

УДК 537.87:537.9

ГЕНЕРАЦИЯ ПОСТОЯННОГО ТОКА В ДИРАКОВСКОМ КРИСТАЛЛЕ В ПОЛЕ ВОЛНЫ, ПОЛЯРИЗОВАННОЙ ПО ФИГУРЕ ЛИССАЖУ

© 2023 г. С. В. Крючков^{1, 2}, Е. И. Кухарь^{2, *}, В. В. Тарасов²

¹Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
“Волгоградский государственный социально-педагогический университет”, Волгоград, Россия

²Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
“Волгоградский государственный технический университет”, Волгоград, Россия

*E-mail: eikuhar@yandex.ru

Поступила в редакцию 20.04.2023 г.

После доработки 22.05.2023 г.

Принята к публикации 28.06.2023 г.

В рамках приближения постоянного времени релаксации вычислена постоянная составляющая плотности тока, возникающая в дираковском кристалле за счет переменного электрического поля волны, поляризованной по фигуре Лиссажу. Проанализированы амплитудные и частотные характеристики постоянного тока для различных соотношений частот. Намечены некоторые пути приращения изучаемого эффекта.

DOI: 10.31857/S0367676523702551, EDN: TMCUJF

ВВЕДЕНИЕ

Открытие новых видов 2D кристаллов, составляющих группу так называемых дираковских материалов (графен, германен, силицен и т.д.), а также исследование их электрических и оптических свойств способствует в настоящее время развитию раздела физики твердотельных структур, стоящему на стыке теории конденсированного состояния и физики высоких энергий. Уникальность указанных выше материалов объясняется наличием в квантовом уравнении для электронных состояний слагаемых, связывающих импульс носителя заряда с его псевдоспиновой степенью свободы. Следствием этой связи является ярко выраженная нелинейная динамика электронов такая, что для наблюдения в дираковских кристаллах нелинейного электромагнитного (ЭМ) отклика требуются относительно меньшие поля, чем в обычных средах. В лабораторных условиях уже подтвержден ряд соответствующих эффектов, среди которых – генерация высших гармоник [1–4], эффекты смешивания частот [5], эффект насыщения поглощения и аномальный эффект Керра [6, 7].

В случае микроволнового, терагерцового и дальнего ИК диапазонов за ЭМ отклик в кристаллах ответственны, в основном, внутризонные переходы, и соответствующие задачи достаточно решать в рамках квазиклассического подхода [8–16]. При этом теоретические результаты хорошо согласуются как с опытом, так и с численным

экспериментом [17, 18]. Квазиклассическая теория ЭМ отклика строится на основе кинетического уравнения Больцмана, записанного в приближении времени релаксации (τ -приближении). Последнее позволяет достаточно просто учитывать процессы рассеяния зарядов на неоднородностях кристаллической решетки. В рамках τ -приближения сложные нелинейные эффекты получают весьма простое и наглядное обоснование, а аналитический результат оказывается возможным и без привлечения методов теории возмущений [13–19], как это имеет место, например, в квантовой теории межзонных переходов. Этот факт позволяет исследовать особенности того или иного явления в относительно широких интервалах напряженностей ЭМ поля.

Среди нелинейных электродинамических свойств графеновых материалов, обязанных существенной непараболичностью закона дисперсии их носителей заряда [9, 10, 14–20], следует выделить один из эффектов, связанных с неаддитивностью электронного спектра – возможность генерации постоянного тока за счет суперпозиции синусоидальных полей, осциллирующих во взаимно ортогональных направлениях. Данный эффект для различных графеновых структур теоретически исследован в [11, 21–23], где показано, что одним из необходимых условий генерации является отношение частот как определенных целых чисел. Последнее соответствует тому, что результирующий вектор напряженности электри-

ческого поля будет описывать фигуру Лиссажу. Стоит отметить, что исследования конфигураций полей по фигурам Лиссажу актуально в настоящее время в связи с развитием методов формирования лазерных пучков различных профилей [24, 25].

