ЖЭТФ, 2019, том 155, вып. 4, стр. 602–611

К ВКЛАДУ ДАЛЬНОДЕЙСТВУЮЩЕГО РАССЕИВАЮЩЕГО ПОТЕНЦИАЛА В ПРОЦЕССЕ МНОГОФОТОННОЙ НАДПОРОГОВОЙ ИОНИЗАЦИИ АТОМОВ В ЛАЗЕРНОМ ПОЛЕ

А. Г. Казарян [*]

Центр физики сильных полей, Ереванский государственный университет
0025, Ереван, Армения

Поступила в редакцию 20 сентября 2018 г.,
после переработки 9 октября 2018 г.
Принята к публикации 23 октября 2018 г.

При помощи квантовомеханического рассмотрения неупругого рассеяния электрона на электростатическом потенциале в поле сильной электромагнитной волны в обобщенном эйкональном приближении найдена упрощенная формула для вероятности многофотонной надпороговой ионизации водородоподобного атома с учетом взаимодействия фотоэлектрона с дальнодействующим кулоновским полем остаточного иона. Вероятность многофотонной ионизации необходима для изучения экспериментально наблюдаемых ранее низкоэнергетических структур.

DOI: 10.1134/S0044451019040035

1. ВВЕДЕНИЕ

В последнее время многофотонная ионизация в сильных лазерных полях средних инфракрасных частот используется для получения когерентных мягких рентгеновских лучей в процессе генерации высоких гармоник [1] и для обнаружения множества характеристик сильных полей или, например, для наблюдения низкоэнергетических структур [2–4]. Эти процессы, как правило, описываются путем учета взаимодействия электрона с остаточным ионом (или родительским ионом) [5, 6]. Тем самым, задача многофотонной надпороговой ионизации атомов (МНИА) вновь привлекла внимание, поскольку новые эксперименты показали, что влияние дальнодействующего поля электростатического потенциала существенно, и результаты известного приближения сильного поля [7–9] не являются удовлетворительными.

Речь идет о процессе МНИА при умеренных интенсивностях внешнего электромагнитного (ЭМ) излучения ($I_a = 10^{14}$ Вт/см^2 при оптической частоте). Поэтому мы решили вернуться к задаче об учете влияния дальнодействующего поля электростатического потенциала, которая, как показали исследования, начиная с 1960-х гг., остается одной из трудностей при рассмотрении поведения реальных атомных систем в сильном поле ЭМ-излучения [1–6, 10–17].

Как известно, в общем случае проблема взаимодействия атома с ЭМ-волной представляет собой нестационарную задачу квантовой механики. Если в этой задаче нет малых параметров, то для ее решения необходимо использовать приближенные методы решения уравнения состояния. В настоящей работе используется квазиклассический подход (атом описывается квантовомеханическим, а ЭМ-поле — классическим уравнениями) в задаче о многофотонной ионизации атома в поле умеренно сильного ЭМ-излучения с интенсивностью $I \leq I_k$, где $I_k = (\omega/\omega_a)^2 I_a$, $I_a = 5 \cdot 10^{16}$ Вт/см^2 — атомная интенсивность, ω — частота ЭМ-волны, ω_a — атомная частота. В то время как в работе Келдыша [7] в качестве конечного состояния электрона выбирается решение Шредингера для свободного электрона в поле сильной ЭМ-волны, в настоящей работе электрон в конечном состоянии находится в поле лазерного излучения и дальнодействующего поля электростатического потенциала согласно развитому ранее обобщенному эйкональному приближению (ОЭП) в нерелятивистском пределе [18].

В разд. 2 найдена волновая функция электрона в конечном состоянии в полях ЭМ-волны и куло-

[*] E-mail: amarkos@ysu.am

новского потенциала в ОЭП, в разд. 3 получено выражение для вероятности надпороговой ионизации атома.

2. ВОЛНОВАЯ ФУНКЦИЯ НЕРЕЛЯТИВИСТСКОГО ЭЛЕКТРОНА В ПОЛЕ ЭМ-ВОЛНЫ И ДАЛЬНОДЕЙСТВУЮЩЕГО КУЛОНОВСКОГО ПОТЕНЦИАЛА В ОЭП

Упомянутая выше проблема сводится к квантовомеханическому исследованию динамики процесса вынужденного тормозного рассеяния. Ищем решение уравнения Шредингера для электрона в кулоновском поле и поле ЭМ-излучения,

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-H\right)\overline{\Psi}_f(\mathbf{r},t)=0, \tag{1}$$

с гамильтонианом

$$H=-\frac{\hbar^2}{2m}\,\Delta-\frac{Ze^2}{r}-e\mathbf{E}(t)\cdot\mathbf{r}$$

в дипольном приближении в виде

$$\overline{\Psi}_f(\mathbf{r},t)=\exp\left(\frac{i}{\hbar}\,\overline{S}(\mathbf{r},t)\right). \tag{2}$$

Выражение (2) верно, если $\lambda\gg\max\{(v/c)\lambda,l\}$, где λ — длина волны внешнего излучения, l — эффективный радиус действия рассеивающего потенциала, v — нерелятивистская скорость электрона. Как для лазерного излучения, так и для известных атомных потенциалов $\lambda\gg l$, поэтому дипольное приближение справедливо для нерелятивистских электронов ($v/c\ll 1$). С учетом многолетней полемики [19] по поводу зависимости результатов приближенных расчетов от калибровки ЭМ-потенциала и того, что предпочтение отдается калибровке «поля», взаимодействие с ЭМ-волной в данной работе описывается в этой калибровке.

