

# ИССЛЕДОВАНИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПОЛИТРОП В СЛУЧАЕ НЕНУЛЕВОЙ КОСМОЛОГИЧЕСКОЙ ПОСТОЯННОЙ

*М. Шариф\**, *С. Садик\*\**

*Математический факультет, Университет Пенджаба  
54590, Лазор, Пакистан*

Поступила в редакцию 13 марта 2018 г.,  
после переработки 20 июля 2018 г.  
Принята к публикации 24 сентября 2018 г.

(Перевод с английского)

## STUDY OF CYLINDRICAL POLYTROPES WITH COSMOLOGICAL CONSTANT

M. Sharif, S. Sadiq

Исследуется цилиндрически-симметричное распределение идеальной жидкости с ненулевой космологической постоянной для двух случаев политропного уравнения состояния. Сформулированы и численно решены соответствующие структурные уравнения. Оказалось, что полученные политропные модели являются перспективными с точки зрения физики, поскольку удовлетворяют всем энергетическим условиям. Проанализирована устойчивость политроп путем возмущения материальных переменных, а именно, политропной постоянной и политропного индекса, и построена функция распределения силы. Найдено, что при возмущении политропной постоянной компактный объект является устойчивым во всех случаях, в то время как возмущение политропного индекса приводит к устойчивым результатам только в первом случае политропного уравнения состояния.

DOI: 10.1134/S0044451019030118

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Исследование физических аспектов поведения звездных объектов, а также различных этапов их эволюции является одной из наиболее интригующих проблем релятивистской астрофизики. Такие факторы как конденсация газообразных составляющих и собственная гравитация играют важную роль в формировании структуры небесных тел и в их эволюции. Внутренние законы этих объектов хорошо описывает уравнение состояния (УС). В работе [1] показано, что при специальном выборе температуры распределенного в звезде газа можно добиться

выполнения политропного соотношения между давлением и плотностью. Такие звездные модели были названы политропными звездами, они представляют собой грубую аппроксимацию более реалистичных звездных моделей. Все это способствовало привлечению внимания исследователей к моделированию компактных объектов с помощью политропного УС.

Структура политроп определяется уравнением Лейна–Эмдена, которое представляет собой систему нелинейных дифференциальных уравнений (уравнение гидростатического равновесия и уравнение сохранения массы). В работе [2], являющейся пионерской в области исследования изотропных релятивистских сферических систем с политропным УС, было получено численное решение структурных уравнений. В работе также обсуждалось, что гравитационный коллапс массивных звезд может слу-

\* E-mail: msharif.math@pu.edu.pk

\*\* E-mail: sobiasadiq.01@gmail.com

жить механизмом выделения большого количества энергии. В работе [3] был найден класс точных решений для статической политропной сферы, а также оценивались различные физические свойства, которые можно получить с использованием реалистичной модели звезды. В работе [4] исследовались как изотропные, так и анизотропные сферически-симметричные релятивистские политропы и были получены численные решения структурных уравнений, описывающих политропы. В работе [5] были построены анизотропные конформно-плоские политропы со сферической симметрией, а с помощью энергетических условий была проверена их эффективность. В работе [6] рассматривалась политропная заряженная сфера с обобщенным политропным УС и было показано, что устойчивость моделей увеличивается с уменьшением параметра компактности.

В соответствии с последними наблюдательными данными современной космологии, наша Вселенная ускоренно расширяется, что подтверждается существованием необычного вида энергии, известной как темная энергия. Согласно некоторым теоретическим результатам, темная энергия может описываться космологической постоянной (также интерпретируемой как плотность энергии вакуума), которая характеризуется отрицательным давлением. Эти наблюдения привлекли внимание к исследованиям астрофизических объектов с ненулевой космологической постоянной. В работе [7] были получены решения полевых уравнений Эйнштейна для сферически-симметричного распределения масс в случае ненулевой космологической постоянной. В этой работе также исследовалась структура несферических компактных объектов и были получены их звездные свойства, такие как масса, радиус, давление и плотность.

В работе [8] рассматривалась неустойчивость сферически-симметричного распределения материи в случае ненулевой космологической постоянной. Было получено, что при большой космологической постоянной увеличивается значение критического адиабатического индекса. В работе [9] обсуждалось формирование анизотропных компактных звезд в случае ненулевой космологической постоянной и было получено, что предложенная модель справедлива для любой компактной звезды. В работе [10] исследовалось влияние ненулевой космологической постоянной на сферически-симметричные политропы для случая идеальной жидкости и анализировались физические свойства политропной сферы. Было получено, что отталкивающая космологическая посто-

янная существенно влияет на политропы на масштабах длин, сравнимых с космологической постоянной.

Хорошо известно, что сферически-симметричные статические решения полевых уравнений Эйнштейна являются основой общей теории относительности, однако цилиндрически-симметричные статические решения не так хорошо известны. Исследование несферических самогравитирующих систем по своей значимости идет вслед за исследованием цилиндрических решений полевых уравнений Эйнштейна в виде гравитационных волн. В связи с этим многие авторы стремились найти цилиндрические решения, а также исследовать физические свойства звездных моделей в контексте цилиндрической симметрии. В работе [11] рассматривалась устойчивость цилиндрических политроп и было получено, что, в отличие от сферических политроп, они являются устойчивыми. В работе [12] изучались цилиндрически-симметричные самогравитирующие жидкости и было получено, что материальные величины оказывают значительное влияние на динамику распределения цилиндрически-симметричной материи. В работе [13] исследовалось формирование анизотропных цилиндрических компактных объектов с ненулевой космологической постоянной, для этих объектов проверялись условия регулярности и устойчивости. В работе авторов [14] в конформно-плоском контексте были сформулированы цилиндрические модели для анизотропных политроп и было получено, что компактность моделей возрастает. В работе [15] представлен общий формализм для заряженной анизотропной цилиндрической политропы, причем оказалось, что одна из рассматриваемых моделей является приемлемой с точки зрения физики.

В настоящей работе рассматриваются изотропные цилиндрические политропы в случае ненулевой космологической постоянной. Работа построена следующим образом. В следующем разделе обсуждается распределение материи для двух случаев политропного УС для цилиндрически-симметричного пространства-времени. Это необходимо для построения структурных уравнений, с помощью которых можно исследовать физические характеристики политроп. Затем полученные модели анализируются численно. Также исследуются энергетические условия для рассматриваемых моделей. В разд. 3 проведен анализ устойчивости политропных моделей с использованием расщепления. В последнем разделе сформулированы основные результаты.

