\vec{\tau} \cdot \nabla \vec{u}) = 0, \quad (4)$$

$$\vec{n} = \frac{\nabla(z - \zeta)}{|\nabla(z - \zeta)|} = \frac{-\partial_x \zeta \vec{e}_x + \vec{e}_z}{\sqrt{1 + (\partial_x \zeta)^2}}, \quad \vec{\tau} = \frac{\vec{e}_x + \partial_x \zeta \vec{e}_z}{\sqrt{1 + (\partial_x \zeta)^2}}.$$

Здесь  $P_0$  – атмосферное давление, а символами  $\vec{n}$  и  $\vec{\tau}$  обозначены вектор нормали и касательной к свободной поверхности соответственно. В случае двумерного движения можно ввести функцию тока  $\psi$  такую, что  $u = \partial_z \psi$ , а  $v = -\partial_x \psi$ . В линейном приближении по малому параметру, имеющему смысл отношения амплитуды к длине волны после проведения процедуры снесения граничных условий на равновесную поверхность  $z = 0$  задача запишется в виде:

$$z < 0: \partial_t \Delta \psi - v \Delta \Delta \psi = 0, \quad (5)$$

$$z = 0: \partial_t \zeta + \partial_x \psi = 0, \quad (6)$$

$$v \partial_{tz} \Delta \psi - \partial_{tzz} \psi + g \partial_{xx} \psi + 2v \partial_{txxz} \psi - \gamma \partial_{xxxx} \psi = 0, \quad (7)$$

$$\partial_{zz} \psi - \partial_{xx} \psi = 0. \quad (8)$$

Здесь символом  $\gamma = \sigma/\rho_0$  обозначен нормированный на плотность коэффициент поверхностного натяжения жидкости.

### РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Будем искать решение задачи первого порядка малости по амплитуде волны (5)–(8) в виде бегущей волны:

$$\psi = A_+ e^{k_z z + ik_x x - i\omega t} + A_- e^{k_z z - ik_x x - i\omega t}. \quad (9)$$

Подстановка (9) в (5) приводит к дисперсионным соотношениям между компонентами волнового числа  $k_x$  и  $k_z$ :

$$(k_x^2 - k_z^2)(v(k_x^2 - k_z^2) - i\omega) = 0, \quad (10)$$

Которое естественным образом распадается на два решения:

$$k_z^2 = k_x^2, \quad k_l^2 = k_x^2 + i\omega/v. \quad (11)$$

В выражении (11) введено переобозначение компоненты волнового вектора  $k_z$  на  $k_l$  для одного из решений для отличия корней друг от друга.

С учетом выражений (11) решение задачи необходимо искать в виде:

$$\psi = (A_+ e^{ik_x x - i\omega t} + A_- e^{-ik_x x - i\omega t})(e^{k_z z} + B e^{k_l z}). \quad (12)$$

Подстановка (12) в граничные условия (6), (8) приводит к соотношениям:

$$\zeta = (A_- e^{-ik_x x - i\omega t} - A_+ e^{ik_x x - i\omega t})(1 + B)k_x/\omega, \quad (13)$$

$$B = -\frac{k_x^2 + k_z^2}{k_x^2 + k_l^2} = -\frac{2k_x^2}{2k_x^2 + i\omega/v}. \quad (14)$$

Подстановка (12) в динамическое граничное условие (7) приводит к дисперсионному уравнению, связывающему компоненты волнового вектора с частотой волнового движения и другими параметрами задачи:

$$\gamma k_x^4 - 3iv\omega k_x^2 k_{z,l} + gk_x^2 + k_{z,l}(ivk_{z,l}^2 - \omega)\omega = 0. \quad (15)$$