Здесь рассматривается кулоновское поле притяжения ионизованного атома с зарядом Ze_0 (водородоподобный атом), μ и e_0 — соответственно масса и заряд электрона, Z — зарядовое число, $\mathbf{E}(t)$ — вектор электрического поля, $\hbar$ — постоянная Планка. Волновая функция нормирована на одну частицу в единице фазового объема.

Подставив волновую функцию (2) в уравнение (1), получим

$$\frac{\left(\nabla\overline{S}(\mathbf{r},t)\right)^2}{2\mu}-\frac{i\hbar}{2\mu}\,\Delta\overline{S}(\mathbf{r},t)-\frac{Ze_0^2}{r}-e_0\mathbf{E}(t)\cdot\mathbf{r}=-\frac{\partial\overline{S}(\mathbf{r},t)}{\partial t}. \tag{3}$$

Представим действие в виде

$$\overline{S}(\mathbf{r},t)=S_0(\mathbf{r},t)+S_1(\mathbf{r},t),$$

где

$$S_0(\mathbf{r},t)=\left(\mathbf{p}-\frac{e_0}{c}\int\limits_{-\infty}^{t}\mathbf{A}(t')\,dt'\right)\cdot\mathbf{r}-\frac{1}{2\mu}\int\limits_{-\infty}^{t}\left(\mathbf{p}^2-\frac{2e_0}{c}\,\mathbf{p}\cdot\mathbf{A}(t')\right)dt'$$

(ЭМ-взаимодействие включается адиабатически медленно при $t=-\infty$). Здесь член, пропорциональный $\mathbf{A}^2(t)$, исключен унитарным преобразованием как функция только времени и как неиграющий существенной физической роли при нерелятивистских интенсивностях ЭМ-волны:

$$\Psi_f(\mathbf{r},t)=\overline{\Psi}_f(\mathbf{r},t)\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\int\limits_{-\infty}^{t}\frac{e_0^2\mathbf{A}^2(t')}{2\mu c^2}\,dt'\right). \tag{4}$$

Вместе с пропорциональным $\mathbf{A}^2(t)$ членом (согласно преобразованию (4)) S_0 есть точное решение уравнения (1) с гамильтонианом

$$H_0=-\frac{\hbar^2}{2\mu}\,\Delta-e_0\mathbf{E}(t)\cdot\mathbf{r},$$

$\mathbf{p}$ — импульс электрона в непрерывном спектре, $\mathbf{A}(t)=-c\int_{-\infty}^{t}\mathbf{E}(t')\,dt'$ — вектор-потенциал ЭМ-волны в дипольном приближении. Далее, согласно ОЭП пренебрегая нелинейным членом $(\nabla\overline{S})^2$ по сравнению с $\nabla S_0\nabla S_1$ (физически это означает, что переданный лазерным полем импульс превосходит импульс, переданный ядром), из соотношения (3) получим следующее уравнение:

$$\frac{1}{\mu}\left(\mathbf{p}-\frac{e_0\mathbf{A}(t)}{c}\right)\nabla S_1(\mathbf{r},t)-\frac{i\hbar}{2\mu}\,\Delta S_1(\mathbf{r},t)-\frac{Ze_0^2}{r}=-\frac{\partial S_1(\mathbf{r},t)}{\partial t}. \tag{5}$$

Представим искомую функцию действия $S_1(\mathbf{r},t)$ в виде

$$S_1(\mathbf{r},t)=\exp\left(-\frac{e_0}{\mu c}\int\mathbf{A}(t)\,dt\nabla\right)S(\mathbf{r},t), \tag{6}$$

воспользовавшись тем, что $\int\mathbf{A}(t)\,dt$ и ∇ в показателе экспоненты введенного оператора коммутируют. Подставим выражение для $S_1(\mathbf{r},t)$ в (5) и подействуем слева обратным оператором-экспонентой

$$\exp\left(-\frac{e_0}{\mu c}\int\mathbf{A}(t)\,dt\nabla\right)$$

на обе части уравнения (5). Получим новое уравнение в виде

$$-\frac{i\hbar}{2\mu}\Delta S(\mathbf{r},t)+\frac{1}{\mu}\,\mathbf{p}\nabla S(\mathbf{r},t)+\frac{\partial S(\mathbf{r},t)}{\partial t}= = \exp\left(-\frac{e_0}{\mu c}\int\mathbf{A}(t)\,dt\nabla\right)\frac{Ze_0^2}{r}. \quad (7)$$

Воспользуемся формулами фурье-преобразования для $S(\mathbf{r},t)$ и $U(\mathbf{r})=-Ze_0^2/r$:

$$\overline{S}(\mathbf{q},t)=\int S(\mathbf{r},t)\exp(-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r})\,d\mathbf{r}, \quad U(\mathbf{q})=-\frac{4\pi Ze_0^2}{q^2}, \quad (8)$$

тогда из (7) получим уравнение для фурье-образа $\overline{S}(\mathbf{q},t)$ в виде

$$\frac{i\hbar}{2\mu}\,q^2\overline{S}(\mathbf{q},t)+\frac{i}{\mu}\,\mathbf{p}\cdot\mathbf{q}\overline{S}(\mathbf{q},t)+\frac{\partial\overline{S}(\mathbf{q},t)}{\partial t}= = -\exp\left(-\frac{ie_0}{\mu c}\int\mathbf{A}(t)\,dt\,\mathbf{q}\right)\frac{4\pi Ze_0^2}{q^2}. \quad (9)$$