Количественные результаты, полученные в [11, 21–23], относятся к случаю 2 : 1. Ниже в рамках τ -приближения (1) вычислена постоянная составляющая плотности тока для произвольного соотношения частот ($n : k$) ортогональных электрических сигналов; (2) для того или иного соотношения $n : k$ проанализированы амплитудные и частотные характеристики; (3) намечены некоторые пути применения изучаемого эффекта.

МЕТОД РАСЧЕТА ПЛОТНОСТИ ПОСТОЯННОГО ТОКА

Рассмотрим далее щелевую модификацию графена – монослой углерода, в зонной структуре которого имеется щель между валентной зоной и зоной проводимости [26, 27]. Для такой модификации гамильтониан принимает форму, характерную для массовых релятивистских частиц [28]: $H = v_F \vec{p} \cdot \vec{\sigma} + \Delta \sigma_z$. Здесь Δ – полуширина щели между валентной зоной и зоной проводимости, $\vec{p} = -i\hbar(\partial_x, \partial_y)$ – оператор квазиимпульса, $\vec{\sigma}_{x,y,z}$ – матрицы Паули. Для вычисления плотности электрического тока, возникающего в графене структурах под действием ЭМ полей используем квазиклассический подход, основанный на кинетическом уравнении Больцмана, записанном в приближении постоянного времени релаксации τ [14]:

$$\vec{j} = -e \int_0^\infty e^{-\xi} d\xi \sum_{\vec{p}} f_0(\vec{p}) \vec{v} \left(\vec{p} + \frac{e}{c} (\vec{A}(t) - \vec{A}(t - \tau\xi)) \right). \quad (1)$$

Здесь $\vec{v} = \partial \epsilon / \partial \vec{p}$ – скорость носителя заряда, $\epsilon(\vec{p})$ – закон дисперсии, $f_0(\vec{p})$ – равновесная функция распределения, нормированная на концентрацию носителей заряда n_0 , $\vec{A}$ – векторный потенциал электрического поля ЭМ волны, распространяющейся перпендикулярно графеновой плоскости. Считаем далее, что падающее ЭМ излучение представляет собой суперпозицию двух синусоидальных волн поляризованных во взаимно перпендикулярных направлениях:

$$\vec{E}(t) = \{E_1 \cos(\omega_1 t + \varphi), E_2 \cos \omega_2 t\}, \quad \omega_1 \neq \omega_2. \quad (2)$$

Если электронный газ считать невырожденным ($T \gg n_0 \hbar^2 v_F^2 / \Delta$, T – температура электронного газа, выраженная в энергетических единицах), но при этом рассматривать относительно низкие температуры ($T \ll \Delta$), то для постоянной составляющей плотности тока, возникающего под дей-

ствием электрического поля с напряженностью (2), получим

$$j_x^{dc} = j_0 \int_0^\infty V(\tau\xi) e^{-\xi} d\xi, \quad (3)$$

где обозначено $j_0 = en_0 v_F$,

$$V(\tau\xi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^\infty \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^{k+n} \Gamma(k+n+\frac{1}{2})}{k!n!} \langle b_1^{2k+1} b_2^{2n} \rangle_t, \quad (4)$$

$$b_1(t, \tau\xi) = \frac{2a_1}{\omega_1 \tau} \sin \frac{\omega_1 \tau\xi}{2} \cos \left(\omega_1 t + \varphi - \frac{\omega_1 \tau\xi}{2} \right), \quad (5)$$

$$b_2(t, \tau\xi) = \frac{2a_2}{\omega_2 \tau} \sin \frac{\omega_2 \tau\xi}{2} \cos \left(\omega_2 t - \frac{\omega_2 \tau\xi}{2} \right), \quad (6)$$

