

УДК 535.03:519.06

## ОТРАЖАТЕЛЬНЫЕ СВОЙСТВА АКТИВНЫХ СЛОИСТЫХ СРЕД В УСЛОВИЯХ ГЕНЕРАЦИИ ВТОРОЙ ОПТИЧЕСКОЙ ГАРМОНИКИ

© 2023 г. И. Г. Захарова<sup>1, 2, \*</sup>, Т. М. Лысак<sup>1, 2</sup>, А. А. Калинович<sup>1</sup>, Д. А. Чайковский<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования  
“Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова”, Москва, Россия

<sup>2</sup>Университет МГУ-ППИ в Шэньчжэне, Шэньчжэнь, Китайская Народная Республика

\*E-mail: zaharova@physics.msu.ru

Поступила в редакцию 24.07.2023 г.

После доработки 14.08.2023 г.

Принята к публикации 28.08.2023 г.

Изучены отражающие свойства активной периодической среды с квадратичной нелинейностью на основе описания генерации второй оптической гармоники в квазиоптическом приближении. С помощью численного моделирования проанализировано влияние асимметричной брэгговской связи встречных волн на основной частоте на поглощающие/генерирующие и отражающие свойства активной среды.

DOI: 10.31857/S0367676523702940, EDN: QUJWJM

### ВВЕДЕНИЕ

Среды, состоящие из чередующихся слоев с генерацией и поглощением, обладают асимметричными свойствами, удовлетворяющим условиям РТ-симметрии. В этих средах действительная часть диэлектрической проницаемости вдоль направления распространения волн является четной, а мнимая часть нечетной. О таких средах, искусственно созданных добавлением активных элементов, говорят, как об активных структурах, в которых нарушается консервативность. Нелинейные активные периодические среды в оптике обсуждались в [1, 2]. Исследователей привлекают перспективы улучшения управления светом в таких структурах.

Слоистые (периодические) оптические среды весьма интересны и в отсутствие усиления/поглощения и нелинейности. Здесь говорят о существовании запрещенной (брэгговской) полосы частот. В общем, этот эффект приводит к быстрому затуханию волн в соответствующем диапазоне за счет отражения от слоев. Однако, при этом можно наблюдать интересные явления, например, боковой сдвиг Гооса–Хенхен [3]. В присутствии нелинейности в периодических средах при определенных условиях формируются брэгговские (щелевые) солитоны, которые изучались для различных нелинейностей [4–6], в том числе, для квадратичной нелинейности [7, 8]. Известно, что генерация второй оптической гармоники с последующей возможностью захвата двухцветного солитона происходит при меньших интенсивно-

стях, чем захват солитона при кубической нелинейности [9]. Недавно мы численно исследовали формирование и распространение брэгговских солитонов, рассматривая как пассивные, так и активные квадратично нелинейные среды и учитывая конечную ширину пучка в поперечном направлении [10, 11].

В настоящем исследовании мы рассматриваем отражающие свойства активной слоистой среды. Для этого, используя для описания ГВГ в такой среде систему нелинейно связанных уравнений для медленно меняющихся амплитуд прямых и обратных волн на основной и удвоенной частотах, мы проводим численное моделирование.

### СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ

Система связанных уравнений относительно нормированных медленно меняющихся амплитуд прямой и обратной волн на основной частоте ( $E_{1\pm}$ ) (FF) и на частоте второй гармоники ( $E_{2\pm}$ ) (SH) может быть записана в следующем виде:

$$i\left(\frac{\partial E_{1+}}{\partial z} + \frac{\partial E_{1+}}{\partial \tau}\right) + D_{x,1} \frac{\partial^2 E_{1+}}{\partial x^2} + \delta_1 E_{1+} + (\kappa_1 + g_1) E_{1-} + \gamma_1 E_{1+}^* E_{2+} = 0, \quad (1)$$

$$i\left(-\frac{\partial E_{1-}}{\partial z} + \frac{\partial E_{1-}}{\partial \tau}\right) + D_{x,1} \frac{\partial^2 E_{1-}}{\partial x^2} + \delta_1 E_{1-} + (\kappa_1 - g_1) E_{1+} + \gamma_1 E_{1-}^* E_{2-} = 0, \quad (2)$$

$$i\left(\frac{\partial E_{2+}}{\partial z} + v\frac{\partial E_{2+}}{\partial \tau}\right) + D_{x,2}\frac{\partial^2 E_{2+}}{\partial x^2} + \delta_2 E_{2+} + (\kappa_2 + g_2)E_{2-} + \gamma_2(E_{1+})^2 = 0, \quad (3)$$

$$i\left(-\frac{\partial E_{2-}}{\partial z} + v\frac{\partial E_{2-}}{\partial \tau}\right) + D_{x,2}\frac{\partial^2 E_{2-}}{\partial x^2} + \delta_2 E_{2-} + (\kappa_2 - g_2)E_{2+} + \gamma_2(E_{1-})^2 = 0. \quad (4)$$