Решив уравнение (9) и подставив $\overline{S}(\mathbf{q},t)$ в формулу для обратного фурье-образа, найдем окончательный вид для $S_1(\mathbf{r},t)$ (6):

$$S_1(\mathbf{r},t)=\frac{1}{(2\pi)^3}\exp\left(\frac{e_0}{\mu c}\int\mathbf{A}(t)\,dt\nabla\right)\times \times\int\left(-\frac{4\pi Ze_0^2}{q^2}\right)\exp\left[i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}-\frac{i\hbar}{2\mu}\,q^2t-\frac{i}{\mu}\,\mathbf{p}\cdot\mathbf{q}t\right]\times \times\int\limits_{-\infty}^{t}\exp\left[\frac{i\hbar}{2\mu}\,q^2t'+\frac{i}{\mu}\,\mathbf{p}\cdot\mathbf{q}t'\right]\times \times\exp\left(-\frac{ie_0}{\mu c}\int\mathbf{A}(t')\,dt'\mathbf{q}\right)dt'd\mathbf{q}. \quad (10)$$

Рассмотрим случай линейно поляризованной ЭМ-волны с потенциалом $\mathbf{A}(t)=\mathbf{A}_0\cos\omega t$. Воспользуемся следующим свойством оператора преобразования волновой функции:

$$\exp[i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}]\exp\left(-\frac{ie_0}{\mu c}\int\mathbf{A}(t')\,dt'\mathbf{q}\right)= =\exp\left(-\frac{ie_0}{\mu c}\int\mathbf{A}(t')\,dt'\nabla\right)\exp[i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}] \quad (11)$$

(в его справедливости легко убедиться, разложив экспоненты в ряды Тейлора), и разложим первый экспоненциальный член

$$\exp\left(-\frac{ie_0}{\mu c\omega}(\mathbf{A}_0\nabla)\sin\omega t\right)$$

в (11) по формуле

$$\exp(i\alpha\sin\omega t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(\alpha)\exp(in\omega t), \quad (12)$$

где $J_n(\alpha)$ — функция Бесселя первого рода n-го порядка, $\alpha=e\mathbf{A}_0\nabla/\mu c\omega$. Окончательно для $S_1(\mathbf{r},t)$ будем иметь

$$S_1(\mathbf{r},t)=\frac{4\pi Ze_0^2}{(2\pi)^3}\exp\left(\frac{e_0}{\mu c}\int\mathbf{A}(t)\,dt\nabla\right)\times \times\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n\left(\frac{e_0}{\mu c\omega}\,\mathbf{A}_0\nabla\right)e^{-in\omega t}S_n^{(1)}(\mathbf{r}), \quad (13)$$

где функция

$$S_n^{(1)}(\mathbf{r})=-\int\frac{d\mathbf{q}}{q^2}\times \times\exp\left[i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}-\frac{i\hbar}{2\mu}\,q^2t-\frac{i}{\mu}\,\mathbf{p}\cdot\mathbf{q}t+in\omega t\right]\times \times\left(\int\limits_{-\infty}^{t}\exp\left[\frac{i\hbar}{2\mu}\,q^2t'+\frac{i}{\mu}\,\mathbf{p}\cdot\mathbf{q}t'-in\omega t'\right]dt'\right) \quad (14)$$

определяется взаимодействием электрона также с кулоновским полем. По постановке задачи видно, что нас будут интересовать большие времена $t\to\infty$, когда влияние атомного потенциала ослаблено (но $U(\mathbf{r})=Ze_0^2/r\neq 0$). Воспользуемся определением δ-функции:

$$\lim_{t\to\infty}\int\limits_{-\infty}^{t}\exp(i\alpha x)\,dx=2\pi\delta(\alpha) \quad (15)$$

и представим $S_n^{(1)}(\mathbf{r})$ в виде

$$S_n^{(1)}(\mathbf{r})=-\int\frac{\exp(i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r})}{q^2}\times \times\exp\left[-\frac{i\hbar}{2\mu}\,q^2t-\frac{i}{\mu}\,\mathbf{p}\cdot\mathbf{q}t+in\omega t\right]\times \times 2\pi\delta\left(\frac{\hbar}{2\mu}\,q^2+\frac{1}{\mu}\,\mathbf{p}\cdot\mathbf{q}-n\omega\right)d\mathbf{q}. \quad (16)$$

В силу закона сохранения энергии, выражаемого δ-функцией, показатель второй экспоненты в произведении под интегралом обращается в нуль после интегрирования по $d\mathbf{q}$. Заранее опустим его. Для определения $S_n^{(1)}(\mathbf{r})$ направим ось z по направлению радиус вектора $\mathbf{r}$, через векторы $\mathbf{p}$ и $\mathbf{r}$ проведем плоскость yz. Перейдем к интегрированию по $\mathbf{Q}=\hbar\mathbf{q}+\mathbf{p}$ в полярной системе координат, связанной с прямоугольной (Q_x, Q_y, Q_z) следующими соотношениями: $Q_x = Q_\perp \cos\varphi$, $Q_y = Q_\perp \sin\varphi$, $Q_z = Q_z$, где $\varphi = \mathrm{arctg}(Q_y/Q_x)$, $Q_\perp = \sqrt{Q_x^2 + Q_y^2}$. Соответственно аргумент δ-функции в (16) примет вид $(Q_z^2 + Q_\perp^2 - p_n^2)/2\mu\hbar$, где $p_n = \sqrt{2\mu\varepsilon_n}$ — импульс, $\varepsilon_n = p_n^2/2\mu = p^2/2\mu + \hbar\omega n$ — соответствующая энергия нерелятивистского электрона после поглощения n фотонов ЭМ-излучения. Далее воспользуемся известной формулой:

$$\delta\left(\phi(x)\right) = \sum_i \frac{1}{|\phi'(a_i)|}\,\delta(x - a_i)$$

($\phi(x)$ — однозначная функция, a_i — корни уравнения $\phi(x) = 0$) и приведем (16) к виду

$$S_n^{(1)}(\mathbf{r}) = -2\pi\mu \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{2\pi} \frac{\exp[iQ_z z/\hbar]}{Q^2 - 2p_zQ_z - 2p_yQ_\perp\sin\varphi + p^2} \times \left[\delta\left(Q_z - \sqrt{p_n^2 - Q_\perp^2}\right) + \delta\left(Q_z + \sqrt{p_n^2 - Q_\perp^2}\right)\right] \times \frac{dQ_z Q_\perp dQ_\perp d\varphi}{\sqrt{p_n^2 - Q_\perp^2}}. \quad (17)$$