$\Gamma(\xi)$ – гамма-функция, $a_{1,2} = v_F \tau e E_{1,2} / \Delta$. Выясним при каких частотах ω_1 и ω_2 усреднение в (4) будет давать результат отличный от нуля. Для этого заметим, что спектр множителя $b_1^{2k+1}(t)$, фигурирующего в (4) под знаком усреднения, содержит частоты в нечетное число раз отличающиеся от ω_1 , причем наивысшей частотой является $(2k+1)\omega_1$. Аналогично множитель $b_2^{2n}(t)$ содержит частоты в четное число раз отличающиеся от ω_2 , причем $2n\omega_2$ – максимальная частота в его спектре. Обозначим $r = 2(n'+k') + 1$ – суммарная степень амплитуд напряженностей электрических полей под знаком усреднения в (4) в слагаемом с индексами $k = k'$ и $n = n'$. Согласно формулам (4)–(6), чтобы в r -м порядке по полю усреднение по времени давало отличный от нуля результат, необходимо совпадение наивысших частот спектров множителей $b_1^{2k'+1}(t)$ и $b_2^{2n'}(t)$: $(2k'+1)\omega_1 = 2n'\omega_2$. Другими словами необходимо, чтобы частоты электрических полей, осциллирующих в ортогональных направлениях, относились как четное к нечетному числу, причем частота тянущего поля $E_x(t)$ должна отвечать четному числу:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{2n'}{2k'+1}. \quad (7)$$

Таким образом, чтобы в системе существовал постоянный ток, необходимо чтобы падающая волна была поляризована так, чтобы вектор электрического поля описывал в пространстве фигуру Лиссажу с отношением (7).

Покажем теперь, что сумма числителя и знаменателя неприводимой дроби (14) дает для плотности постоянного тока наименьший порядок не исчезающего приближения по амплитуде переменного поля. Для этого в табл. 1 выписаны спектры множителей $b_1^{2k'+1}(t)$ и $b_2^{2n'}(t)$ для некоторых степеней. Например, если частоты $\omega_1 : \omega_2$ отно-

Таблица 1. Спектры множителей b_1^{2k+1} и b_2^{2n} для различных k и n

Множитель b_1^{2k+1}	Спектр	Множитель b_2^{2n}	Спектр
b_1	ω_1	b_2^2	$2\omega_2$
b_1^3	$3\omega_1, \omega_1$	b_2^4	$4\omega_2, 2\omega_2$
b_1^5	$5\omega_1, 3\omega_1, \omega_1$	b_2^6	$6\omega_2, 4\omega_2, 2\omega_2$
...	...	...	...

сятся как 2 : 3, то, согласно табл. 1, отличный от нуля результат получится после усреднения произведений $b_1^3 b_2^2, b_1^3 b_2^4, b_1^3 b_2^6, \dots, b_1^5 b_2^2, b_1^5 b_2^4, b_1^5 b_2^6, \dots$, так как спектры именно этих пар множителей содержат одинаковые частоты. Видно, что наименьший порядок не исчезающего приближения по амплитуде поля дает пара множителей $b_1^3 b_2^2$, сумма степеней которых равна сумме числителя и знаменателя неприводимой дроби (14). В дальнейшем будем оставлять ненулевое усредненное слагаемое, соответствующее наименьшему порядку приближения, пренебрегая старшими порядками.

Считая условие (7) выполненным, приведем выражения (3)–(6) к удобной для дальнейших расчетов форме:

$$j_x^{\text{dc}} = (-1)^{\frac{k+n-1}{2}} j_0 \Phi_{n:k}(\omega\tau) a_1^k a_2^n \cos k\varphi, \quad (8)$$

$$\Phi_{n:k}(\xi) = \frac{2\Gamma\left(\frac{k+n}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)n^k k^n \xi^{k+n}} \times \int_0^\infty e^{-x} \sin\left(\frac{n\xi\eta}{2}\right) \sin^n\left(\frac{k\xi\eta}{2}\right) d\eta. \quad (9)$$

Здесь вместо частот ω_1 и ω_2 подставлено $\omega_1 = n\omega$, $\omega_2 = k\omega$, n – четное число, k – нечетное число, n и k – взаимно простые числа. Функция (9) дает частотную характеристику для плотности тока (8). Число $n+k$ будем называть порядком эффекта генерации постоянного тока. Так, например, подстановка $n=2$ и $k=1$ в (8) дает результат [11], где изучен эффект генерации постоянного тока 3-го порядка. Соответствующая частотная характеристика $\Phi_{2:1}(\omega\tau)$ показана на рис. 1.