## 2. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЖИДКОСТИ И СТРУКТУРНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Сформулируем уравнения общей теории относительности, которые описывают равновесное состояние цилиндрически-симметричного распределения материи, удовлетворяющие политропному УС. Линейный элемент, соответствующий статической цилиндрической симметрии, имеет вид [16]

$$ds^2 = -A^2(r) dt^2 + B^2(r) dr^2 + C^2(r) d\phi^2 + dz^2. \quad (1)$$

Предполагается, что такой конфигурации соответствует идеальная жидкость, ограниченная гиперповерхностью  $\Sigma$ , так что

$$r_\Sigma = \text{const.}$$

Тензор энергии-импульса для такого распределения материи имеет вид

$$T_{\alpha\beta} = (\rho + P)V_\alpha V_\beta + P g_{\alpha\beta}, \quad (2)$$

где  $\rho$ ,  $P$  и  $V_\alpha$  — плотность энергии, изотропное давление и 4-скорость, соответственно. В сопутствующей системе координат 4-скорость имеет вид

$$V_\alpha = -A\delta_\alpha^0 \Rightarrow V_\alpha V^\alpha = -1.$$

Соответствующие полевые уравнения

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta} + \Lambda g_{\alpha\beta} = 8\pi T_{\alpha\beta}$$

принимают вид

$$8\pi\rho + \Lambda = \frac{1}{B^2} \left( \frac{B'C'}{BC} - \frac{C''}{C} \right),$$

$$8\pi P - \Lambda = \frac{1}{B^2} \left( \frac{A'C'}{AC} \right),$$

$$8\pi P - \Lambda = \frac{1}{B^2} \left( \frac{A''}{A} - \frac{A'B'}{AB} \right),$$

$$8\pi P - \Lambda = \frac{1}{B^2} \left( \frac{A''}{A} - \frac{A'B'}{AB} - \frac{B'C'}{BC} + \frac{A'C'}{AC} + \frac{C''}{C} \right),$$

где штрих обозначает дифференцирование по  $r$ , а  $\Lambda$  — космологическая постоянная. Пусть  $C(r) = r$  — координата Шварцшильда. Тогда полевые уравнения редуцируются к виду

$$8\pi\rho + \Lambda = \frac{1}{rB^2} \left( \frac{B'}{B} \right), \quad (3)$$

$$8\pi P - \Lambda = \frac{1}{rB^2} \left( \frac{A'}{A} \right), \quad (4)$$

$$8\pi P - \Lambda = \frac{1}{B^2} \left( \frac{A''}{A} - \frac{A'B'}{AB} \right), \quad (5)$$

$$8\pi P - \Lambda = \frac{1}{B^2} \left( \frac{A''}{A} - \frac{A'B'}{AB} - \frac{1}{r} \left( \frac{B'}{B} + \frac{A'}{A} \right) \right). \quad (6)$$

В работе [17] С-энергия для цилиндрического пространства-времени определяется как

$$m = \frac{1}{8} (1 - l^{-2} \nabla^\alpha \tilde{r} \nabla_\alpha \tilde{r}),$$

где

$$\tilde{\rho}^2 = \zeta_{(1)a} \zeta_{(1)}^a, \quad l^2 = \zeta_{(2)a} \zeta_{(2)}^a, \quad \tilde{r} = \bar{\rho}l.$$

Здесь  $\bar{\rho}$ ,  $l$  и  $\tilde{r}$  — радиус окружности, удельная длина и радиус области, соответственно, а

$$\zeta_{(1)} = \frac{\partial}{\partial \phi}, \quad \zeta_{(2)} = \frac{\partial}{\partial z}$$

— векторы Киллинга для цилиндрической системы. С-энергия для нашего линейного элемента принимает вид

$$m(r) = \frac{1}{8} \left( 1 - \frac{1}{B^2} \right). \quad (7)$$

Закон сохранения

$$T^\alpha_{\beta;\alpha} = 0$$

дает

$$P' + \frac{A'}{A}(\rho + P) = 0. \quad (8)$$

Используя уравнения (4) и (7), получаем

$$\frac{A'}{A} = \frac{8\pi r P - r\Lambda}{1 - 8m},$$

где

$$m = 2\pi \int_0^r r\rho dr \quad (9)$$

— полная масса внутри цилиндрического компактного объекта. Тогда уравнение (8) принимает вид

$$P' + \frac{8\pi r P - r\Lambda}{1 - 8m}(\rho + P) = 0. \quad (10)$$

Оказалось, что распределение материи отражает реальную картину, если оно удовлетворяет некоторым условиям, известным как энергетические условия. Для конфигурации, соответствующей изотропной жидкости, эти условия имеют вид

- (i)  $\rho \geq 0$ ,
  - (ii)  $\rho + P \geq 0$ ,
  - (iii)  $\rho - P \geq 0$ ,
  - (iv)  $\rho + 3P \geq 0$ .
- (11)

Теперь рассмотрим звездный объект для двух случаев политропного УС и сформулируем структурные уравнения.

2.1. Случай 1

Для этого случая рассмотрим

$$P = k\rho_0^\gamma = k\rho_0^{1+(1/n)}, \quad \rho - \rho_0 = nP, \quad (12)$$

где  $\gamma$  и  $n$  — порядок политропы и ее показатель, соответственно,  $k$  — константа, а  $\rho_0$  — барионная плотность. Введем новые переменные:

$$\alpha = \frac{P_c}{\rho_c}, \quad \Phi_0^n(\xi) = \frac{\rho_0(r)}{\rho_{0c}}, \quad \check{A} = \sqrt{\frac{4\pi\rho_c}{\alpha(n+1)}}, \quad (13)$$

$$\lambda = \frac{\Lambda}{8\pi\rho_c} = \frac{\rho_{vac}}{8\pi\rho_c}, \quad r = \frac{\xi}{\check{A}}, \quad v(\xi) = \frac{m(r)\check{A}^3}{4\pi\rho_c}.$$

Здесь  $\rho_{0c}$  и  $\rho_c$  — центральные значения плотности барионной и полной энергии,  $P_c$  — давление, а  $\rho_{vac}$  — плотность энергии вакуума. Члены  $\xi$ ,  $\lambda$ ,  $\Phi_0(\xi)$  и  $v(\xi)$  — безразмерная радиальная координата, космологическая постоянная, параметр плотности и массовый параметр, соответственно;  $\check{A}$  — константа, имеющая размерность обратной длины. Значение  $\Lambda$  оказалось равным  $1.3 \cdot 10^{-56}$  см<sup>-2</sup>, при этом соответствующая плотность энергии вакуума равна  $10^{-29}$  г/см<sup>3</sup> [10]. Подставляя уравнение (13) в уравнения (10) и (9), получим

$$\frac{d\Phi_0}{dx} + 2\check{A}^2 x \Phi_0^n (\Phi_0^n (1 - n\alpha + n\alpha\Phi_0) - \lambda) \times \\ \times (1 - n\alpha + \alpha(n+1)\Phi_0) \left(1 - \frac{8\alpha(n+1)v}{\check{A}}\right) = 0, \quad (14)$$

$$\frac{dv}{dx} - \frac{\check{A}\check{A}^2 x \Phi_0^n}{2} (1 - n\alpha + n\alpha\Phi_0) = 0, \quad (15)$$