В выражении для $S_n^{(1)}(\mathbf{r})$ сначала проведем интегрирование по Q_z, получим

$$S_n^{(1)}(\mathbf{r}) = -2\pi\mu \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\,\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}\right) \times \int\limits_0^{p_n}\int\limits_0^{2\pi} \left\{ \frac{\exp\left[iz\sqrt{p_n^2 - Q_\perp^2}/\hbar\right]}{p_n^2 + p^2 - 2p_z\sqrt{p_n^2 - Q_\perp^2} - 2p_yQ_\perp\sin\varphi} + \frac{\exp\left[-iz\sqrt{p_n^2 - Q_\perp^2}/\hbar\right]}{p_n^2 + p^2 + 2p_z\sqrt{p_n^2 - Q_\perp^2} - 2p_yQ_\perp\sin\varphi} \right\} \times \frac{Q_\perp dQ_\perp d\varphi}{\sqrt{p_n^2 - Q_\perp^2}}. \quad (18)$$

Здесь верхний предел интегрирования для $Q_\perp$ берется равным p_n, так как при $Q_\perp > p_n$ δ-функция обращается в нуль ($Q_z \neq \pm\sqrt{Q_\perp^2 - p_n^2}$, где $Q_\perp^2 - p_n^2 > 0$). Проведем интегрирование в (18) по φ, воспользовавшись табличным интегралом [20], где

$$a = p_n^2 + p^2 - 2p_z\sqrt{p_n^2 - Q_\perp^2}, \quad b = 2p_\perp Q_\perp \sin\varphi$$

(в выбранной системе координат $p_\perp = p_y$, $p_x = 0$). Далее удобно сделать замену переменной интегрирования, введя $\rho = \sqrt{p_n^2 - Q_\perp^2}$, где

$$0 \le \rho \le p_n, \quad d\rho = -\frac{Q_\perp dQ_\perp}{\sqrt{p_n^2 - Q_\perp^2}}.$$

После замены во втором интеграле в (18) $\rho \to -\rho$, получим первый с пределами интегрирования $(-p_n, 0)$. И приведя выражение в знаменателе под квадратным корнем в (18) к полному квадрату по ρ, перейдя к безразмерной переменной интегрирования $u \to \rho/p$, получим

$$S_n^{(1)}(\mathbf{r}) = \frac{2\pi^2\mu}{p}\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\,\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}\right) \times \int\limits_{-p_n/p}^{p_n/p} \frac{\exp[ipzu/\hbar]\,du}{\sqrt{(u - b_{1n})^2 + a_{1n}^2}}, \quad (19)$$

где

$$b_{1n} = \frac{\cos\theta}{2}\left(1 + \frac{p_n^2}{p^2}\right), \quad a_{1n}^2 = \frac{\sin^2\theta}{4}\left(\frac{p_n^2}{p^2} - 1\right)^2,$$

$$\cos\theta = \frac{p_z}{p} = \frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}{pr}, \quad \sin\theta = \frac{p_\perp}{p}, \quad r = z.$$

Перейдем к интегрированию по переменной $\chi = u - b_{1n}$. После несложных преобразований получим $S_n^{(1)}$ в виде

$$S_n^{(1)}(\mathbf{r}) = \frac{2\pi^2\mu}{p}\exp\left(\frac{i}{p}\,\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}\left(\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon}\,n\right)\right) I_n(\mathbf{r}), \quad (20)$$

где $\varepsilon = p^2/2\mu$ — кинетическая энергия электрона в непрерывном спектре, функция

$$I_n(\mathbf{r}) = \int\limits_{\mathrm{Arsh}\left(-\frac{1}{a_{1n}}\left(\frac{p_n}{p} + b_{1n}\right)\right)}^{\mathrm{Arsh}\left(\frac{1}{a_{1n}}\left(\frac{p_n}{p} - b_{1n}\right)\right)} \exp\left[\frac{ipr}{\hbar}\,a_{1n}\,\mathrm{sh}\,\gamma\right] d\gamma. \quad (21)$$

Исследуем полученные выражения для $I_n(\mathbf{r})$ при $n = 0$, $b_{1n} = \cos\theta$, $a_{1n} = 0$, тогда из (21) для $I_0(\mathbf{r})$ и для действия $S_0^{(1)}(\mathbf{r})$ получим соответственно

$$I_0(\mathbf{r}) = \int\limits_{-(1+\cos\theta)}^{1-\cos\theta} \frac{\exp[ipr\chi/\hbar]}{\chi}\,d\chi = \mathrm{Ei}\left(\frac{ipr}{\hbar}(1 - \cos\theta)\right) - \mathrm{Ei}\left(-\frac{ipr}{\hbar}(1 + \cos\theta)\right) = \mathrm{Ei}\left(\frac{i}{\hbar}(pr - \mathbf{p}\cdot\mathbf{r})\right) - \mathrm{Ei}\left(-\frac{i}{\hbar}(pr + \mathbf{p}\cdot\mathbf{r})\right), \quad (22)$$

$$S_0^{(1)}(\mathbf{r}) = \frac{Ze_0^2\mu}{p} \times \left\{\mathrm{Ei}\left(\frac{i}{\hbar}(pr - \mathbf{p}\cdot\mathbf{r})\right) - \mathrm{Ei}\left(-\frac{i}{\hbar}(pr + \mathbf{p}\cdot\mathbf{r})\right)\right\}, \quad (23)$$

