

УДК 517.957

## ИССЛЕДОВАНИЕ ВОЗМОЖНОСТИ СУЩЕСТВОВАНИЯ МУЛЬТИСТАБИЛЬНОСТИ В РЕЖИМЕ ПЕРЕМЕЖАЮЩЕЙСЯ ФАЗОВОЙ СИНХРОНИЗАЦИИ В АНСАМБЛЕ ОДНОНАПРАВЛЕННО СВЯЗАННЫХ СИСТЕМ РЕССЛЕРА

© 2023 г. В. А. Ханадеев<sup>1</sup>, \*, А. Д. Плотникова<sup>1</sup>, О. И. Москаленко<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования  
“Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского”,  
Саратов, Россия

\*E-mail: v.a.hanadeev@gmail.com

Поступила в редакцию 29.08.2022 г.

После доработки 16.09.2022 г.

Принята к публикации 26.09.2022 г.

Изучен вопрос о возможности существования мультистабильности вблизи границы фазовой синхронизации в однонаправленно связанных хаотических системах. Рассмотрены случаи относительно большой и относительно малой расстройки между ними, показано, что мультистабильность присутствует в обоих случаях. Введена в рассмотрение количественная характеристика степени мультистабильности и показано, что ее зависимость от времени в режиме перемежающейся фазовой синхронизации может использоваться для определения длительностей характерных фаз поведения систем.

DOI: 10.31857/S0367676522700223, EDN: JULHVU

### ВВЕДЕНИЕ

Одним из распространенных явлений, характерных как для физических, так и биологических систем, является перемежаемость [1]. Как правило, под этим явлением понимается чередование двух различных режимов, например, периодических колебаний и хаотических, двух различных хаотических режимов, фаз синхронного и асинхронного поведения и др. Перемежаемость характерна как для автономных, так и связанных систем, при этом в контексте связанных систем перемежающееся поведение встречается, как правило, вблизи границ возникновения синхронных режимов [2–6]. Различают перемежающиеся полную синхронизацию, синхронизацию с запаздыванием, обобщенную синхронизацию, фазовую синхронизацию, синхронизацию временных масштабов и т.д. При этом, стоит учитывать, что механизмы возникновения и статистические характеристики у всех типов перемежаемости оказываются различными.

Для корректного определения характеристик и механизмов возникновения перемежаемости важную роль играют методы выделения характерных фаз динамики систем. Самым распространенным методом, который можно использовать для изучения перемежающейся обобщенной син-

хронизации в однонаправленно связанных системах, является метод вспомогательной системы [4, 7]. С помощью данного метода можно достаточно точно определять наличие и характерные длительности ламинарных и турбулентных фаз, а следовательно, и тип перемежаемости, реализуемый в исследуемой системе. Однако, недавно было установлено, что при анализе перемежающегося поведения на границе обобщенной синхронизации важную роль играет выбор начальных условий для ведомой и вспомогательной систем: при одном и том же состоянии ведущей системы в зависимости от выбора начальных условий ведомой системы в один и тот же момент времени может диагностироваться как синхронная, так и асинхронная динамика, т.е. иметь место мультистабильность [8].

Поскольку различные типы синхронного поведения, наблюдающиеся в однонаправленно и взаимно связанных хаотических системах, являются частными проявлениями режима синхронизации временных масштабов [9], можно предположить, что мультистабильность [10] будет иметь место и на границах других типов хаотической синхронизации. В настоящей работе данный вопрос исследуется в контексте режима перемежающейся фазовой синхронизации в однонаправленно связанных хаотических системах [2, 5]. В

работе предлагается метод выделения характерных фаз поведения систем, основанный на вычислении вероятности наблюдения синхронного режима по ансамблю связанных систем, аналогично методу, предложенному в работе [11] для режима перемежающейся обобщенной синхронизации. Метод основан на рассмотрении относительно большого ансамбля связанных систем и вычислении вероятности наблюдения ламинарной фазы поведения в зависимости от времени.