С учетом (11) дисперсионные уравнения (15) принимают вид:

$$\begin{aligned} \gamma k_z^3 - 2iv\omega k_z^2 + gk_z - \omega^2 &= 0, \\ \gamma(k_l^2 - i\omega/v)^2 - 2iv\omega(k_l^2 - i\omega/v)k_l + & \\ + g(k_l^2 - i\omega/v) + \omega k_l(ivk_l^2 - \omega) &= 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Традиционно дисперсионное уравнение представляют в виде зависимости частоты от волнового числа и верхнее дисперсионное уравнение выглядит следующим образом:

$$\omega^2 = \gamma k_z^3 - 2iv\omega k_z^2 + gk_z. \quad (17)$$

В предельном переходе к идеальной жидкости  $v \rightarrow 0$  верхнее дисперсионное уравнение в (16) перейдет в дисперсионное уравнение для идеальной жидкости, а нижнее – исчезнет:

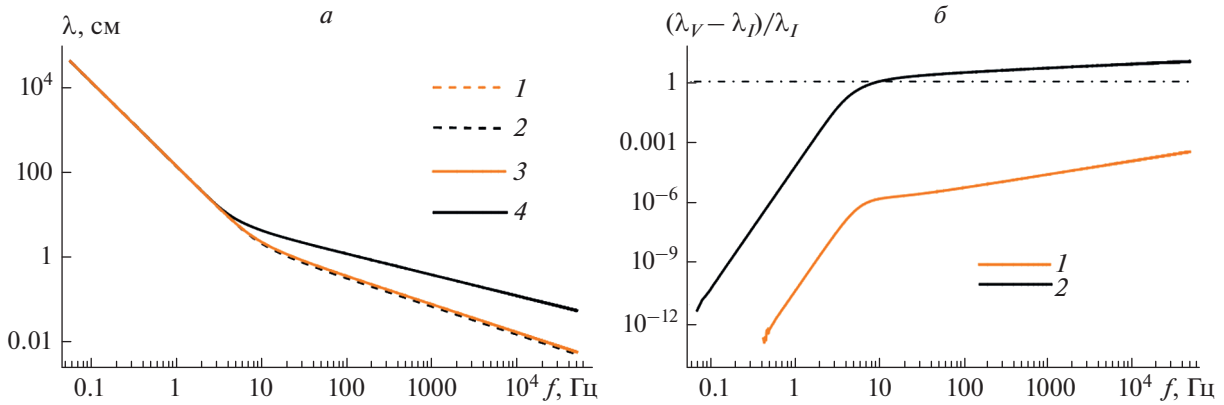
$$\gamma k_z^3 + gk_z - \omega^2 = 0 \quad (18)$$

или в более привычном виде:

$$\omega = \sqrt{gk_z(1 + \gamma k_z^2/g)}. \quad (19)$$

Это позволяет говорить о том, что корень  $k_z$  дисперсионного уравнения (16) отвечает за обобщение волнового движения идеальной жидкости на случай конечной вязкости, а корень  $k_l$  – принципиально новая структура, возникающая из-за учета конечной вязкости. В настоящем исследовании подробно будет рассмотрен только корень, отвечающий за волновое движение вдоль поверхности жидкости.

Для простоты анализа корней безразмерим дисперсионное уравнение. В качестве масштаба длины выберем  $\sqrt[3]{v^2/g}$ , а в качестве масштаба времени –  $\gamma/vg$ . Тогда размерные компоненты вол-



**Рис. 1.** Зависимость длины волны от частоты волнового движения (а). 1 – Кривая в модели идеальной жидкости с параметрами воды, 2 – в модели идеальной жидкости с параметрами глицерина, 3 – в модели вязкой жидкости с параметрами воды, 4 – в модели вязкой жидкости с параметрами глицерина. Разность между моделями вязкой и невязкой жидкости от частоты (б). 1 – Кривая для жидкости с параметрами воды, 2 – для жидкости с параметрами глицерина.