где

$$x = \xi/\check{A},$$

$$\check{A} = r_\Sigma \check{A}.$$

Приведенные выше уравнения описывают внутреннюю структуру цилиндрического компактного объекта. Дифференцируя уравнение (14) по  $x$ , а затем, используя уравнение (15), получаем

$$\frac{(1-n\alpha+(1+n)\alpha\Phi_0)(\Phi_0^n(1-n\alpha+n\alpha\Phi_0)-\lambda)}{1-\frac{8(1+n)\alpha v}{\check{A}}} \times \\ \times \left[ \frac{2\Phi_0^n}{1-\frac{8(1+n)\alpha v}{\check{A}}} + 8(1+n) \times \right. \\ \left. \times \alpha\check{A}^2 x^2 \Phi_0^{2n} (1-n\alpha+n\alpha\Phi_0) + 2nx\Phi_0^{n-1} \frac{d\Phi_0}{dx} \right] + \\ + \frac{2x\Phi_0^n}{1-\frac{8(1+n)\alpha v}{\check{A}}} \left[ n\Phi_0^{n-1} (1-n\alpha+\alpha(n+1)\Phi_0)^2 + \right. \\ \left. + \alpha(n+1)(\Phi_0^n(1-n\alpha+n\alpha\Phi_0)-\lambda) \right] \frac{d\Phi_0}{dx} + \\ + \check{A}^{-2} \frac{d^2\Phi_0}{dx^2} = 0. \quad (16)$$

Это уравнение называется уравнением Лейна–Эмдена, оно описывает политропу в состоянии гидростатического равновесия. Для энергетических условий в этом случае получаем

- (i)  $1 - n\alpha + n\alpha\Phi_0 \geq 0$ ,
  - (ii)  $1 - n\alpha + \alpha(n+1)\Phi_0 \geq 0$ ,
  - (iii)  $1 - n\alpha + \alpha(n-1)\Phi_0 \geq 0$ ,
  - (iv)  $1 - n\alpha + \alpha(n+3)\Phi_0 \geq 0$ .
- (17)

Заметим, что уравнения (14) и (15) представляют собой систему двух дифференциальных уравнений для двух неизвестных ( $\Phi_0$  и  $v$ ). Решим эти уравнения численно с начальными условиями

$$v(0) = 0, \quad \Phi_0(0) = 1. \quad (18)$$

На рис. 1 приведены решения уравнений (14) и (15) для случаев нулевой и ненулевой космологической постоянной. На рис. 1а приведены зависимости  $\Phi_0$ . Видно, что эта величина может быть положительной внутри объекта и убывает при удалении от центра звезды. Более того, при  $\lambda = 0$  величина  $\Phi_0$  уменьшается быстрее. На рис. 1б приведены зависимости безразмерной массовой функции  $v$ . Видно, что  $v$  имеет большие значения при больших значениях  $\lambda$ . Это означает, что увеличение  $\lambda$  приводит к более компактным моделям. На рис. 2 приведены зависимости энергетических условий для случаев нулевой и ненулевой космологической постоянной. На рисунке видно, что при всех значениях  $\lambda$  выполнены энергетические условия.

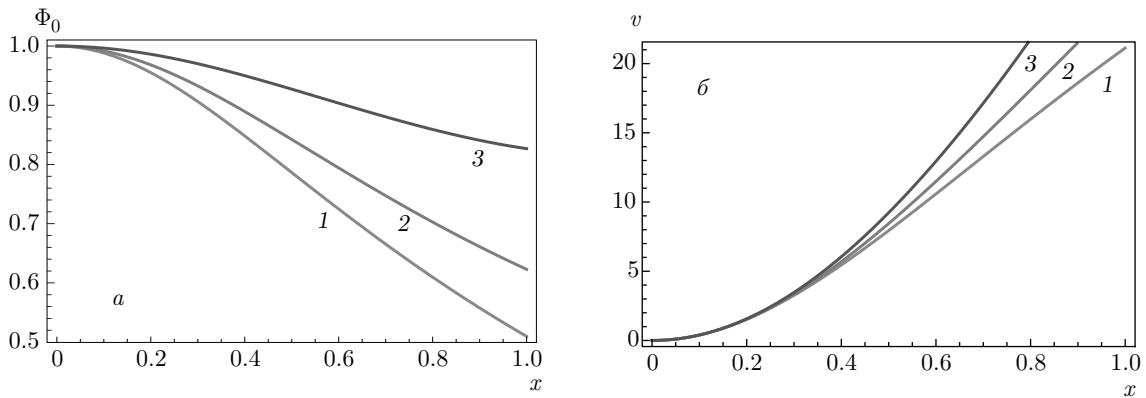


Рис. 1. Зависимости  $\Phi_0$  (а) и  $v$  (б) от  $x$  для  $\lambda = 0$  (1), 0.3 (2) и 0.7 (3) при  $n = 1.5, \alpha = 0.2$