ЭФФЕКТЫ ГЕНЕРАЦИИ ПОСТОЯННОГО ТОКА 5-ГО И 7-ГО ПОРЯДКОВ

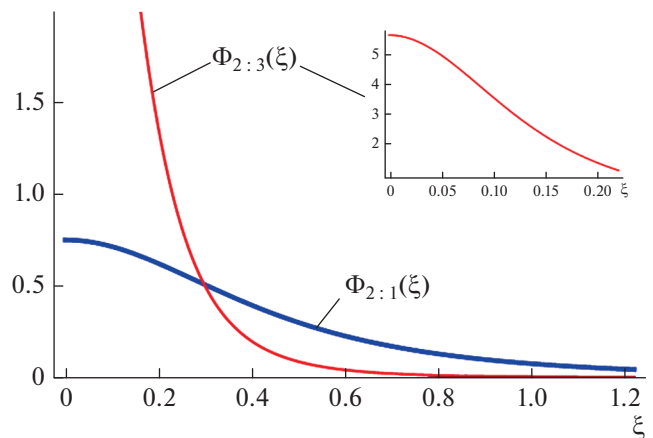
Более высокие порядки эффекта генерации дают значительно меньшие токи по сравнению с 3-м порядком. Здесь мы рассмотрим особенности эффектов 5-го и 7-го порядком. В этих случаях формы кривых $\Phi_{n:k}(\xi)$ качественно не отлича-

ются от $\Phi_{2:1}(\xi)$ (в качестве примера на рис. 1 приведен график функции $\Phi_{2:3}$). Исключение составляют ситуации, когда $\omega_1 : \omega_2 = 4 : 1; 6 : 1$. Положив в формуле (8) $n=4$ и $k=1$, получим

$$j_x^{\text{dc}} = j_0 \Phi_{4:1}(\omega\tau) a_1^4 a_2^1 \cos\varphi, \quad (10)$$

$$\Phi_{4:1}(\xi) = \frac{45}{16(1+\xi^2)(1+4\xi^2)(1+9\xi^2)(1+16\xi^2)} \cdot (11)$$

На рис. 2а показан график функции (11), из которого видна особенность, отсутствующая для эффекта 3-го порядка, а именно – исчезновение тока при выполнении условия $5\omega^2\tau^2 = 1$. На рис. 2а эта ситуация указана стрелкой. Здесь $\xi_0 = 1/\sqrt{5} \approx 0.447$. Указанная особенность эффекта может лечь в основу компенсационного метода измерения постоянной τ . Для этого необходимо поместить графен в электрическое поле поляризованное по фигуре Лиссажу с отношением $\omega_1 : \omega_2 = 4 : 1$, и, меняя параметр ω так, чтобы отношение 4 : 1 не менялось, добиться исчезновения постоянного тока. Если это произойдет при $\omega = \omega_0$, то $\tau = 0.447\omega_0^{-1}$. Аналогичная ситуация имеет место для эффекта 7-го порядка с отношением 6 : 1 с тем отличием, что функ-


Рис. 1. Графики функций $\Phi_{2:1}(\xi)$ и $\Phi_{2:3}(\xi)$.