В уравнениях (1)–(4)  $E_{1\pm} = \frac{E_1^\pm}{\sqrt{I_{10}}}$ ,  $E_{2\pm} = \frac{E_2^\pm}{\sqrt{I_{10}}}$  – медленно меняющиеся амплитуды взаимодействующих волн, нормированные на корень квадратный из пиковой интенсивности падающего излучения  $I_{10}$ . Параметры  $\delta_1 = \left(k_1 - \frac{\pi}{d}\right)\frac{1}{|\kappa|}$ ,  $\delta_2 = \left(k_2 - \frac{2\pi}{d}\right)\frac{1}{|\kappa|}$  – нормированные отстройки от брэгговского резонанса на основной и удвоенной частотах, где  $\kappa = \frac{\omega_0}{c\sqrt{\epsilon_0(\omega_0)}}\frac{\Delta\epsilon_R}{4}$  – параметр брэгговской связи между встречными волнами на основной частоте,  $\omega_0$  – несущая частота излучения основной гармоники,  $k_1, k_2$  – волновые числа излучения на основной и удвоенной частотах, соответственно;  $d$  – период слоистой структуры. Безразмерные параметры  $\kappa_1 = \frac{\kappa}{|\kappa|}$ ,  $\kappa_2 = \frac{2\omega_0}{c\sqrt{\epsilon_0(2\omega_0)}}\frac{\Delta\epsilon_{R2}}{4|\kappa|}$  описывают брэгговскую связь между встречными волнами на основной частоте и на частоте второй гармоники, соответственно;  $g_1 = \frac{\omega_0}{c\sqrt{\epsilon_0}}\frac{\Delta\epsilon_I}{4}\frac{1}{|\kappa|}$  и  $g_2 = \frac{2\omega_0}{c\sqrt{\epsilon_0(2\omega_0)}}\frac{\Delta\epsilon_{I2}}{4}\frac{1}{|\kappa|}$  соответствующие безразмерные параметры несимметричной связи между встречными волнами. Указанные параметры брэгговской связи получены в предположении периодической зависимости диэлектрической проницаемости среды вдоль координаты распространения  $z$ :

$$\epsilon(z) = \epsilon_0 + \Delta\epsilon_R \cos\left(\frac{2\pi}{d}z\right) + i\Delta\epsilon_I \sin\left(\frac{2\pi}{d}z\right) + \Delta\epsilon_{R2} \cos\left(\frac{4\pi}{d}z\right) + i\Delta\epsilon_{I2} \sin\left(\frac{4\pi}{d}z\right),$$

Параметры  $\gamma_1 = \frac{4\pi}{c^2 k_1} \omega_0^2 \chi^{(2)}(-\omega_0, 2\omega_0) \frac{\sqrt{I_{10}}}{|\kappa|}$  и  $\gamma_2 = \frac{2\pi}{c^2 k_2} 4\omega_0^2 \chi^{(2)}(\omega_0, \omega_0) \frac{\sqrt{I_{10}}}{|\kappa|}$  характеризуют квадратичную нелинейность, где  $\chi^{(2)}$  – нелинейная восприимчивость среды;  $D_{x,2} = (2k_2 |\kappa| a_x^2)^{-1}$  и  $D_{x,1} = (2k_1 |\kappa| a_x^2)^{-1}$  – дифракционные параметры для волны на основной и удвоенной частоте, соответственно. Безразмерная переменная  $z$ , вдоль

которой распространяется излучение, измеряется в единицах параметра брэгговской связи волн на основной частоте, ( $z \rightarrow z|\kappa|$ ), безразмерная поперечная переменная  $x$  измеряется в единицах поперечной ширины пучка  $a_x$  ( $x \rightarrow x/a_x$ ),  $\tau$  – безразмерное время, связанное с физическим временем  $t$  соотношением  $\tau = \frac{c|\kappa|}{\sqrt{\epsilon_0(\omega_0)}}t$ .