где $\mathrm{Ei}(z)$ — интегрально-показательная функция [21]. Два члена суммы в (23) соответствуют расходящейся и сходящейся волновым функциям электрона [22]. Полученная функция (23) для $S_n^{(1)}(\mathbf{r})$ — это действие для упругого рассеяния на кулоновском потенциале в ОЭП [23]. Интересующая нас волновая функция электрона после процесса МНИА при $r\to\infty$ должна иметь вид суперпозиции плоской и сходящейся сферической волн [22], и функция с такой асимптотикой соответственно есть

$$\Psi^{(-)}(\mathbf{r})=\exp\left[i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}-\frac{iZe_0^2\mu}{\hbar p}\,\mathrm{Ei}\left(-\frac{i}{\hbar}(pr+\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})\right)\right],$$

поэтому для дальнейших вычислений при $n=0$ выбираем функцию

$$I_0(\mathbf{r})=-\mathrm{Ei}\left(-\frac{i}{\hbar}(pr+\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})\right). \qquad (24)$$

При $n\neq 0$, $n\hbar\omega\ll\varepsilon$ имеем

$$p_n=\sqrt{2\mu\varepsilon_n}=p+\frac{n\hbar\omega p}{2\varepsilon},\quad b_{1n}=\frac{\cos\theta}{2}\left(2+\frac{n\hbar\omega}{\varepsilon}\right),$$

$$a_{1n}^2=n^2\frac{\sin^2\theta}{4}\left(\frac{\hbar\omega}{\varepsilon}\right)^2.$$

Соответственно, аргументы в пределах интегрирования в (21) записываются как

$$\frac{p_n}{p}-b_{1n}=(1-\cos\theta)\left(1+\frac{n\hbar\omega}{2\varepsilon}\right),$$
$$-\left(\frac{p_n}{p}+b_{1n}\right)=-(1+\cos\theta)\left(1+\frac{n\hbar\omega}{2\varepsilon}\right). \qquad (25)$$

В интересующем нас многофотонном случае, $n\hbar\omega\ll\varepsilon$, пределы интегрирования (25) равны $\pm\infty$ и согласно [20] функция $I_n(\mathbf{r})$ принимает вид ($n\neq 0$)

$$I_n(\mathbf{r})=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left[\frac{ipr}{\hbar}a_{1n}\,\mathrm{sh}\,\chi\right]d\chi=2K_0\left(\frac{pr}{\hbar}|a_{1n}|\right)=$$
$$=2K_0\left(\frac{pr}{2\hbar}\left|\frac{n\hbar\omega}{\varepsilon}\sin\theta\right|\right)=$$
$$=2K_0\left(\frac{1}{2\hbar}\,\frac{n\hbar\omega}{\varepsilon}\,\sqrt{p^2r^2-(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})^2}\right), \qquad (26)$$

где

$$K_0(z)=\lim_{\nu\to 0}\frac{\pi}{2\sin(\pi\nu)}\,[I_{-\nu}(z)-I_\nu(z)]$$

— функция Макдональда, $I_\nu(z)$ — модифицированная функция Бесселя [20].

С учетом приведенных выше упрощений получаем окончательный вид для действия $S_1(\mathbf{r},t)$ в ОЭП (13)

$$S_1(\mathbf{r},t)=\frac{Ze_0^2\mu}{p}\exp\left(\frac{e_0}{\mu c}\int\mathbf{A}(t)\,dt\nabla\right)\times$$
$$\times\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n\left(\frac{e_0\mathbf{A}_0\nabla}{\mu c\omega}\right)\times$$
$$\times\exp\left(\frac{i}{\hbar}\,\frac{n\hbar\omega}{2\varepsilon}\,\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}-in\omega t\right)I_n(\mathbf{r}), \qquad (27)$$

где $I_n(\mathbf{r})$ определяется формулами (24) при $n=0$ и (26) при $n\neq 0$.

Искомая волновая функция $\Psi_f(\mathbf{r},t)$ (4) в линейно поляризованном лазерном поле с учетом (27) имеет вид

$$\Psi_f(\mathbf{r},t)=\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left(\mathbf{p}-\frac{e_0}{c}\,\mathbf{A}_0\cos\omega t\right)\cdot\mathbf{r}-\right.$$
$$-\frac{i}{\hbar 2\mu}\left(p^2t-\frac{2e_0\mathbf{A}_0\cdot\mathbf{p}\sin\omega t}{c\omega}\right)+\frac{i}{\hbar}\,\frac{Ze_0^2\mu}{p}\times$$
$$\times\exp\left(\frac{e_0\sin\omega t}{\mu c}\,\mathbf{A}_0\nabla\right)\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n\left(\frac{e_0\mathbf{A}_0\nabla}{\mu c\omega}\right)\times$$
$$\left.\times\exp\left(\frac{i}{\hbar}\,\frac{n\hbar\omega}{2\varepsilon}\,\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}-in\omega t\right)I_n(\mathbf{r})\right\}. \qquad (28)$$