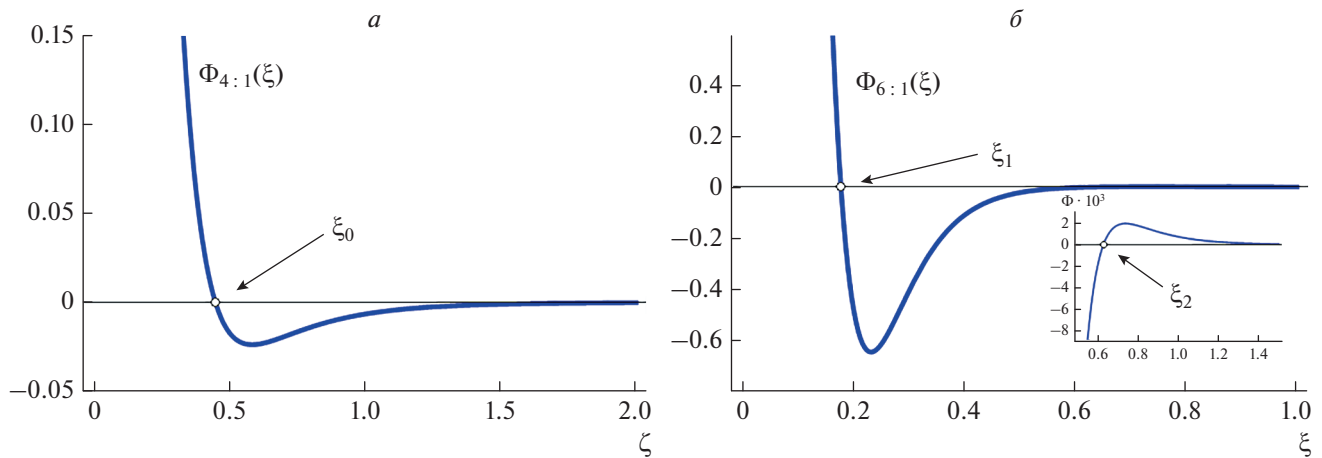


Рис. 2. Графики функций: $\Phi_{4:1}(\xi)$ (а) и $\Phi_{6:1}(\xi)$ (б).

ция $\Phi_{6:1}(\xi)$ имеет не один, а два корня (рис. 2б): при $\xi_1 \approx 0.175$ и $\xi_2 \approx 0.621$.

ДЕТЕКТОР КРАТНЫХ ЧАСТОТ

Помимо компенсационных методов диагностики процессов столкновений описанный выше эффект генерации постоянного тока может иметь еще одно применение, а именно, он может быть положен в основу работы устройства, пропускающего только те частоты ω_1 , которые по отношению к заданной ω_2 удовлетворяют условию (7). Назовем такое устройство детектором кратных частот. Последний должен состоять из следующих основных модулей (рис. 3): 1) система поляризаторов, формирующая на входе два ЭМ луча со взаимно ортогональными плоскостями поляризации; 2) фотоэлемент, рабочей средой которого является графеновый лист в термостате с подходящим температурным режимом; 3) фильтр

нижних частот, подавляющий гармоники плотности тока, наводимого в рабочей среде за счет суперпозиции ЭМ волн, распространяющихся от поляризаторов к фотоэлементу; 4) анализатор на выходе; 5) “реле” или “ключ”, управляющий анализатором. Последний компонент срабатывает в случае, когда $j_x^{\text{dc}} \neq 0$ (x — направление анализатора).

Если частота волны с поляризацией параллельной оси x окажется выше частоты второй волны ω , например, в 2 раза, то в рабочей среде возникнет постоянный ток. Это приведет к срабатыванию “реле”, открывающему анализатор, который, в свою очередь, пропустит волну с поляризацией параллельной x . В результате на выходе детектора будет волна с частотой 2ω .

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выполненные выше вычисления плотности тока, возникающего в дираковском кристалле за счет суперпозиции ЭМ волн, поляризованных во взаимно ортогональных направлениях, показали следующее. Во-первых, постоянная составляющая j_x^{dc} отлична от нуля, если частоты волн относятся как четное n к нечетному k целым числам, т.е. вектор $\vec{E}$ описывает фигуру Лиссажу с отношением $n : k$. Причем частота тянущего поля E_x должна соответствовать четному числу n . Во-вторых, изученная генерация постоянного тока является эффектом $(n + k)$ -го порядка по амплитуде поля: $j_x^{\text{dc}} \propto E_1^k E_2^n$. В третьих, $j_x^{\text{dc}} \propto \Phi_{n:k}(\omega\tau)$, причем функция $\Phi_{n:k}(\omega\tau)$ для некоторых отношений $n : k$ меняет знак с изменением параметра ω , что может лечь в основу компенсационного метода измерения времени релаксации в системе.