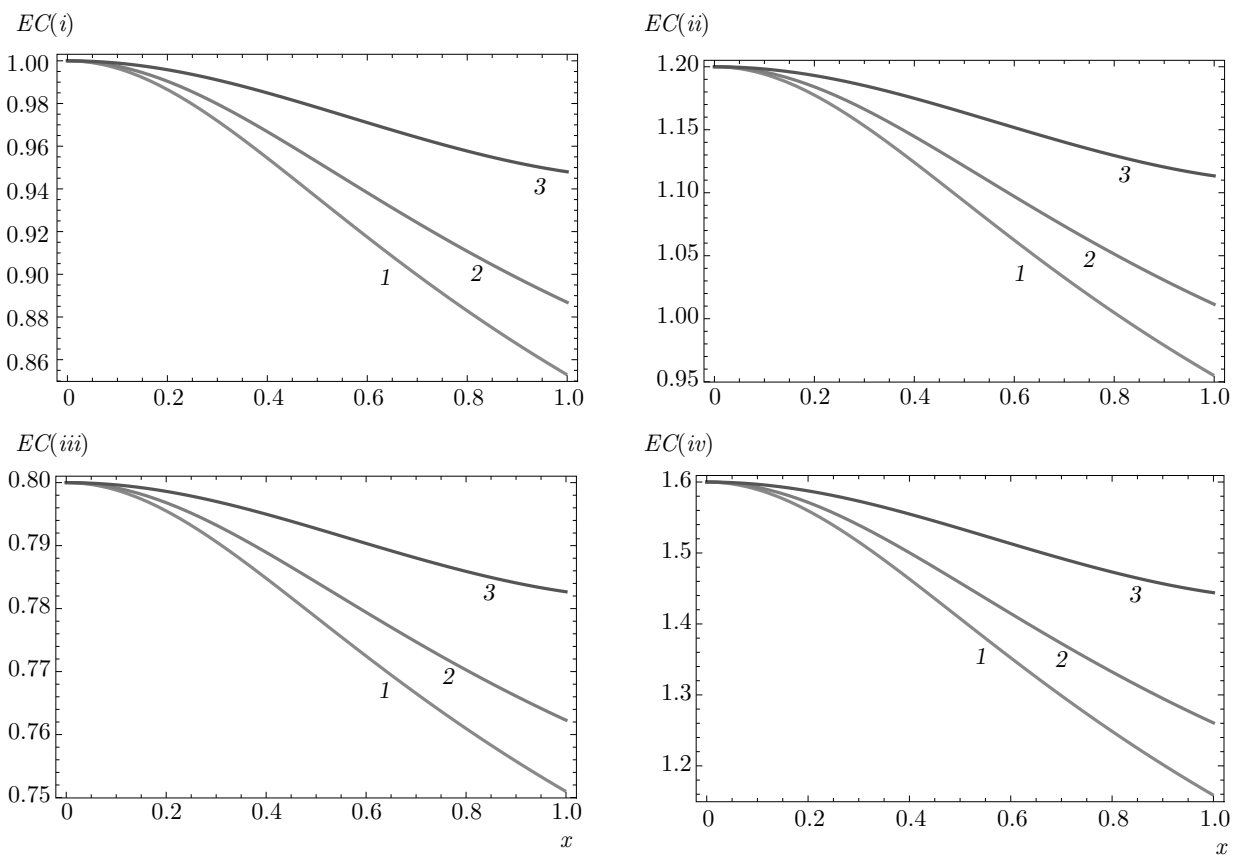


Рис. 2. Зависимости энергетических условий от  $x$  для  $\lambda = 0$  (1), 0.3 (2) и 0.7 (3) при  $n = 1.5, \alpha = 0.2$

**2.2. Случай 2**

Для этого случая рассмотрим

$$P = k\rho^\gamma = k\rho^{1+(1/n)}, \quad \rho \left(1 - k\rho^{\frac{1}{n}}\right)^n = \rho_0, \quad (19)$$

где

$$\rho(r) = \rho_c \Phi^n(\xi).$$

В этом случае структурные уравнения приводят к

$$\frac{d\Phi}{dx} + 2\tilde{A}^2 x (\Phi_0^n (\Phi_0^n - \lambda) (1 + \alpha\Phi) \times \left(1 - \frac{8\alpha(n+1)v}{\tilde{A}}\right) = 0, \quad (20)$$

$$\frac{dv}{dx} - \frac{\tilde{A}\tilde{A}^2 x \Phi^n}{2} = 0. \quad (21)$$

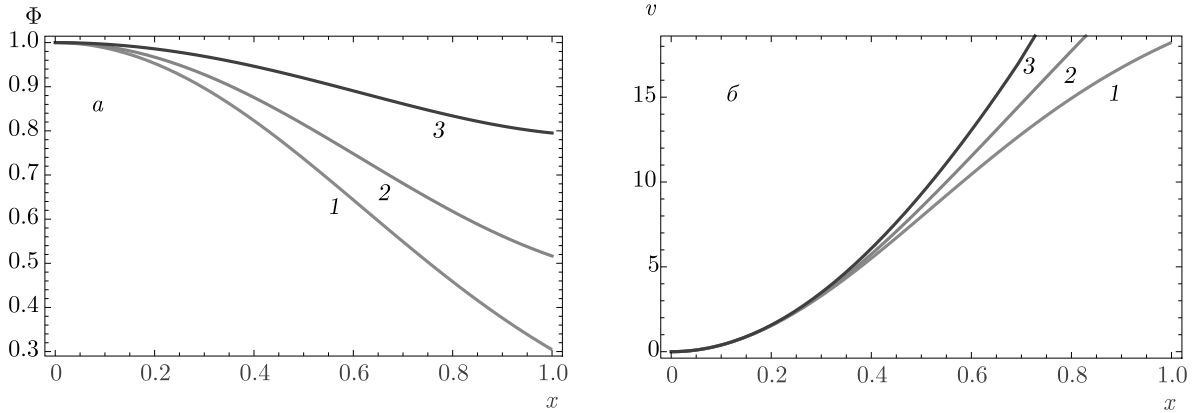


Рис. 3. Зависимости  $\Phi$  (а) и  $v$  (б) от  $x$  для  $\lambda = 0$  (1), 0.3 (2) и 0.7 (3) при  $n = 1.5, \alpha = 0.2$