нового вектора и частоты запишутся через безразмерные в виде:

$$\omega = \omega_* \nu g / \gamma, \quad k_z = k_{z*} \sqrt[3]{g / \nu^2}, \quad (20)$$

а дисперсионное уравнение (16) перепишется:

$$\begin{aligned} k_{z*}^3 - 2i\varepsilon^2 \omega_* k_{z*}^2 + \varepsilon k_{z*}^3 - \varepsilon^3 \omega_*^2 &= 0, \\ \varepsilon &= \sqrt[3]{\nu^4 g / \gamma^3}, \\ k_{l*}^4 - \varepsilon^2 \omega_* (2ik_{l*}^3 + i + \omega) - \\ - \varepsilon^3 \omega_* k_{l*} (1 + 3\omega_*) + \varepsilon k_{l*}^2 (1 - 2i\omega) &= 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Для физически реализуемых корней должно выполняться условие затухания движения с глубиной. Следовательно, решения дисперсионных уравнений (21) должны удовлетворять критериям отбора корней:

$$\text{Re}(k_{z,l}) \geq 0. \quad (22)$$

В явном виде решения (21) здесь не приводятся из-за громоздкости выражений. Решение  $k_l$  отвечает за сопутствующее высокоградиентное течение. Решение  $k_z$  отвечает за волновую компоненту движения. Далее подробно будет рассмотрено только волновое решение  $k_z$ .

### ДИСПЕРСИОННЫЕ ОТНОШЕНИЯ

Традиционно дисперсионные соотношения представляют в виде зависимости частоты от волнового числа. Но частота волнового движения несет в себе энергетический смысл, следовательно, должна определяться действительной положительной величиной. Волновое число, учитывающее пространственное затухание можно определять как комплексную величину. Действительная часть  $k_x$  и мнимая часть  $k_z$  отвечают за волновое

движение, а мнимая часть  $k_x$  и действительная часть  $k_z$  характеризуют затухание движения с удалением волн от источника. Выбор описания и набора базовых параметров бегущих волн наиболее адекватно описывающего физически реализуемую ситуацию нуждается в экспериментальном обосновании.

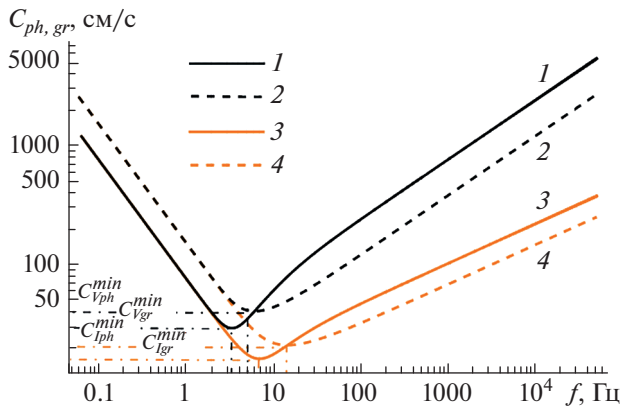
Поскольку волновой вектор – это градиент фазы волны, то кажется логичным при построении выражения использовать только те компоненты, которые отвечают за волновое движение и не учитывают затухание:

$$|k| = \sqrt{\text{Re}(k_x)^2 + \text{Im}(k_z)^2}. \quad (23)$$

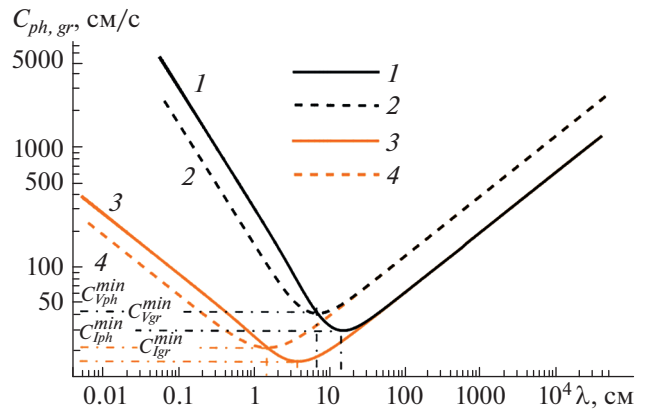
Длина волны в таком случае задается соотношением:

$$\lambda = 2\pi / \sqrt{\text{Re}(k_x)^2 + \text{Im}(k_z)^2}. \quad (24)$$

Подставляя решение дисперсионного уравнения (16) в (24) с учетом (11) можно получить зависимость длины волны от частоты волнового движения. На рис. 1а представлены соответствующие зависимости для жидкостей с параметрами воды (кривые 1 и 3)  $\rho_0 = 1 \text{ г/см}^3$ ,  $g = 981 \text{ см}^2/\text{с}^2$ ,  $\sigma = 72 \text{ дин/см}$ ,  $\nu = 0.01 \text{ см}^2/\text{с}$  и жидкости с параметрами глицерина (кривые 2 и 4)  $\rho_0 = 1.26 \text{ г/см}^3$ ,  $g = 981 \text{ см}^2/\text{с}^2$ ,  $\sigma = 64.7 \text{ дин/см}$ ,  $\nu = 11.746 \text{ см}^2/\text{с}$ . Пунктирными линиями (кривые 1 и 2) на рисунке изображены зависимости, полученные в модели с пренебрежением вязкости. Сплошными линиями изображены линии в модели, учитывающей конечную вязкость. Из рисунка видно, что для жидкости с параметрами воды зависимости совпадают друг с другом с точностью до толщины линии. Для глицерина отличия



**Рис. 2.** Зависимость групповой (1 и 3) и фазовой (2 и 4) скорости от частоты волнового движения в моделях вязкой (1 и 2) и невязкой (3 и 4) жидкости.



**Рис. 3.** Зависимость групповой (1 и 3) и фазовой (2 и 4) скорости от длины волны в моделях вязкой (1 и 2) и невязкой (3 и 4) жидкости.

заметны в области капиллярных волн. На рис. 1б показана невязка между длиной волны, рассчитанной в модели вязкой жидкости  $\lambda_\nu$  и невязкой жидкости  $\lambda_l$  в отношении к длине волны в идеальной жидкости  $(\lambda_\nu - \lambda_l)/\lambda_l$  в зависимости от частоты. Литерой (1) обозначена зависимость для жидкости с параметрами воды, а литерой (2) — для жидкости с параметрами глицерина. Для гравитационных волн отличие в моделях несущественно как для слабовязких, так и для сильновязких жидкостей (порядка долей процентов), однако, с увеличением частоты отличие растет и для жидкости с большой вязкостью достигает 100% при частоте около 10 Гц и при дальнейшем увеличении частоты растет и становится заметной даже для слабовязких жидкостей.

Скорость распространения фазового фронта и скорость распространения энергии также являются интересным предметом исследования и анализа. Для сравнения с экспериментом может быть удобно представление в виде зависимости от частоты или от длины волны. На рис. 2 и 3 изображены зависимости фазовой и групповой скорости волнового движения от частоты и длины волны соответственно. Зависимости, обозначенные литерой (1) и (2) построены в модели, учитывающей конечность вязкости, а зависимости с литерой (3) и (4) — в модели невязкой жидкости. Сплошными линиями обозначены зависимости групповой скорости (отвечающей за перенос энергии группой волн), а пунктирными — фазовой скорости. Из рисунков видно, что у гравитационных волн  $(\lambda \gg \delta_g^\nu = \sqrt{\frac{\gamma}{g}})$  фазовая скорость опережает групповую, тогда как у капиллярных волн  $(\lambda \ll \delta_g^\nu)$  — наоборот. Расчеты показывают, что групповая и фазовая скорости сравниваются то-

гда, когда фазовая скорость принимает свое минимальное значение  $C_{ph}^{min}$ . Для жидкости с параметрами воды это значение  $C_{ph}^{min} = 23.05$  см/с достигается при частоте  $f_{ph}^{min} = 13.5$  Гц и длине волны  $\lambda_{ph}^{min} = 1.71$  см. Для жидкости с параметрами глицерина это значение  $C_{ph}^{min} = 40.85$  см/с достигается при частоте  $f_{ph}^{min} = 6.2$  Гц и длине волны  $\lambda_{ph}^{min} = 6.59$  см.