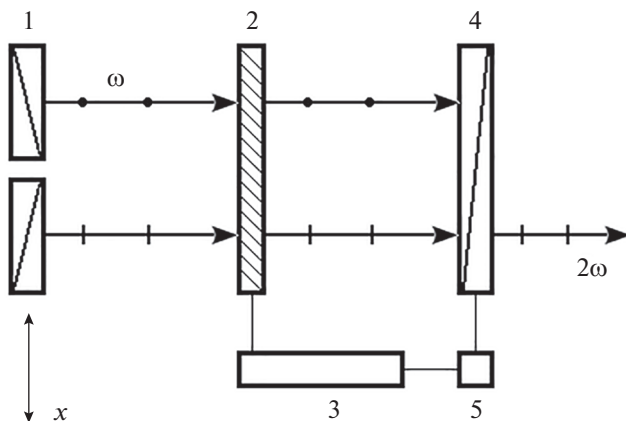


Рис. 3. Принципиальная схема детектора кратных частот.

Так как для вычисления плотности тока потребовалось разложение в степенные ряды по амплитудам электрических сигналов, последние должны иметь определенное ограничение сверху. Сделаем численную оценку верхней границы амплитуды напряженности электрического поля. Для следующих типичных значений параметров [26, 27]: $n_0 \sim 10^{10} \text{ см}^{-2}$, $v_F = 10^8 \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}$, $\Delta \sim 0.13 \text{ эВ}$ и для характерного времени столкновений $\tau \sim 10^{-12} \text{ с}$ величина $\Delta/v_F \tau e$ имеет порядок $1.3 \cdot 10^3 \text{ В} \cdot \text{см}^{-1}$. Таким образом, формула (8) может применяться, если напряженности поля значительно меньше чем $10^3 \text{ В} \cdot \text{см}^{-1}$. Для этих целей вполне подходят поля с напряженностями около $100 \text{ В} \cdot \text{см}^{-1}$, что вполне реализуемо на практике.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства просвещения Российской Федерации в рамках государственного задания. Название проекта “Распространение и взаимодействие уединенных волн в наноструктурах на основе дираковских материалов”.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bykov A.Y., Murzina T.V., Rybin M.G. *et al.* // Phys. Rev. B. 2012. V. 85. Art. No. 121413(R).
2. Hong S.-Y., Dadap J.I., Petrone N. *et al.* // Phys. Rev. X. 2013. V. 3. Art. No. 021014.
3. An Y.Q., Rowe J.E., Dougherty D.B. *et al.* // Phys. Rev. B. 2014. V. 89. Art. No. 115310.
4. Lin K.-H., Weng S.-W., Lyu P.-W. *et al.* // Appl. Phys. Lett. 2014. V. 105. Art. No. 151605.
5. Gu T., Petrone N., McMillan J.F. *et al.* // Nature Photonics. 2012. V. 6. P. 554.
6. Zhang H., Virally S., Bao Q.L. *et al.* // Opt. Lett. 2012. V. 37. P. 1856.
7. Vermeulen N., Castello-Lurbe D., Cheng J.L. *et al.* // Phys. Rev. Appl. 2016. V. 6. Art. No. 044006.
8. Unterrainer K., Keay B.J., Wanke M.C. *et al.* // Phys. Rev. Lett. 1996. V. 76. P. 2973.
9. Mikhailov S.A. // Europhys. Lett. 2007. V. 79. Art. No. 27002.
10. Mikhailov S.A., Ziegler K. // J. Phys. Cond. Matter. 2008. V. 20. Art. No. 384204.
11. Завьялов Д.В., Конченков В.И., Крючков С.В. // ФТТ. 2009. Т. 51. № 10. С. 2033; Zav'yalov D.V., Konchenkov V.I., Kryuchkov S.V. // Phys. Solid State. 2009. V. 51. P. 2157.
12. Peres N.M.R., Bludov Y.V., Santos J.E. *et al.* // Phys. Rev. B. 2014. V. 90. Art. No. 125425.
13. Шорохов А.В., Пятаев М.А., Хвастунов Н.Н. и др. // Письма в ЖЭТФ. 2014. Т. 100. № 12. С. 870; Shorokhov A.V., Pyataev M.A., Khvastunov N.N. *et al.* // JETP Lett. 2015. V. 100. P. 766.