## ОБЪЕКТ И МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

В качестве объекта исследования выбран ансамбль однонаправленно связанных систем Ресслера, находящихся в режиме ленточного хаоса:

$$\begin{aligned} \dot{x}_d^i &= -\omega_d y_d^i - z_d^i, \\ \dot{y}_d^i &= \omega_d x_d^i + a y_d^i, \\ \dot{z}_d^i &= p + z_d^i (x_d^i - c), \\ \dot{x}_r^i &= -\omega_r y_r^i - z_r^i + \varepsilon (x_d^i - x_r^i), \\ \dot{y}_r^i &= \omega_r x_r^i + a y_r^i, \\ \dot{z}_r^i &= p + z_r^i (x_r^i - c), \end{aligned} \quad (1)$$

где индексы  $d$  и  $r$  относятся к ведущей и ведомой системам, соответственно, индекс  $i = 1 \dots N$  соответствует рассматриваемой паре осцилляторов,  $a = 0.15$ ,  $p = 0.2$ ,  $c = 10$ ,  $\omega_d = 0.93$  и  $\omega_r = 0.95$  – управляющие параметры, значения которых выбраны фиксированными, а управляющий параметр  $\omega_d$ , характеризующий собственную частоту колебаний ведущей системы, принимал значения равные 0.93 и 0.99, определяя относительно слабую и относительно большую расстройку между взаимодействующими системами,  $\varepsilon$  – параметр связи. Начальные условия для ведущей системы всегда выбирались фиксированными, а для ведомых систем – всегда различными. Как показали проведенные расчеты, независимо от выбора начальных условий ведомых систем при выбранных значениях управляющих параметров в случае относительно малой расстройки режим фазовой синхронизации в системе (1) наблюдается при  $\varepsilon \geq 0.041$ , в случае относительно большой расстройки – при  $\varepsilon \geq 0.118$ .

Для диагностики фазовой синхронизации и определения характеристик перемежающегося поведения, имеющего место вблизи ее границы, необходимо ввести в рассмотрение фазы хаотических сигналов и найти разность между каждой парой взаимодействующих систем. Фазы могут быть введены в рассмотрение традиционным

способом как углы в полярной системе координат на плоскости  $(x^i, y^i)$  [12]:

$$\varphi_{d,r}^i = \arctg \frac{y_{d,r}^i}{x_{d,r}^i}, \quad (2)$$

тогда разность фаз между каждой парой систем будет определяться выражением

$$\Delta\varphi^i = \varphi_d^i - \varphi_r^i, \quad (3)$$

причем, полученная таким образом разность фаз должна быть сведена к диапазону шириной  $2\pi$ , аналогично тому, как это делалось в работе [13]. Критерием наличия фазовой синхронизации в системе является ограниченность разности фаз

$$|\Delta\varphi^i| < \text{const}, \quad (4)$$

где величина константы определяется эмпирически. В режиме фазовой синхронизации разность фаз будет ограничена всегда, в то время как вблизи ее границы участки фазового захвата (ламинарные фазы) будут сменяться турбулентными всплесками, где условие (4) выполняться не будет.

Получив разности фаз для каждой пары ансамбля взаимодействующих однонаправленно связанных систем, можно рассчитать временную зависимость вероятности наблюдения ламинарной фазы поведения, значение которой может рассматриваться как количественная характеристика степени мультистабильности. Пусть в момент времени  $t$  в ансамбле из  $N$  пар осцилляторов только в  $m$  парах диагностируются ламинарные фазы. Тогда вероятность  $p$  обнаружить ламинарную фазу в момент времени  $t$  выражается как