Отметим, что при таком выборе безразмерных параметров, параметр брэгговской связи на основной частоте может принимать значения  $\pm 1$  в зависимости от знака  $\Delta\epsilon_R$ , а значения параметров несимметричной брэгговской связи должны удовлетворять неравенствам  $|g_1| < 1$ ,  $|g_2| < |\kappa_2|$ .

Система, аналогичная системе (1)–(4), но в другой нормировке, была получена в работах [7, 8] в пассивной среде и без учета дифракции по переменной  $x$ . В работах [10, 11] были приведены аналогичные уравнения в активной среде.

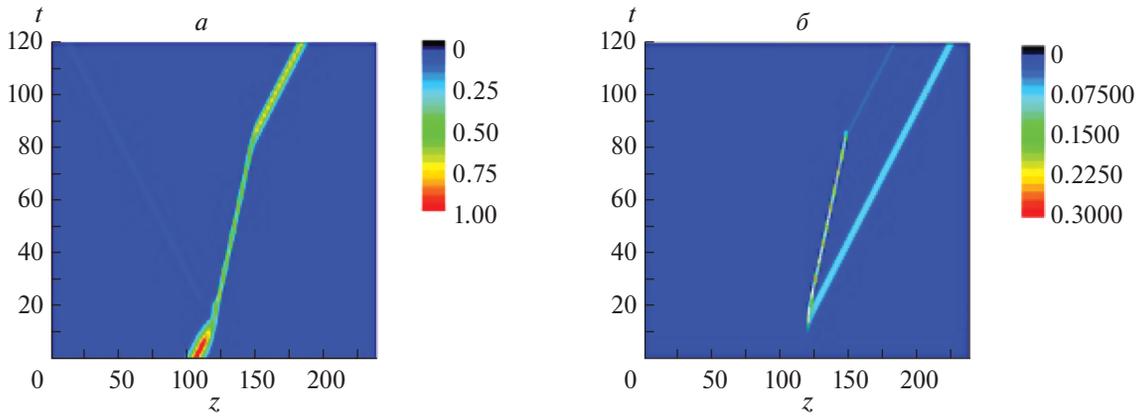
Мы предполагаем, что периодическая среда окружена однородной линейной средой с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_0$ . Тем самым распространение лазерного излучения в такой среде (при  $0 < x < L_x$  и  $0 < z < L_{\text{left}}$ ,  $L_{\text{right}} < z < L_z$ ) описывается уравнениями (1)–(4), в левой части которых оставлены только два первых слагаемых. На границах рассматриваемых областей ставятся нулевые граничные условия, а при  $\tau = 0$  задаются начальные условия:

$$\begin{aligned} E_{1+(z=0,x,\tau)} &= E_{2+(z=0,x,\tau)} = E_{1-(z=L_x,x,\tau)} = E_{2-(z=L_x,x,\tau)} = 0, \\ E_{1\pm}(z, x=0, \tau) &= E_{2\pm}(z, x=0, \tau) = \\ &= E_{1\pm}(z, x=L_x, \tau) = E_{2\pm}(z, x=L_x, \tau) = 0, \quad (5) \\ E_{1+(z,x,\tau=0)} &= E_{10}(z, x), \quad E_{2+(z,x,(z=L_{\text{left}}=0))} = E_{20}(z, x), \\ E_{10}(z=0) &= E_{10}. \end{aligned}$$

Распространение двуцветного излучения в активной квадратичной слоистой среде, описываемое уравнениями (1)–(5) удовлетворяет закону изменения энергии, который в случае  $\gamma_1 = \gamma_2$ , может быть записан в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (|E_{1+}|^2 + |E_{1-}|^2 + |E_{2+}|^2 + |E_{2-}|^2) dz dx &= \\ &= -4g_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \text{Im} \left( E_{1+}^* E_{1-} \right) \right) dz dx - \\ &- 4g_2 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \text{Im} \left( E_{2-}^* E_{2+} \right) \right) dz dx = 0. \quad (6) \end{aligned}$$

Закон изменения энергии (6) в пассивной среде ( $g_1 = g_2 = 0$ ) переходит в закон сохранения энергии [7].



**Рис. 1.** Отражение и прохождение излучения на основной частоте (а) и удвоенной частоте (б) через активную периодическую структуру ( $g_1 = 0.5$ ).