14. Mikhailov S.A. // Phys. Rev. B. 2017. V. 95. Art. No. 085432.
15. Бадикова П.В., Глазов С.Ю. // Изв. РАН. Сер. физ. 2015. V. 79. № 12. P. 1650; Badikova P.V., Glazov S.Y. // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2015. V. 79. No. 12. P. 1443.
16. Бадикова П.В., Глазов С.Ю., Сыродоев Г.А. // Изв. РАН. Сер. физ. 2020. Т. 84. № 1. С. 38; Badikova P.V., Glazov S.Y., Syrodov G.A. // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2020. V. 84. No. 1. P. 30.
17. Kryuchkov S.V., Kukhar E.I., Zav'yalov D.V. // Physica E. 2013. V. 53. P. 124.
18. Kryuchkov S.V., Kukhar E.I., Zav'yalov D.V. // Phys. Wave Phenom. 2013. V. 21. P. 207.
19. Cheng J.L., Vermeulen N., Sipe J.E. // Phys. Rev. B. 2015. V. 91. Art. No. 235320.
20. Cheng J.L., Vermeulen N., Sipe J.E. // Sci. Reports. 2017. V. 7. Art. No. 43843.
21. Завьялов Д.В., Крючков С.В., Марчук Э.В. // Письма в ЖТФ. 2008. Т. 34. С. 21; Zav'yalov D.V., Kryuchkov S.V., Marchuk E.V. // Tech. Phys. Lett. 2008. V. 34. P. 915.
22. Крючков С.В., Кухарь Е.И., Яковенко В.А. // Изв. РАН. Сер. физ. 2010. Т. 74. № 12. С. 1759; Kryuchkov S.V., Kukhar E.I., Yakovenko V.A. // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2010. V. 74. No. 12. P. 1679.
23. Кухарь Е.И., Крючков С.В., Ионкина Е.С. // Изв. РАН. Сер. физ. 2018. Т. 82. № 1. С. 101; Kukhar E.I., Kryuchkov S.V., Ionkina E.S. // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2018. V. 82. No. 1. P. 90.
24. Khonina S.N., Ustinov A.V., Porfirev A.P. // Opt. Lett. 2020. V. 45. P. 4112.
25. Khonina S.N., Degtyarev S.A., Ustinov A.V. *et al.* // Opt. Express. 2021. V. 29. Art. No. 18634.
26. Zhou S.Y., Gweon G.-H., Fedorov A.V. *et al.* // Nature Mater. 2007. V. 6. P. 770.
27. Mattausch A., Pankratov O. // Phys. Rev. Lett. 2007. V. 99. Art. No. 076802.
28. Novikov D.S. // Phys. Rev. B. 2007. V. 76. Art. No. 245435.

Direct current generation in Dirac crystal in the field of the wave polarized by Lissajous figure

S. V. Kryuchkov^{a, b}, E. I. Kukhar^{b, *}, V. V. Tarasov^b

^aVolgograd State Socio-Pedagogical University, Volgograd, 400066 Russia

^bVolgograd State Technical University, Volgograd, 400005 Russia

*e-mail: eikuhar@yandex.ru

The constant component of the current density aroused in a Dirac crystal due to the alternating electric field of a wave polarized by the Lissajous figure has been calculated within the relaxation time approximation. The amplitude and frequency characteristics of direct current have been analyzed for the different frequency ratios. Some ways of applications of the studied effect have been discussed.