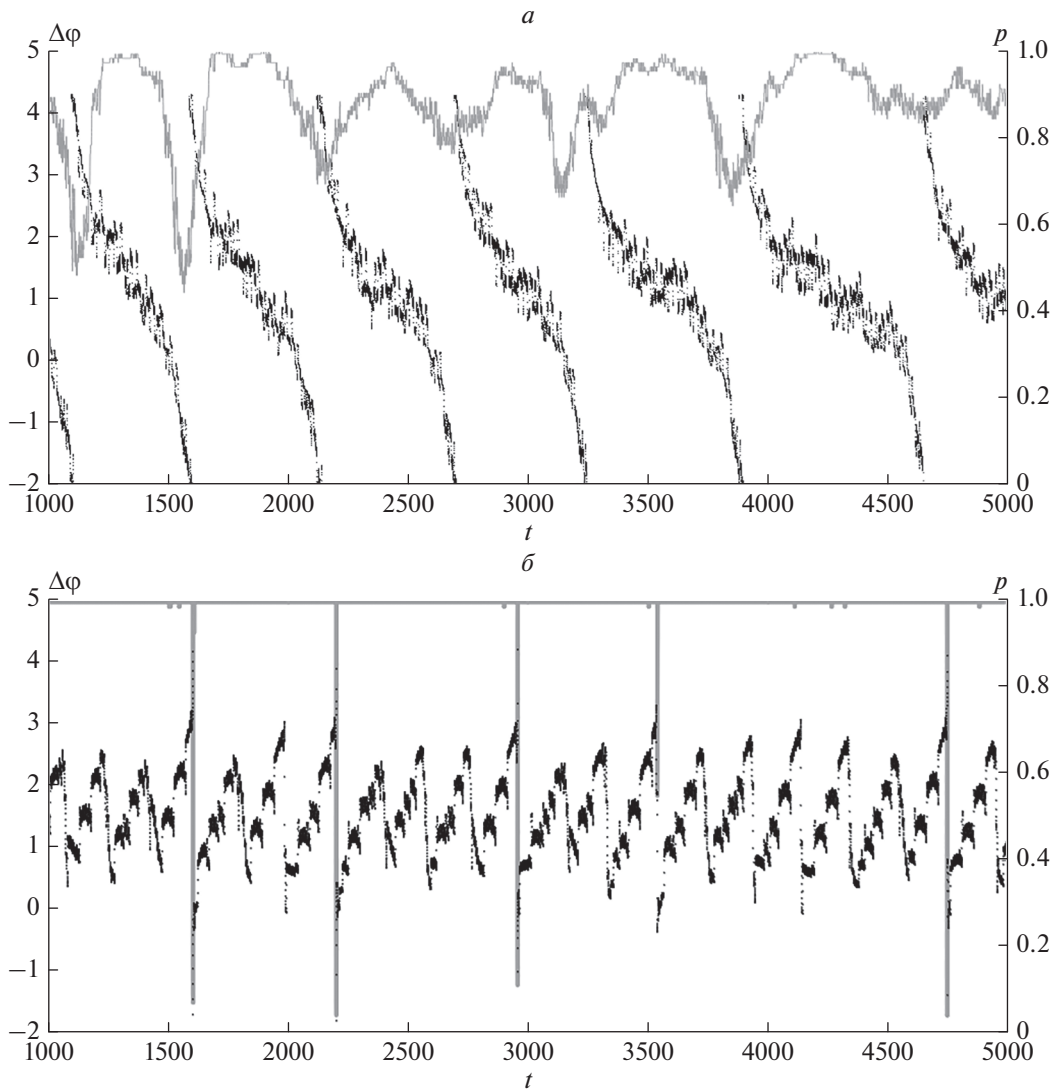
$$p = \frac{m}{N}. \quad (5)$$

Тогда, средняя вероятность наблюдения ламинарной фазы в ансамбле осцилляторов на временном интервале  $T$  составляет:

$$P = \frac{1}{T - T_0} \int_{T_0}^T p(t) dt, \quad (6)$$

где  $T_0$  – время переходного процесса.

Понятно, что, когда в исходной системе диагностируется режим фазовой синхронизации, в любой момент времени вероятность  $p(t) = 1$ , а следовательно, будет равна 1 и средняя вероятность детектирования ламинарной фазы. В режиме перемежающейся фазовой синхронизации средняя вероятность  $P$  будет чуть меньше 1, а зависимость  $p(t)$  будет содержать участки синхронной и асинхронной динамики, чередующиеся друг с другом.