Уравнения (1)–(4) решаются численно с использованием консервативной нелинейной разностной схемы на характеристической сетке. Схема реализуется с помощью итерационного алгоритма.

В настоящей работе ограничимся рассмотрением случая широких по поперечной координате пучков, положив в уравнениях  $D_{x,1} = D_{x,2} = 0$  и пренебрегая зависимостью от координаты  $x$ . Предполагается, что на слоистую среду падает излучение в виде пучка солитонного профиля на основной частоте, а излучение на частоте второй гармоники отсутствует:

$$E_{10}(z) = \text{ch}^{-1}((z - L_0)/h_z), \quad E_{20}(z) = 0.$$

Параметр  $h_z$  характеризуют ширину пучка в продольном направлении,  $L_0$  – положение центра падающего пучка.

Численное моделирование будем проводить для случая брэгговской связи волн только на основной частоте, отстройки от резонанса в окрестности правой границы брэгговской щели и большой отстройки от брэгговского резонанса волн на удвоенной частоте:

$$\kappa_1 = 1, \quad \delta_1 = 0.9, \quad \delta_2 = -5, \quad \kappa_2 = g_2 = 0. \quad (7)$$

Безразмерные параметры, характеризующие квадратичную среду:  $\gamma_1 = \gamma_2 = 2.2$ ; геометрические параметры слоистой среды:  $L_{\text{left}} = 120$ ,  $L_{\text{right}} = 150$ , ширина расчетной области  $L_z = 240$ ; параметры падающего пучка:  $h_z = 5$ ,  $L_0 = 105$ . Данные безразмерные параметры соответствуют пиковой интенсивности падающей волны  $I_{10} = 500 \text{ МВт/см}^2$ ,  $\kappa = 0.5 \text{ мм}^{-1}$  и  $\frac{4\pi}{c^2} \omega_0^2 \chi^{(2)}(-\omega_0, 2\omega_0) \approx 10^{-3} \text{ Вт}^{-1/2}$  [7, 8].

### ОТРАЖАТЕЛЬНЫЕ СВОЙСТВА АКТИВНОЙ СЛОИСТОЙ СРЕДЫ

Отражательные свойства линейной активной периодической среды ( $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ ) характеризуются коэффициентами отражения и прохождения

$$R = \frac{i(\kappa_1 - g_1) \text{sh}(\lambda l)}{(\lambda \text{ch}(\lambda l) - i\delta_1 \text{sh}(\lambda l))}, \quad (8)$$

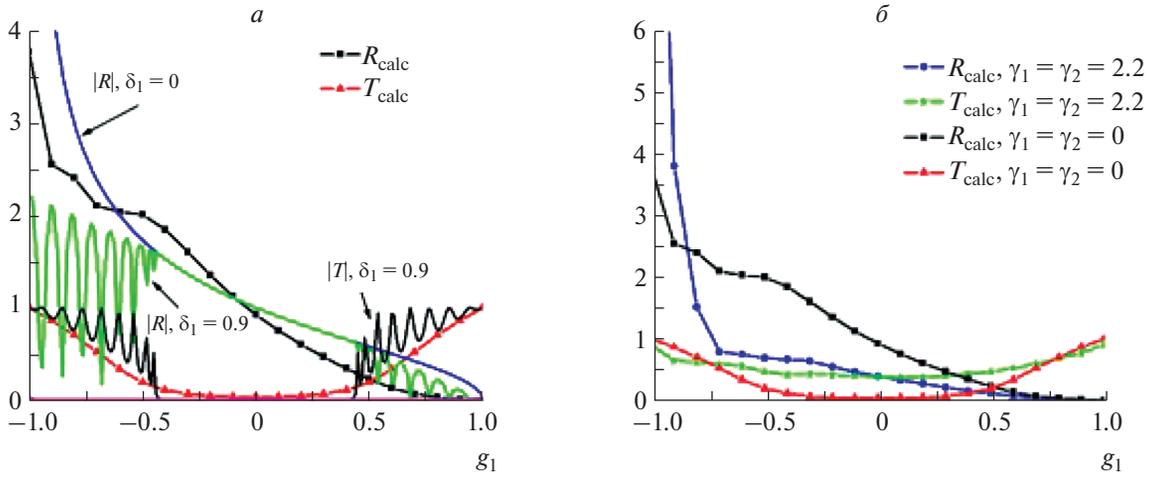
$$T = -\frac{\lambda}{(\lambda \text{ch}(\lambda l) - i\delta_1 \text{sh}(\lambda l))}, \quad \lambda = \sqrt{\kappa_1^2 - g_1^2 - \delta_1^2}.$$

которые в пассивной среде ( $g_1 = 0$ ) переходят в хорошо известные формулы для линейной периодической среды [12].