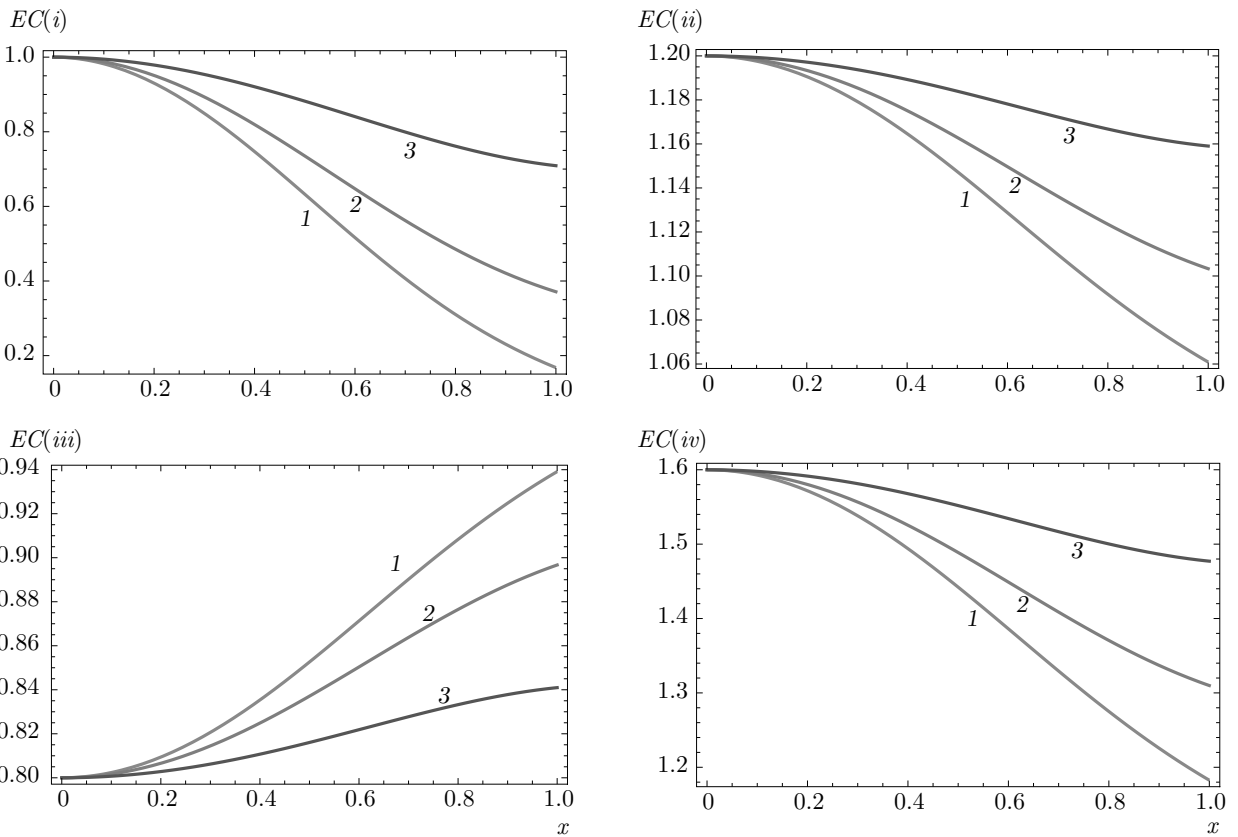


Рис. 4. Зависимости энергетических условий от  $x$  для Случая 2 для  $\lambda = 0$  (1), 0.3 (2) и 0.7 (3) при  $n = 1.5, \alpha = 0.2$

Действуя аналогично Случаю 1, получаем, что в Случае 2 уравнение Лейна – Эмдена принимает вид

$$\frac{(1 + \alpha\Phi)(\Phi^n - \lambda)}{1 - \frac{8(1+n)\alpha v}{\check{A}}} \left[ 2\Phi^n \left( 1 + \frac{nx}{\Phi} \frac{d\Phi}{dx} \right) + \frac{8(1+n)\alpha \check{A}^2 x^2 \Phi^{2n}}{1 - \frac{8(1+n)\alpha v}{\check{A}}} \right] + \frac{2x\Phi^n}{1 - \frac{8(1+n)\alpha v}{\check{A}}} \times$$

$$\times [n\Phi^{n-1}(1 + \alpha\Phi) + \alpha(\Phi^n - \lambda)] \frac{d\Phi}{dx} + \check{A}^{-2} \frac{d^2\Phi}{dx^2} = 0. \quad (22)$$

Энергетические условия в этом случае имеют вид

$$\begin{aligned} & \text{(i) } \Phi^n \geq 0, \\ & \text{(ii) } 1 + \alpha\Phi \geq 0, \\ & \text{(iii) } 1 - \alpha\Phi \geq 0, \\ & \text{(iv) } 1 + 3\alpha\Phi \geq 0. \end{aligned} \tag{23}$$

Решаем уравнения (20) и (21) и получаем зависимости  $\Phi$  и  $v$ , показанные на рис. 3. На рисунке видно, что полученные зависимости аналогичны зависимостям, полученным для Случая 1. Энергетические условия также выполнены (см. рис. 4).

### 3. РАСЩЕПЛЕНИЕ ПОЛИТРОП

Релятивистские звездные модели не работают, если они не устойчивы относительно флуктуаций по материальным переменным, например, давлению и плотности энергии. Их небольшое возмущение нарушает состояние равновесия небесных тел, что приводит к возникновению разнообразных интересных явлений, таких как коллапс, расширение, расщепление и опрокидывание. Расщепление и опрокидывание самогравитирующих объектов соответствуют появлению в распределении материи радиальных сил с разными знаками [18]. Если радиальная сила направлена внутрь компактного объекта и меняет свой знак в некоторой точке (точке расщепления), то происходит расщепление, в противном случае происходит опрокидывание. Это не имеет отношения к коллапсу или расширению материи, а лишь к тенденции к расщеплению в некоторой конкретной точке внутри жидкости. Проанализируем устойчивость моделей цилиндрических политропов с использованием расщепления. Для этого функцию распределения силы определим как

$$R = \frac{dP}{dr} + \frac{8\pi r P - r\Lambda}{1 - 8m}(\rho + P). \tag{24}$$

Для каждого случая мы нарушаем состояние равновесия системы, возмущая плотность энергии и давление посредством возмущения политропных параметров.

#### 3.1. Случай 1

Сначала введем возмущение политропной постоянной, а именно,

$$k \rightarrow \tilde{k} = k + \delta k,$$

тогда плотность энергии и давление тоже будут испытывать возмущение:

$$\tilde{P} = hP, \quad \tilde{\rho} = \rho_0 + nhP, \tag{25}$$

где  $h = \tilde{k}/k$ , а тильдой обозначены возмущенные величины. Подставляя возмущенные параметры в уравнение (24), получим

$$\begin{aligned} \tilde{R} = \rho_c \Phi_0^n \left[ \tilde{A} h \alpha (n+1) \frac{d\Phi_0}{d\xi} + \frac{8\pi\xi\rho_c(\alpha\Phi_0 - \lambda)}{\tilde{A} \left(1 - \frac{8\alpha(n+1)\tilde{v}}{\tilde{A}}\right)} \times \right. \\ \left. \times (1 - n\alpha + \alpha(n+1)h\Phi_0) \right], \end{aligned}$$

что соответствует нарушенному состоянию системы. Используя соотношение

$$\hat{R} = \frac{\tilde{A}}{4\pi\rho_c^2} \tilde{R},$$

можно переписать это уравнение в виде

$$\begin{aligned} \hat{R} = h\Phi_0^n \alpha(n+1) \frac{d\Phi_0}{d\xi} + \frac{2\xi\Phi_0^n(\alpha\Phi_0 - \lambda)}{1 - \frac{8\alpha(n+1)\tilde{v}}{\tilde{A}}} \times \\ \times (1 - n\alpha + \alpha(n+1)h\Phi_0). \end{aligned} \tag{26}$$