В качестве первого шага при суммировании по n в выражении для $S_1(\mathbf{r},t)$ (27) учтем члены, линейные по $e_0A_0\Delta p/\mu c\omega$ ($n=0,\pm 1$), где Δp — изменение импульса под воздействием кулоновского поля:

$$\frac{eA_0}{\hbar\omega}\,\frac{\Delta p}{\mu c}\ll 1.$$

Считая ЭМ-поле «классически» слабым, линеаризуем $S_1(\mathbf{r},t)$ по $e_0A_0/\mu c\omega$, разложив экспоненту

$$\exp\left(\frac{e_0}{\mu c\omega}\,\mathbf{A}_0\sin\omega t\nabla\right)$$

в ряд Тейлора и сохранив первые два члена. Физически это равносильно тому, что после процесса МНИА свободный электрон может взаимодействовать с ЭМ-волной (в силу наличия кулоновского потенциала), реально испуская и поглощая фотоны — вынужденное тормозное рассеяние. Учтем только однофотонные процессы, считая при этом, что энергия кванта ЭМ-поля мала по сравнению с энергией электрона в непрерывном спектре и недостаточна для ее существенного изменения, например для того, чтобы вернуть электрон в связанное состояние. Согласно сказанному выше, из (28) имеем для $S_1(\mathbf{r},t)$ формулу:

$$S_1(\mathbf{r},t)=\frac{Ze_0^2\mu}{p}[1+\sin\omega t\boldsymbol{\alpha}_0\nabla]\left\{J_0(\boldsymbol{\alpha}_0\nabla)I_0(\mathbf{r})-\right.$$
$$-J_1(\boldsymbol{\alpha}_0\nabla)\exp\left(\frac{i}{2\hbar}\,\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}\zeta-i\omega t\right)I_1(\mathbf{r})+$$
$$\left.+J_{-1}(\boldsymbol{\alpha}_0\nabla)\exp\left(-\frac{i}{2\hbar}\,\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}\zeta+i\omega t\right)I_1(\mathbf{r})\right\},\quad(29)$$

где

$$\zeta=\frac{\hbar\omega}{\varepsilon},\quad \boldsymbol{\alpha}_0=\frac{e_0\mathbf{A}_0}{\mu c\omega}=\frac{e_0\mathbf{E}_0}{\mu\omega^2},\quad \mathbf{E}_0=\frac{\omega}{c}\,\mathbf{A}_0.$$

Аналогично, разложив в выражении (29) функции Бесселя в ряд Тейлора, воспользовавшись формулами

$$J_\nu(z)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(z/2)^{2k+\nu}}{k!\Gamma(k+\nu+1)},\qquad J_{-k}(z)=(-1)^kJ_k(z),\quad(30)$$

и оставив линейные по $\boldsymbol{\alpha}_0$ члены, для $S_1(\mathbf{r},t)$ получим

$$S_1(\mathbf{r},t)=\frac{Ze_0^2\mu}{p}\left\{I_0(\mathbf{r})+\sin\omega t\boldsymbol{\alpha}_0\nabla I_0(\mathbf{r})-\right.$$
$$-\frac{i}{2\hbar}\,\zeta\boldsymbol{\alpha}_0\cdot\mathbf{p}\cos\left(\frac{\zeta}{2\hbar}\,\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}\right)I_0(\mathbf{r})+$$
$$\left.+\,i\sin\left(\frac{\zeta}{2\hbar}\,\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}\right)\boldsymbol{\alpha}_0\nabla I_1(\mathbf{r})\right\}.\quad(31)$$

Воспользовавшись формулами для суммы тригонометрических функций, для волновой функции $\Psi_f(\mathbf{r},t)$ (28) электрона в конечном состоянии имеем

$$\Psi_f(\mathbf{r},t)=\exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\,\varepsilon t+\frac{i}{\hbar}\,\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}+i\eta I_0(\mathbf{r})+\right.$$
$$+\frac{i}{\hbar}\,B_1(\mathbf{r})\sin(\omega t-\phi_1(\mathbf{r}))-\eta B_2(\mathbf{r})\times$$
$$\left.\times\sin\left(\frac{\zeta}{2\hbar}\,\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}-\omega t+\phi_2(\mathbf{r})\right)\right\},$$

где $\eta=Ze_0^2\mu/\hbar p$ и функции $B_1(\mathbf{r})$, $B_2(\mathbf{r})$, $\phi_1(\mathbf{r})$, $\phi_2(\mathbf{r})$ определяются соответственно как

$$B_1(\mathbf{r})=$$
$$=\sqrt{(\boldsymbol{\alpha}_0\cdot\mathbf{p}+\hbar\eta\boldsymbol{\alpha}_0\nabla I_0(\mathbf{r}))^2+e^2\omega^2(\mathbf{E}_0\cdot\mathbf{r})^2},$$
$$B_2(\mathbf{r})=\sqrt{\frac{\zeta^2}{4\hbar^2}(\boldsymbol{\alpha}_0\cdot\mathbf{p})^2I_1^2(\mathbf{r})+(\boldsymbol{\alpha}_0\nabla I_1(\mathbf{r}))^2},\quad(32)$$
$$\operatorname{tg}\phi_1(\mathbf{r})=\frac{e_0\omega\mathbf{E}_0\cdot\mathbf{r}}{\boldsymbol{\alpha}_0\cdot\mathbf{p}+\hbar\eta\boldsymbol{\alpha}_0\nabla I_0(\mathbf{r})},$$
$$\operatorname{tg}\phi_2(\mathbf{r})=\frac{(\zeta/2\hbar)\boldsymbol{\alpha}_0\cdot\mathbf{p}I_1(\mathbf{r})}{\boldsymbol{\alpha}_0\nabla I_1(\mathbf{r})}.$$

Здесь

$$I_1(\mathbf{r})=2K_0\left(\frac{1}{2}\,\frac{\zeta}{\hbar}\sqrt{(pr)^2-(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})^2}\right),$$

$$\nabla I_1(\mathbf{r})=K_1\left(\frac{1}{2}\,\frac{\zeta}{\hbar}\,\sqrt{(pr)^2-(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})^2}\right)\times$$
$$\times\frac{\zeta}{\hbar}\,\frac{p^2r\dfrac{\mathbf{r}}{r}-(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})\mathbf{p}}{\sqrt{(pr)^2-(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})^2}},$$

$I_0(\mathbf{r})$ — интегрально-показательная функция (24), $K_0(z)$, $K_1(z)$ — функции Макдональда.