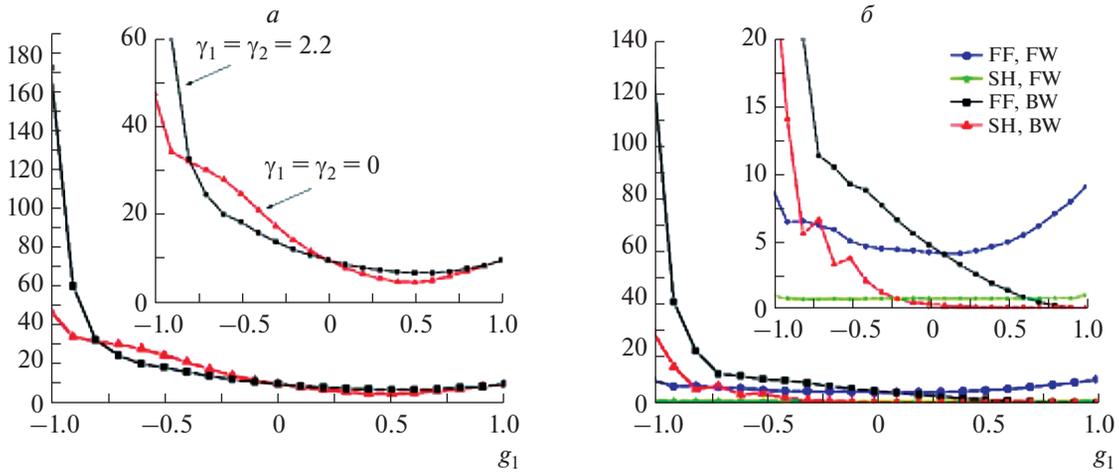
В численном эксперименте для оценки соотношения энергий отраженных и прошедших волн на основной частоте будем использовать также отношение энергии обратной волны слева от слоистой среды к энергии падающего излучения ( $R_{\text{calc}}$ ) и отношение энергии прямой волны справа от слоистой среды к энергии падающего излучения ( $T_{\text{calc}}$ ):

$$R_{\text{calc}} = \frac{\int_0^{L_{\text{left}}} |E_{1-}(z, \tau)|^2 dz}{\int_0^{L_{\text{left}}} |E_{10}(z)|^2 dz}, \quad T_{\text{calc}} = \frac{\int_{L_{\text{right}}}^{L_z} |E_{1+}(z, \tau)|^2 dz}{\int_0^{L_{\text{left}}} |E_{10}(z)|^2 dz}, \quad (9)$$

Величины (9) можно использовать для характеристики свойств отражения и пропускания слоистых сред после прохождения через среду основной части излучения. Для рассматриваемых параметров численного моделирования прохождение через среду основной части излучения наблюдается к моменту времени  $\tau = 120$  (рис. 1), поэтому вычислять коэффициенты (9) будем в момент времени  $\tau = 120$ .



**Рис. 2.** Коэффициенты отражения  $|R|$  и прохождения  $|T|$  для линейных активных периодических сред, построенные по формулам (8) (а, сплошные кривые); коэффициенты отражения  $R_{\text{calc}}$  и пропускания  $T_{\text{calc}}$ , вычисленные по результатам численного моделирования для момента времени  $\tau = 120$  по формулам (9) на правом краю щели, для линейных сред (маркированные кривые на рисунках а, б) и квадратичных сред (маркированные кривые на рисунке б).