Теперь разложим функцию  $\hat{R}$  в ряд Тейлора и получим

$$\begin{aligned} \delta\hat{R} = \hat{R}(\xi, 1 + h, v + \delta v) = \hat{R}(\xi, 1, v) + \\ + \left. \frac{\partial\hat{R}}{\partial h} \right|_{h=1, \tilde{v}=v} \delta h + \left. \frac{\partial\hat{R}}{\partial \tilde{v}} \right|_{h=1, \tilde{v}=v} \delta v. \end{aligned} \tag{27}$$

Поскольку в невозмущенном состоянии система находится в равновесии, имеем

$$\hat{R}(\xi, 1, v) = 0.$$

Из уравнения (26) получаем

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial\hat{R}}{\partial h} \right|_{h=1, \tilde{v}=v} = \frac{2\alpha\xi\Phi_0^{1+n}}{1 - \frac{8(1+n)\alpha v}{\tilde{A}}} \times \\ \times \left[ (n+1)(\alpha\Phi_0 - \lambda) + (1 - n\alpha + (1+n)\alpha\Phi_0) \right] + \\ + \Phi_0^n \frac{d\Phi_0}{d\xi}, \end{aligned} \tag{28}$$

$$\left. \frac{\partial \hat{R}}{\partial \tilde{v}} \right|_{h=1, \tilde{v}=v} = \frac{16(1+n)\alpha\xi\Phi_0^n(-\lambda+\alpha\Phi_0)(1-n\alpha+(1+n)\alpha\Phi_0)}{\check{A}\left(1-\frac{8(1+n)\alpha v}{\check{A}}\right)^2}. \tag{29}$$

Более того, массовая функция в этом случае дает

$$\delta v = \frac{\partial v}{\partial h} \delta h = \frac{n\alpha\check{A}}{2} f_1(\xi) \delta h, \tag{30}$$

где

$$f_1(\xi) = \int_0^\xi \hat{\xi} \Phi_0^{n+1} d\hat{\xi}.$$

Подставляя уравнения (28)–(30) в уравнение (27), для функции силы получаем

$$\delta \hat{R}_1 = \delta h \Phi_0^n \left( \frac{2\check{A}(1+n)\alpha\xi\Phi_0(-\lambda+\alpha\Phi_0)}{\check{A}-8(1+n)\alpha v} + \frac{2\check{A}\alpha\xi\Phi_0(1-n\alpha+(1+n)\alpha\Phi_0)}{\check{A}-8(1+n)\alpha v} + \frac{8\check{A}^2 n(1+n)\alpha^2 \xi f_1(\xi)(-\lambda+\alpha\Phi_0)(1-n\alpha+h(1+n)\alpha\Phi_0)}{(\check{A}-8(1+n)\alpha v)^2} + \frac{d\Phi_0}{d\xi} \right).$$

Используя переменную  $\xi = x\check{A}$ , перепишем это уравнение в виде

$$\delta \hat{R}_1 = \delta h \Phi_0^n \left( \frac{2(1+n)x\check{A}\alpha\Phi_0(\alpha\Phi_0-\lambda)}{1-\frac{8(1+n)\alpha v}{\check{A}}} + \frac{2x\check{A}\alpha\Phi_0(1-n\alpha+(1+n)\alpha\Phi_0)}{1-\frac{8(1+n)\alpha v}{\check{A}}} + \frac{8n(1+n)x\check{A}\alpha^2 f_1(x)(\alpha\Phi_0-\lambda)(1-n\alpha+h(1+n)\alpha\Phi_0)}{\left(1-\frac{8(1+n)\alpha v}{\check{A}}\right)^2} + \frac{d\Phi_0}{\check{A} dx} \right). \tag{31}$$

Для анализа расщепления приведем зависимости функции распределения силы для фиксированных показателя политропы и параметра  $\alpha$  и для различных значений космологической постоянной, см. рис. 5а. Видно, что цилиндрические политропы остаются устойчивыми при любом выборе параметров  $n$ ,  $\alpha$  и  $\lambda$ .

Теперь введем возмущение политроп посредством возмущения политропного индекса,

$$n \rightarrow \tilde{n} = n + \delta n,$$

тогда получим

$$\delta \hat{R}_2 = \frac{2x\check{A}\rho_c\Phi_0^n(-\lambda+\alpha\Phi_0^{1+n})}{\left(1-\frac{8(1+n)\alpha v}{\check{A}}\right)^2} \left( \frac{(\check{A}-8(1+n)\alpha v)((1-n\alpha)\ln\Phi_0+\alpha\Phi_0)}{\check{A}} + 4(1+n)x\check{A}^2\alpha f_2(x)(1-n\alpha+n\alpha\Phi_0) \right) \delta h, \tag{32}$$

где

$$f_2(x) = \int_0^x \hat{x} \Phi_0^n \ln \Phi_0 d\hat{x}.$$

На рис. 5б показаны зависимости функции распределения силы для различных значений космологической постоянной. Видно, что при возмущении  $n$  компактный объект остается устойчивым при любом выборе параметров.



### 3.2. Случай 2

Сначала введем возмущение политропной постоянной, а именно,

$$k \rightarrow \tilde{k} = k + \delta k,$$

тогда плотность энергии и давление также будут испытывать возмущение:

$$\tilde{P} = hP, \quad \tilde{\rho} = \frac{\rho_0}{(1 + hk\rho_0^{1/n})^n}, \quad (33)$$

где  $h = \tilde{k}/k$ , а тильдой обозначены возмущенные величины. Используя приведенное выше уравнение, для возмущенной плотности энергии получаем

$$\tilde{\rho} = \rho + nP(1 - h),$$

где мы использовали соотношение

$$h = 1 + \delta h.$$

Подставляя возмущенные параметры в уравнение (24), получаем уравнение

$$\tilde{R} = h\alpha\rho_c\check{A}(n+1)\Phi^n \frac{d\Phi}{d\xi} + \frac{8\pi\xi\alpha\rho_c\Phi^{n+1} - 8\pi\rho_c\lambda}{\check{A} - 8\alpha(n+1)v} \times \times \{\rho_c\Phi^n[1 + \alpha\{n + h(1 - n)\}\Phi]\},$$

описывающее возмущенное состояние системы. Используя безразмерную переменную

$$\hat{R} = \frac{\check{A}}{4\pi\rho_c^2}\tilde{R},$$

перепишем это уравнение в виде

$$\hat{R} = h\Phi^n \frac{d\Phi}{d\xi} + \frac{\check{A}}{4\pi\rho_c} \left\{ \frac{8\pi\xi\alpha\rho_c\Phi^{n+1} - 8\pi\rho_c\lambda}{\check{A} - 8\alpha(n+1)v} \right\} \times \times (\rho_c\Phi^n[1 + \alpha\{n + h(1 - n)\}\Phi]).$$