После несложных упрощений для функции, комплексно-сопряженной с $\Psi_f(\mathbf{r},t)$, получим выражение

$$\Psi_f^*(\mathbf{r},t)=\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\,\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}-i\eta I_0^*(\mathbf{r})\right)\times$$
$$\times\sum_{n,s=-\infty}^{\infty}J_n\left(\frac{B_1(\mathbf{r})}{\hbar}\right)J_s\left(i\frac{\eta B_2(\mathbf{r})}{\hbar}\right)\times$$
$$\times\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\,\varepsilon t-i(n+s)\omega t+i\phi_1(\mathbf{r})s+\right.$$
$$\left.+\,i\phi_2(\mathbf{r})n+\frac{\zeta}{2\hbar}\,\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}n\right\},\quad(33)$$

где перейдем к суммированию по $m=s+n$ и получим

$$\Psi_f^*(\mathbf{r},t)=\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\,\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}-i\eta I_0^*(\mathbf{r})\right)\times$$
$$\times\sum_{m=-\infty}^{\infty}\exp\left(\frac{i}{\hbar}(\varepsilon-m\hbar\omega)\right)\times$$
$$\times\exp\left(i\phi_1(\mathbf{r})m\right)F_m(\mathbf{r}).\quad(34)$$

Функция взаимодействия электрона с обоими полями $F_m(\mathbf{r})$, определяемая как

$$F_m(\mathbf{r},t)=\sum_{n,s=-\infty}^{\infty}(-1)^nJ_n\left(\frac{B_1(\mathbf{r})}{\hbar}\right)\times$$
$$\times J_{n+m}\left(\frac{i\eta B_2(\mathbf{r})}{\hbar}\right)\times$$
$$\times\exp\left(i\left(\phi_1(\mathbf{r})-\phi_2(\mathbf{r})-\frac{\zeta}{2\hbar}\,\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}\right)n\right),$$

после суммирования [21] имеет вид

$$F_m(\mathbf{r}) = J_m(D(\mathbf{r}))\exp\left\{-im\arcsin\left(\frac{B_1(\mathbf{r})}{\hbar D(\mathbf{r})}\sin\left(\phi_1(\mathbf{r})-\phi_2(\mathbf{r})-\frac{\zeta}{2\hbar}\,\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}\right)\right)\right\}, \tag{35}$$

где

$$D(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{B_1^2(\mathbf{r})}{\hbar^2} - \eta^2 B_2^2(\mathbf{r}) + \frac{2i}{\hbar}\,B_1(\mathbf{r})B_2(\mathbf{r})\cos\left(\phi_1(\mathbf{r})-\phi_2(\mathbf{r})-\frac{\zeta}{2\hbar}\,\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}\right)}. \tag{36}$$

Для волновой функции в конечном состоянии получим формулу

$$\Psi_f^*(\mathbf{r},t) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\,\mathbf{p}\cdot\mathbf{r} - i\eta I_0^*(\mathbf{r})\right) \times \sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left(\frac{i}{\hbar}(\varepsilon_f - n\hbar\omega)\right) \times \exp\left(in\left(\phi_1(\mathbf{r})-\psi(\mathbf{r})\right)\right) J_n(D(\mathbf{r})), \tag{37}$$

где ε_f — энергия электрона в конечном состоянии,

$$\psi(\mathbf{r}) = \arcsin\left(\frac{iB_1(\mathbf{r})}{\hbar D(\mathbf{r})}\sin\left(\phi_1(\mathbf{r})-\phi_2(\mathbf{r})-\frac{\zeta}{2\hbar}\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}\right)\right). \tag{38}$$

Из соотношений (34), (36), (38) в приближении низкочастотного ЭМ-поля, $\zeta \ll 1$, имеем

$$B_2(\mathbf{r}) = 0, \quad \phi_2(\mathbf{r}) = 0, \quad D(\mathbf{r}) = \frac{B_1(\mathbf{r})}{\hbar},$$

$$\psi(\mathbf{r}) = \phi_1(\mathbf{r}) - \frac{\zeta}{2\hbar}\,\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}.$$

В выражении для $B_1(\mathbf{r})$ (32) в приближении $\omega\rho \ll v$ (где $\rho = Ze_0^2/\mu v^2$) можно пренебречь третьим членом в подкоренном выражении, а на интересующих нас больших расстояниях r, когда член

$$\nabla I_0^*(\mathbf{r}) = \frac{p\dfrac{\mathbf{r}}{r} + \mathbf{p}}{pr + \mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}\,\exp\left(\frac{i}{\hbar}(pr + \mathbf{p}\cdot\mathbf{r})\right)$$

становится много меньше $\boldsymbol{\alpha}_0\cdot\mathbf{p}$, также пренебрегаем и вторым членом, приняв $B_1(\mathbf{r}) = \boldsymbol{\alpha}_0\cdot\mathbf{p}$.