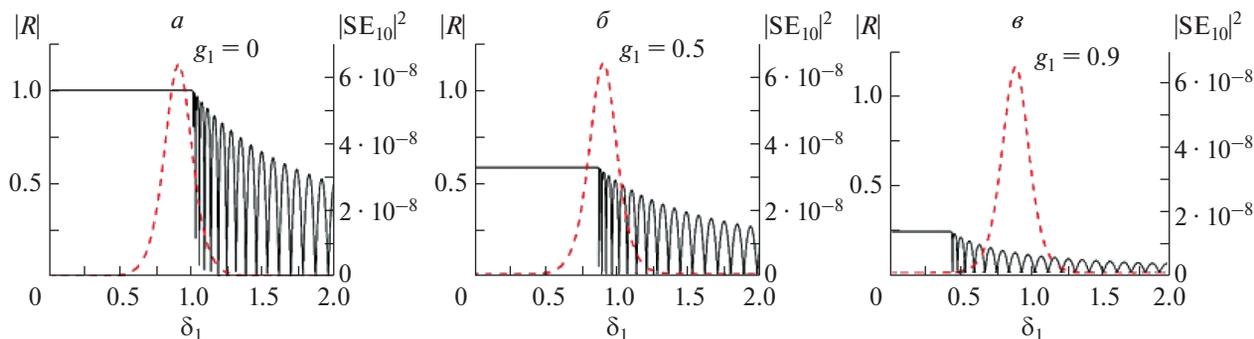


**Рис. 3.** Суммарная энергия четырех волн для линейной и квадратичной сред (а); распределение энергии по волнам для квадратичной среды (б) в момент времени  $\tau = 120$ . FF – волна на основной частоте, SH – волна на удвоенной частоте, FW – прямая волна, BW – обратная волна.

Как известно, в пассивной линейной среде в случае точного брэгговского резонанса ( $\delta_1 = 0$ ) коэффициент отражения  $|R|$  равен 1, а коэффициент пропускания  $|T|$  равен нулю. В активных средах в зависимости от знака параметра  $g_1$  коэффициент отражения в случае точного брэгговского резонанса может быть как меньше 1 (в случае положительных значений  $g_1$ ), так и больше 1 (в случае отрицательных значений  $g_1$ ), при этом коэффициент пропускания остается равным 0 (рис. 2). Отличие от 1 коэффициента отражения связано с поглощающими/генерирующими свойствами активных сред и демонстрирует, что при  $g_1 < 0$  среда является генерирующей, а при  $g_1 > 0$  – поглощающей.

Данный вывод не является тривиальным следствием закона изменения энергии (6), но тем не менее подкрепляется результатами математического моделирования, приведенными на рис. 3а, на котором изображена суммарная энергия прямой и обратной волны основной частоты в момент времени  $\tau = 120$ , после прохождения излучением линейной периодической структуры.

В окрестности границы брэгговской щели ( $\delta_1 = 0.9$ ) зависимость коэффициента отражения  $|R|$  от параметра  $g_1$  совпадает с соответствующей зависимостью для  $\delta_1 = 0$  только при небольших значениях несимметричной связи  $g_1$  (изменяющихся в интервале  $[-0.4, 0.4]$ ). Для этих же зна-



**Рис. 4.** Коэффициент отражения для пассивной (*a*,  $g_1 = 0$ ) и активных (*б*,  $g_1 = 0.5$  и *в*,  $g_1 = 0.9$ ) линейных слоистых структур (сплошные кривые); спектр падающего излучения (пунктир).

чений несимметричной связи коэффициент пропускания  $|T|$  близок в 0. В случае сильной асимметричной связи коэффициенты пропускания осциллируют и зависят от параметра  $s$ , при этом коэффициент пропускания  $|T|$  оказывается близким к 1 при  $|g_1| \rightarrow 1$ , т.е. в окрестности разрушения РТ-симметрии. Коэффициент отражения  $|R|$  во всех случаях не превосходит соответствующих значений коэффициента отражения для точного брэгговского резонанса.

Моделирование прохождения пучка с центральной частотой, отстоящей на  $\delta_1 = 0.9$  от частоты точного брэгговского резонанса, и полушириной  $h_z = 5$ , через линейную среду (спектр излучения приведен на рис. 4), дает похожие значения коэффициентов отражения и пропускания  $R_{\text{calc}}$  и  $T_{\text{calc}}$  в момент времени  $\tau = 120$  (формулы (9), рис. 2*a*).

Приведенные особенности зависимости коэффициентов отражения и прохождения от асимметричной связи иллюстрируются рис. 4. На этом рисунке хорошо видно уменьшение значения коэффициента отражения  $|R|$  в условиях брэгговского резонанса и сужение области полного отражения с ростом положительной асимметричной связи.