Используя разложение в ряд Тейлора, получаем

$$\delta\hat{R}_3 = \left[ \frac{\Phi^n}{\check{A}} \frac{d\Phi}{dx} + \left\{ \check{A}\alpha(n+1)\Phi - 4n\alpha f_3(x) \left( \frac{1 + \alpha\Phi}{\check{A} - 8\alpha(n+1)v} \right) \right\} \times \times \left( \frac{8\pi\alpha\rho_c x \check{A}\Phi^n - 8\pi\rho_c \lambda \check{A}x}{\check{A} - 8\alpha(n+1)v} \right) \right] \delta h, \quad (34)$$

где

$$f_3(x) = \int_0^x \hat{x}\Phi^{n+1}d\hat{x}.$$

Для анализа расщепления приведем зависимости функции распределения силы при фиксированных политропном индексе и параметре  $\alpha$  и при различных значениях космологической постоянной, см. рис. 6а. Видно, что цилиндрические политропы остаются устойчивыми при любом выборе параметров  $n$ ,  $\alpha$  и  $\lambda$ .

Теперь введем возмущение политроп посредством возмущения политропного индекса,

$$n \rightarrow \tilde{n} = n + \delta n,$$

тогда получим

$$\delta\hat{R}_4 = \left[ \left( \frac{\Phi^n \ln \Phi}{\check{A}} \frac{d\Phi}{dx} + 2\check{A}(1 + \alpha\Phi) \times \times \left\{ \frac{(\check{A}x\alpha\Phi^{n+1} - \check{A}x\lambda)(1 + \ln \Phi)\Phi^n}{\check{A} - 8\alpha(n+1)v} + \frac{8\alpha(\check{A}x\alpha\Phi^{n+1} - \lambda\check{A}x)}{(\check{A} - 8\alpha(n+1)v)^2} \right\} \right) + 32\pi\rho_c\Phi^n(1 + \alpha\Phi) \times \times \left\{ \frac{(\check{A}x\alpha\Phi^{n+1} - \lambda\check{A}x)}{(\check{A} - 8\alpha(n+1)v)^2} \right\} f_4(x) \right] \delta n, \quad (35)$$

где

$$f_4(x) = \int_0^x \hat{x}\Phi^n \ln \Phi d\hat{x}.$$

На рис. 6б, в, г приведена функция распределения силы для различных значений космологической постоянной. Видно, что политропная модель испытывает расщепление при увеличении значения  $\lambda$ , т.е. при возмущении  $n$  наличие ненулевой космологической постоянной приводит к неустойчивым моделям.

### 4. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Самогравитирующие компактные объекты принадлежат важному классу астрономических тел, изучение которых в последнее время стало особенно важным. В настоящей работе в рамках общей теории относительности исследован политропный компактный объект с изотропным распределением материи для цилиндрически-симметричного пространства-времени в случае ненулевой космологической постоянной. В выбранной геометрии была использована радиальная координата Шварцшильда и рассмотрены полевые уравнения. Два нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнения, описывающих внутреннюю структуру компактного объекта, сформулированы для двух случаев политропного УС. По аналогии с политропной сферой, политропный цилиндр характеризуется тремя безразмерными параметрами, а именно, политропным

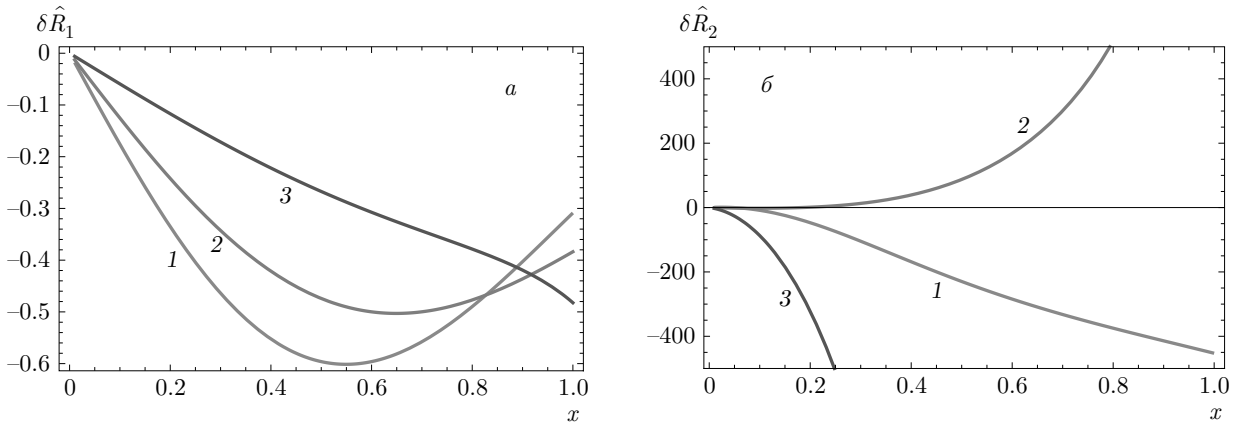


Рис. 5. Зависимости  $\delta \hat{R}_1$  (а) и  $\delta \hat{R}_2$  (б) от  $x$  для  $\lambda = 0$  (1), 0.3 (2) и 0.7 (3) при  $n = 1.5$ ,  $\alpha = 0.2$