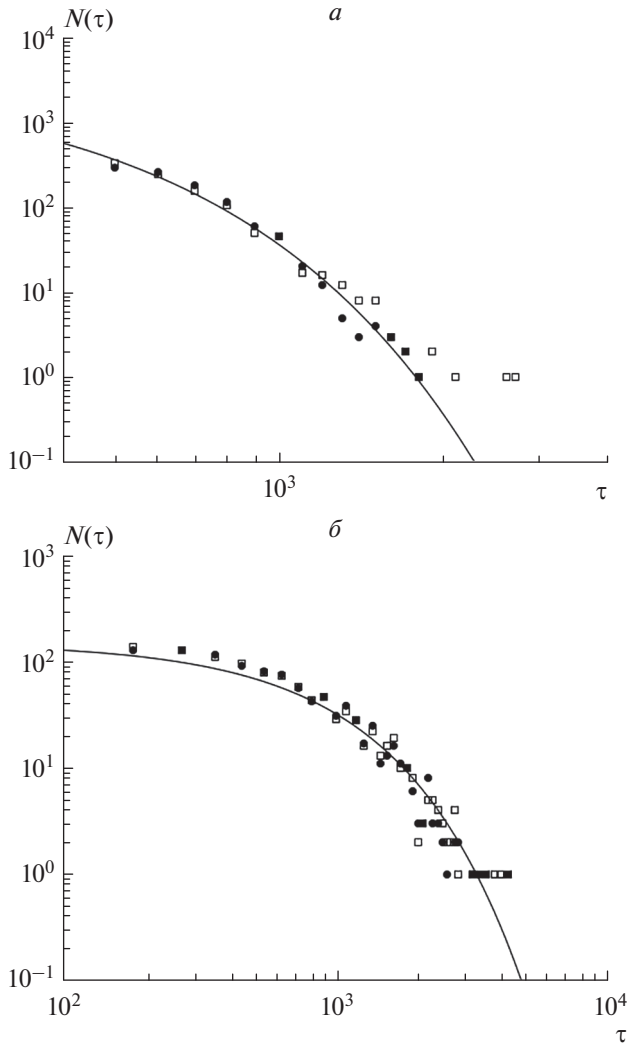
**Рис. 1.** Временные зависимости разности фаз  $\Delta\varphi$  (черные кривые) одной пары систем Ресслера и вероятности нахождения ламинарных фаз  $p$  (серые линии) для ансамбля однонаправленно связанных систем Ресслера при малой расстройке  $\omega_d = 0.93$  и силе связи  $\varepsilon = 0.03$  (а), большой расстройке  $\omega_d = 0.99$  и силе связи  $\varepsilon = 0.116$  (б).

## РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЙ

На рис. 1 представлены результаты расчета вероятности нахождения ламинарных фаз при малой и большой расстройке для  $N = 100$  однонаправленно связанных систем Ресслера (1). Также на рис. 1 приведены временные зависимости разности фаз одной из пар систем Ресслера в том же временном промежутке, что и вероятности нахождения ламинарных фаз. Видно, что в обоих случаях по характеру приведенных зависимостей можно достаточно легко определить начало и конец ламинарных и турбулентных фаз поведения систем. На зависимости разности фаз от времени ламинарные фазы сосредоточены в диапазоне  $[-4; 0]$  (для большой расстройки – в диапазоне  $[0.5; 3.5]$ ),

а выход разности фаз за пределы этого диапазона означает начало турбулентной фазы. Количественная характеристика степени мультистабильности показывает, что во время ламинарных фаз поведения вероятность близка к 1, в то время как во время турбулентных фаз она меняется в достаточно широком диапазоне. В частности, из рис. 1а заметно, что минимальное значение вероятности приходится примерно на середину турбулентной фазы, в то время как по мере удаления/приближения от/к ламинарной фазы значение вероятности начинает монотонно уменьшаться/расти.

Для того, чтобы по зависимости  $p(t)$  определить длительности характерных фаз поведения систем и рассчитать статистические характеристики перемежаемости, были выбраны поро-



**Рис. 2.** Распределения длительностей ламинарных фаз  $N(\tau)$  в случае малой расстройки  $\omega_d = 0.93$  при силе связи  $\varepsilon = 0.03$  (а) и большой расстройки  $\omega_d = 0.99$  при силе связи  $\varepsilon = 0.116$  (б). Квадратами ( $\square$ ) обозначены распределения длительностей ламинарных фаз, полученные по ансамблю из 100 однонаправленно связанных систем Ресслера (1), а кружками ( $\bullet$ ) – аналогичные распределения, полученные по зависимости разности фаз от времени в одной паре однонаправленно связанных систем Ресслера. Сплошной линией показаны аппроксимации полученных распределений экспоненциальным законом (7).

вые значения, выше которых фаза считалась ламинарной: для малой расстройки –  $\Delta = 0.7$ , для большой –  $\Delta = 0.5$ . В случае малой расстройки (рис. 2а) параметр связи был выбран  $\varepsilon = 0.03$ , а большой (рис. 2б) –  $\varepsilon = 0.116$ , соответственно. На рис. 2 показаны полученные распределения длительностей ламинарных фаз в случае ансамбля, состоящего из 100 осцилляторов. На тех же ри-

сунках изображены аналогичные распределения, полученные для одной пары систем Ресслера по временной зависимости разности фаз при помощи метода, предложенного в [13]. Можно заметить, что полученные распределения практически в точности совпадают друг с другом. Также на рис. 2 приведены теоретические аппроксимации полученных распределений экспоненциальным законом

$$N(\tau) = \frac{1}{T} \exp\left(-\frac{\tau}{T}\right), \quad (7)$$

(где  $T$  – средняя длительность ламинарных фаз), характерным как для перемежаемости “игольного ушка”, так и перемежаемости “кольца” [5, 13]. Видно, что в обоих случаях расстройки данные численного моделирования хорошо аппроксимируются экспоненциальным законом (7).