Квадратичная нелинейность приводит к заметному уменьшению отражения и увеличению прохождения энергии волны на основной частоте по сравнению с линейной средой в области  $|g_1| < 0.75$  (рис. 2*б*), что объясняется перекачкой части энергии волны на основной частоте в волну на удвоенной частоте. В то же время большие значения отрицательной асимметричной связи  $-1 < g_1 < -0.75$  способствуют значительному росту энергии обратной волны на обеих частотах (рис. 3*б*). Заметим, что в целом, отрицательная асимметричная связь характеризуется превышением энергии отраженной волны над энергией прошедшей волны для обеих частот, тогда как для

положительной асимметричной связи характерна обратная зависимость. При этом в численном эксперименте наблюдается сильный рост энергии отраженных волн при приближении отрицательной асимметричной связи к порогу разрушения РТ-симметрии ( $g_1 \rightarrow -1$ ), а также исчезновение отраженных волн при приближении положительной асимметричной связи также к порогу разрушения РТ-симметрии ( $g_1 \rightarrow 1$ ). Таким образом, можно утверждать, что положительная асимметричная связь способствует прохождению излучения в условиях его поглощения, тогда как отрицательная асимметричная связь усиливает отражение в условиях его генерации.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, исследованы отражательные свойства активных слоистых структур с квадратичной нелинейностью. Показано, что отрицательная асимметричная связь приводит к генерации энергии излучения на обеих частотах, причем большая часть этой энергии концентрируется в обратных волнах. Положительная асимметричная связь в слоистой среде вызывает поглощение энергии излучения, при этом основная часть энергии излучения концентрируется в прямых волнах.

Исследование выполнено при поддержке Междисциплинарной научно-образовательной школы Московского университета “Фотонные и квантовые технологии. Цифровая медицина”.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Makris G., El-Ganainy R., Christodoulides D.N., Musslimani Z.H. // Phys. Rev. Lett. 2008. V. 100. Art. No. 103904.
2. Ruter C.E., Makris G., El-Ganainy R. et al. // Nature Phys. 2010. V. 10. P. 192.

3. *Захарова И.Г., Марченко В.Ф., Неберо М.С., Сухоруков А.П.* // Вестн. МГУ. Сер. 3: Физ. Астрон. 2011. Т. 5. № 13. С. 13.
4. *de Sterke C.M., Sipe J.E.* Progress in optics. Chap. 3. Amsterdam: Elsevier, 1994. P. 203.
5. *Atai J., Malomed B.A., Merhasin I.M.* // Opt. Commun. 2006. V. 265. P. 342.
6. *Akter A., Islam M.J., Atai J.* // Appl. Sciences. 2021. V. 11. P. 4833.
7. *Conti C., Assanto G., Trillo S.* // Phys. Rev. Lett. 1997. V. 78. P. 2341.
8. *Conti C., Assanto G., Trillo S.* // Opt. Lett. 1997. V. 22. No. 17. P. 1350.
9. *Kivshar Yu.S., Agrawal G.P.* Optical solitons: from fibers to photonic crystals. Amsterdam: Academic Press, 2003.
10. *Комиссарова М.В., Захарова И.Г., Лысак Т.М., Калинович А.А.* // Изв. РАН. Сер. физ. 2021. Т. 85. № 12. С. 1720; *Komissarova M.V., Zakharova I.G., Lysak T.M., Kalinovich A.A.* // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2021. V. 85. No. 12. P. 1370.
11. *Komissarova M.V., Lysak T.M., Zakharova I.G., Kalinovich A.A.* // J. Phys. Conf. Ser. 2022. V. 2249. Art. No. 012008.
12. *Карнов С.Ю., Столяров С.Н.* // УФН. 1993. Т. 163. № 1. С. 63.

## Reflective properties of active layered media at second optical harmonic generation

I. G. Zakharova<sup>a, b, \*</sup>, T. M. Lysak<sup>a, b</sup>, A. A. Kalinovich<sup>a</sup>, D. A. Chaykovskii<sup>b</sup>

<sup>a</sup>*Lomonosov Moscow State University, Moscow, 119991 Russia*

<sup>b</sup>*MSU-BIT University, Shenzhen, 518172 China*

*\*e-mail: zaharova@physics.msu.ru*

We studied the reflective properties of an active periodic medium with quadratic nonlinearity using numerical modeling based on the description of the generation of the second optical harmonic in the quasi-optical approximation. The model under consideration appears to be a system of four coupled equations for slowly varying amplitudes of forward and backward waves. Based on numerical simulation, the influence of the asymmetric Bragg coupling of counterpropagating waves at the fundamental frequency on the absorbing/generating and reflecting properties of the active medium is analyzed.