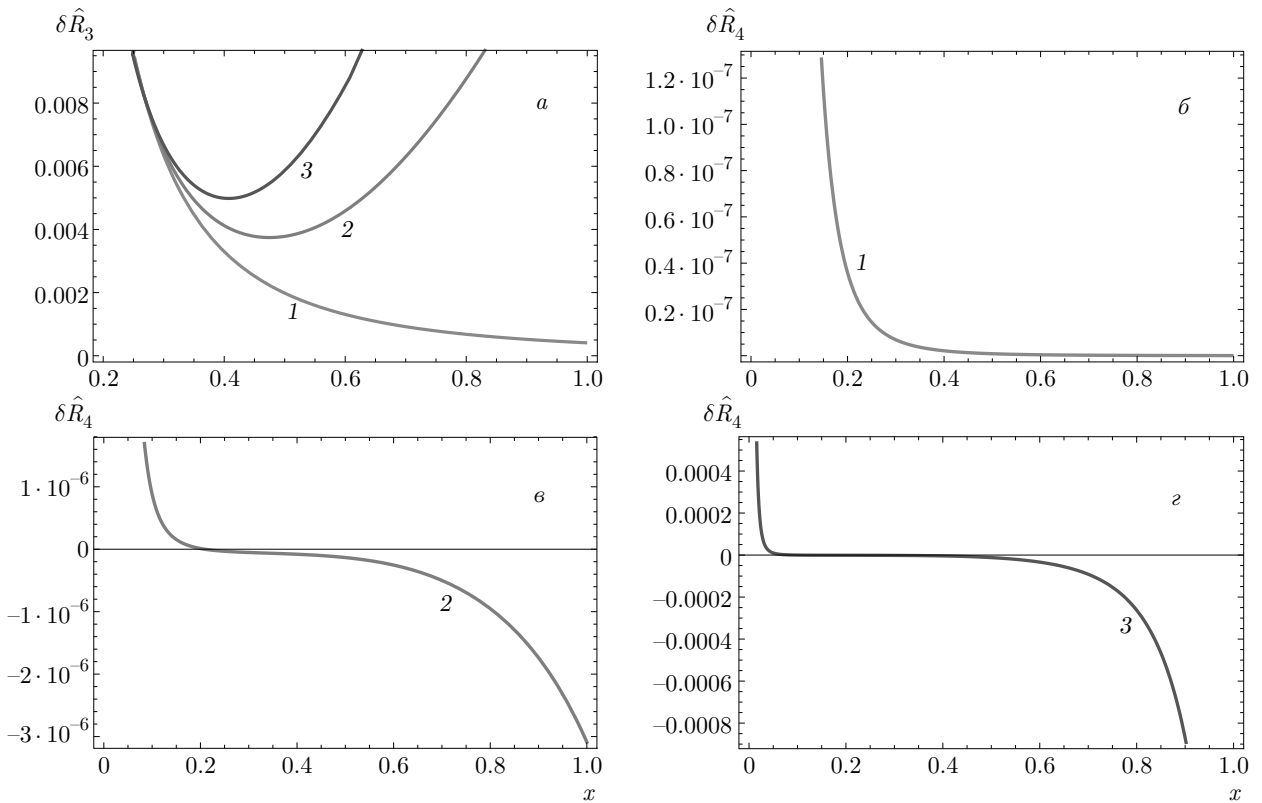


Рис. 6. Зависимости  $\delta \hat{R}_3$  (а) и  $\delta \hat{R}_4$  (б, в, г) от  $x$  для  $\lambda = 0$  (1), 0.3 (2) и 0.7 (3) при  $n = 1.5$ ,  $\alpha = 0.2$

индексом  $n$ , релятивистским параметром  $\alpha$ , отражающим роль релятивистских эффектов в его структуре, и космологической постоянной, отражающей роль плотности вакуумной энергии. В работе численно решены структурные уравнения и получено, что массовая функция является монотонно возрастающей. Оказалось, что в случае ненулевой космо-

гической постоянной  $\lambda$  она растет быстрее, чем в ее отсутствие. Перспективность полученных моделей с точки зрения физики исследовалась с помощью энергетических условий; было получено, что рассматриваемые модели удовлетворяют всем энергетическим условиям как для нулевой, так и для ненулевой космологической постоянной.

Анализ устойчивости звездных моделей очень важен для проверки их перспективности с точки зрения физики. В работе использовалось понятие расщепления, а система выводилась из состояния равновесия при помощи возмущений. Возмущение плотности энергии и давления системы вводилось для двух случаев политропного уравнения состояния. Для Случая 1 вводилось возмущение политропной постоянной и политропного индекса и строились зависимости функций распределения силы  $\delta\hat{R}_1$  и  $\delta\hat{R}_2$ , описывающие полные радиальные силы. Было найдено, что полученные в Случае 1 модели устойчивы относительно возмущений при любом выборе  $n$ ,  $\alpha$  и  $\lambda$ , а модели, полученные в Случае 2, устойчивы только при возмущенной политропной постоянной. Для анизотропных сферических политроп расщепление и опрокидывание происходят, когда плотность энергии и локальная анизотропия системы возмущаются посредством возмущения политропной постоянной и политропного индекса [19], в то время как для изотропной цилиндрически-симметричной жидкости в обоих случаях для ненулевой космологической постоянной устойчивые модели получаются при возмущении политропной постоянной.

Авторы выражают благодарность Высшей комиссии по образованию, Исламабад, Пакистан, за финансовую поддержку в рамках программы Indigenous Ph.D. 5000 Fellowship Phase-II, Batch-III.

## ЛИТЕРАТУРА

1. A. S. Eddington, *The Internal Constitution of Stars*, Cambridge University Press (1926).
2. R. F. Tooper, *Astrophys. J.* **140**, 434 (1964).
3. S. Thirukkanesh and F. C. Ragel, *Pramana J. Phys.* **78**, 687 (2012).
4. L. Herrera and W. Barreto, *Phys. Rev. D* **87**, 087303 (2013).
5. L. Herrera, A. Di Prisco, W. Barreto, and J. Ospino, *Gen. Relativ. Gravit.* **46**, 1827 (2014).
6. M. Azam, S. A. Mardan, I. Noureen, and M. A. Rehman, *Eur. Phys. J. C* **76**, 315 (2016).
7. O. Zubairi, A. Romero, and F. Weber, *J. Phys.: Conf. Ser.* **615**, 012003 (2015).
8. C. G. Böhrmer and T. Harko, *Phys. Rev. D* **71**, 084026 (2005).
9. S. M. Hossein, F. Rahaman, J. Naskar, M. Kalam, and S. Ray, *Int. J. Mod. Phys. D* **21**, 1250088 (2012).
10. Z. Stuchlík, S. Hledík, and J. Novotný, *Phys. Rev. D* **94**, 103513 (2016).
11. M. A. Scheel, S. L. Shapiro, and S. A. Teukolsky, *Phys. Rev. D* **48**, 592 (1993).
12. L. Herrera, A. Di Prisco, J. Ospino, and E. Fuenmayor, *J. Math. Phys.* **42**, 2129 (2001).
13. G. Abbas, S. Nazeer, and M. A. Meraj, *Astrophys. Space Sci.* **354**, 449 (2014).
14. M. Sharif and S. Sadiq, *Can. J. Phys.* **93**, 1583 (2015).
15. M. Azam, S. A. Mardan, I. Noureen, and M. A. Rehman, *Eur. Phys. J. C* **76**, 510 (2016).
16. M. Sharif and M. Azam, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **430**, 3048 (2013).
17. K. S. Thorne, *Phys. Rev. B* **138**, 251 (1965).
18. L. Herrera, *Phys. Lett. A* **165**, 206 (1992).
19. L. Herrera, E. Fuenmayor, and P. León, *Phys. Rev. D* **93**, 024047 (2016).