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, показано наличие мультистабильности на границе фазовой синхронизации как при относительно большой, так и относительно малой расстройке частот взаимодействующих систем. Введена в рассмотрение количественная характеристика степени мультистабильности и показано, что ее зависимость от времени для ансамбля однонаправленно связанных систем позволяет определить длительности ламинарных фаз поведения и получить статистические характеристики перемежаемости. Установлено, что распределения длительностей ламинарных фаз, полученные по зависимости вероятности от времени, практически в точности совпадают с аналогичными распределениями, полученными по временной зависимости разности фаз, и подчиняются экспоненциальным законам, что говорит о возможности применения разработанного подхода на практике для определения статистических характеристик перемежаемости.

Несмотря на то, что в рамках данной работы результаты проиллюстрированы только на одной системе, можно ожидать, что они будут справедливы и для других систем, способных демонстрировать перемежающееся поведение вблизи границы фазовой синхронизации.

Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых и по государственной поддержке ведущих научных школ Российской Федерации (проект № МД-18.2022.1.2). Отдельные результаты исследования поддержаны Минобрнауки России в рамках программы развития регионального научно-образовательного математического центра “Математика технологий будущего” (соглашение № 075-02-2022-885).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Берже П., Помо И., Видаль К. Порядок в хаосе. М.: Мир, 1991.
2. Pikovsky A.S., Osipov G.V., Rosenblum M.G. et al. // Phys. Rev. Lett. 1997. V. 79. No. 1. P. 47.
3. Boccaletti S., Valladares D.L. // Phys. Rev. E. 2000. V. 62. No. 5. P. 7497.
4. Hramov A.E., Koronovskii A.A. // Europhys. Lett. 2005. V. 70. No. 2. P. 169.
5. Hramov A.E., Koronovskii A.A., Kurovskaya M.K. et al. // Phys. Rev. Lett. 2006. V. 97. Art. No. 114101.
6. Zhuravlev M.O., Koronovskii A.A., Moskalenko O.I. et al. // Phys. Rev. E. 2011. V. 83. Art. No. 027201.
7. Abarbanel H.D.I., Rulkov N.F., Sushchik M.M. // Phys. Rev. E. 1996. V. 53. No. 5. P. 4528.
8. Moskalenko O.I., Koronovskii A.A., Selskii A.A. et al. // Chaos. 2021. V. 31. No. 8. Art. No. 083106.
9. Hramov A.E., Koronovskii A.A. // Chaos. 2004. V. 14. No. 3. P. 603.
10. Sevilla-Escoboza R., Buldú J.M., Pisarchik A.N. et al. // Phys. Rev. E. 2015. V. 91. No. 3. Art. No. 032902.
11. Москаленко О.И., Короновский А.А., Сельский А.О. и др. // Письма в ЖТФ. 2022. Т. 48. № 2. С. 3.
12. Rosenblum M.G., Pikovsky A.S., Kurths J. // Phys. Rev. Lett. 1997. V. 78. No. 22. P. 4193.
13. Журавлев М.О., Куровская М.К., Москаленко О.И. // Письма в ЖТФ. 2010. Т. 36. № 10. С. 31.

**Investigation of the possibility of the existence of multistability  
in the regime of intermittent phase synchronization in ensemble  
of unidirectionally coupled Rössler systems**

**V. A. Khanadeev<sup>a,\*</sup>, A. D. Plotnikova<sup>a</sup>, O. I. Moskalenko<sup>a</sup>**

<sup>a</sup>*Saratov State University, Saratov, 410012 Russia*

<sup>\*</sup>*e-mail: v.a.khanadeev@gmail.com*

The question of the possibility of the existence of multistability near the boundary of phase synchronization in unidirectionally coupled chaotic systems is studied. The cases of relatively large and relatively small detuning between them are considered. The multistability is shown to be observed in both cases. A quantitative characteristic of the degree of multistability is introduced and it is shown that its time dependence in the regime of intermittent phase synchronization can be used to determine the lengths of the characteristic phases of the system behavior.