Также стоит отметить, что учет в модели конечной вязкости, во-первых, приводит к смешению характерных скоростей (минимальной групповой и минимальной фазовой скорости) в область больших длин волн (и меньших частот), а во-вторых, увеличиваются значения характерных скоростей.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведен анализ распространения поверхностных капиллярно-гравитационных волн в вязкой однородной жидкости в плоской постановке в физически наблюдаемых переменных.

Показано, что учет вязкости приводит к увеличению минимальных скоростей распространения фазового фронта волны и скорости распространения энергии.

Установлено, что с учетом вязкости характерные значения скорости смещаются в область больших по сравнению с моделью идеальной жидкости длин волн и меньших частот.

Показано, что в вязкой жидкости помимо поверхностных волн существует еще один режим течения, не наблюдающийся в модели идеальной жидкости.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 19-19-00598).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лэмб Г. Гидродинамика. М.-Л.: ГИТТЛ, 1949. 928 с.
2. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе И.В. Теоретическая гидромеханика. Ч. 1. М.: Физматгиз, 1963. 585 с.
3. Лайтхилл Дж. Волны в жидкостях. Пер. с англ. М.: Мир, 1981. 598 с.
4. Белоножко Д.Ф., Очиров А.А. // Изв. РАН. Сер. физ. 2018. Т. 82. № 1. С. 47; *Belonozhko D.F., Ochirov A.A.* // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2018. V. 82. No. 1. P. 40.
5. *Belonozhko D., Ochirov A.* // J. Phys. Conf. Ser. 2022. V. 2231. No. 1. Art. No. 012013.
6. *Потапов И.И., Силакова Ю.Г.* // Изв. РАН. Физ. атмосферы и океана. 2021. Т. 57. № 2. С. 212; *Potapov I.I., Silakova Y.G.* // Izv. Atmos. Ocean. Phys. 2021. V. 57. No. 2. P. 192.
7. *Hung L.-P., Tsa W.-T.* // J. Phys. Oceanogr. 2009. V. 39. No. 2. P. 263.
8. *Кистович А.В., Чашечкин Ю.Д.* // Изв. РАН. Физ. атмосферы и океана. 2018. Т. 54. № 2. С. 206; *Kistovich A.V., Chashechkin Yu.D.* // Izv. Atmos. Ocean. Phys. 2018. V. 54. No. 2. P. 182.
9. *Ермаков С.А.* // Изв. РАН. Физ. атмосферы и океана. 2010. Т. 46. № 2. С. 228; *Ermakov S.A.* // Izv. Atmos. Ocean. Phys. 2010. V. 46. No. 2. P. 208.
10. *Чашечкин Ю.Д.* // Изв. РАН. Физ. атмосферы и океана. 2022. Т. 58. № 2. С. 218; *Chashechkin Yu.D.* // Izv. Atmos. Ocean. Phys. 2022. V. 58. No. 2. P. 188.
11. *Chashechkin Y.D.* // Axioms. 2021. V. 10. No. 4. P. 286.

## Two-dimensional wave motion in a viscous homogeneous liquid

A. A. Ochirov<sup>a, b, \*</sup>

<sup>a</sup>*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, 119526 Russia*

<sup>b</sup>*Demidov Yaroslavl State University, Yaroslavl, 150000 Russia*

<sup>\*</sup>*e-mail: otchirov@mail.ru*

The propagation of two-dimensional periodic capillary-gravitational waves in a viscous homogeneous liquid with a free surface in the frequency range from  $5 \cdot 10^{-2}$  to  $5 \cdot 10^4$  Hz is investigated. Dispersion relations are obtained, as well as expressions for phase and group velocities for surface waves in physically observable variables. It is shown that there is another class of solutions that is not observed in the ideal fluid model.