Тогда для $\Psi_f^*(\mathbf{r},t)$ имеем окончательную формулу:

$$\Psi_f^*(\mathbf{r},t) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\,\mathbf{p}\cdot\mathbf{r} - i\eta I_0^*(\mathbf{r})\right) \times \sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left(\frac{i}{\hbar}(\varepsilon_f - n\hbar\omega)t\right) J_n\left(\frac{\boldsymbol{\alpha}_0\cdot\mathbf{p}}{\hbar}\right). \tag{39}$$

3. ВЕРОЯТНОСТЬ МНОГОФОТОННОЙ НАДПОРОГОВОЙ ИОНИЗАЦИИ ВОДОРОДОПОДОБНОГО АТОМА В ЛАЗЕРНОМ ПОЛЕ С УЧЕТОМ ДАЛЬНОДЕЙСТВУЮЩЕГО КУЛОНОВСКОГО ПОЛЯ ОСТАТОЧНОГО ИОНА

Воспользуемся найденной волновой функцией $\Psi_f^*(\mathbf{r},t)$ (39) как конечным состоянием для вычисления вероятности многофотонной надпороговой ионизации атома в поле ЭМ-волны с учетом дальнодействующего кулоновского потенциала. Если взаимодействие с лазерным полем включается адиабатически медленно при $t = -\infty$ и до включения поля волны атомная система находилась в невозмущенном связанном состоянии $\Phi_i(\mathbf{r},t) = \Phi(\mathbf{r})\exp(iE_Bt)$ с энергией связи $E_B > 0$ валентных электронов в атоме ($2\mu E_B = a^{-2}$, $a = Z/\mu e_0^2$ — боровский радиус), то матричный элемент перехода определяется как

$$T_{i\to f} = -i\int_{-\infty}^{\infty}\Psi_f^*(\mathbf{r},t)\hat{V}\Phi_i(\mathbf{r},t)\,d\mathbf{r}\,dt. \tag{40}$$

Здесь $\hat{V} = -e_0\mathbf{E}(t)\mathbf{r}$ — гамильтониан взаимодействия с ЭМ-волной в дипольном приближении, $\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}_0\sin\omega t$ — напряженность электрического поля волны. Для водородоподобных атомов волновая функция связанного состояния имеет вид

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{\exp(-r/a)}{\sqrt{\pi a^3}}. \tag{41}$$

Представим гамильтониан в виде

$$\hat{V} = -\frac{e_0\mathbf{E}(t)\mathbf{r}}{2i}\left(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}\right) \tag{42}$$

и, проинтегрировав (40) по времени, получим следующую формулу:

$$T_{i\to f} = e_0\mathbf{E}_0\frac{1}{2\sqrt{\pi a^3}}\times \times\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int \mathbf{r}\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\,\mathbf{p}\cdot\mathbf{r} - i\eta I_0^*(\mathbf{r}) - \frac{r}{a}\right)d\mathbf{r}\times \times J_n\left(\frac{\boldsymbol{\alpha}_0\cdot\mathbf{p}}{\hbar}\right)2\pi\left(\delta\left(\varepsilon_f + E_B - (n-1)\hbar\omega\right) + + \delta\left(\varepsilon_f + E_B - (n+1)\hbar\omega\right)\right). \quad (43)$$

Учитывая, что пределы суммирования есть бесконечности, получим

$$T_{i\to f} = \pi\frac{e_0\mathbf{E}_0}{\sqrt{\pi a^3}}\times \times\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int \mathbf{r}\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\,\mathbf{p}\cdot\mathbf{r} - i\eta I_0^*(\mathbf{r}) - \frac{r}{a}\right)d\mathbf{r}\times \times\left(J_{n+1}\left(\frac{\boldsymbol{\alpha}_0\cdot\mathbf{p}}{\hbar}\right) - J_{n-1}\left(\frac{\boldsymbol{\alpha}_0\cdot\mathbf{p}}{\hbar}\right)\right)\times \times\delta(\varepsilon_f + E_B - n\hbar\omega), \quad (44)$$

где δ-функция выражает закон сохранения энергии при n-фотонной ионизации.

Матричный элемент перехода определяется как

$$T_{i\to f} = \sum_{n=-n_0}^{\infty} T_{i\to f}^n\delta(\varepsilon_f + E_B - n\hbar\omega), \quad (45)$$

где парциальная амплитуда перехода имеет вид

$$T_{i\to f}^n = e\mathbf{E}_0\pi\left(J_{n+1}\left(\frac{\boldsymbol{\alpha}_0\cdot\mathbf{p}}{\hbar}\right) - J_{n-1}\left(\frac{\boldsymbol{\alpha}_0\cdot\mathbf{p}}{\hbar}\right)\right)\mathbf{M}^f,$$

а амплитуда перехода для фотоэффекта с поглощением одного фотона ЭМ-поля —

$$\mathbf{M}^f = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}}\times \times\int \mathbf{r}\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\,\mathbf{p}\cdot\mathbf{r} - i\eta I_0^*(\mathbf{r}) - \frac{r}{a}\right)d\mathbf{r}. \quad (46)$$

Дифференциальная вероятность процесса МНИА в единицу времени в фазовом пространстве $d\mathbf{p}/(2\pi\hbar)^3$ (пространственный объем $V = 1$ в соответствии с нормализацией электронной волновой функции) с учетом всех конечных состояний импульсов фотоэлектрона в интервале $\mathbf{p}$, $\mathbf{p} + d\mathbf{p}$ имеет вид

$$dW_{i\to f}^n = w_{i\to f}^n d\mathbf{p}/(2\pi\hbar)^3, \quad (47)$$

где

$$w_{i\to f}^n = \lim_{i\to\infty}\frac{1}{t}|T_{i\to f}|^2.$$

Заменим функцию электрона в приближении слабого потенциала на волновую функцию электрона в кулоновском поле, относящуюся к непрерывному спектру, не ставя ограничений на величину электростатического потенциала, т. е. используем для $\mathbf{M}^f$ формулу [22]

$$\mathbf{M}^f = i\hbar^{5/2}16\sqrt{\pi}\,\Gamma(1 - i\eta)\exp\left(\frac{\pi}{2a} - 2\eta\,\mathrm{arctg}\,\eta\right)\times \times\frac{\eta^{5/2}p^{3/2}(i\eta - 1)}{(\eta^2+1)^3}\,\frac{\mathbf{p}}{p^5}. \quad (48)$$

Тогда парциальная вероятность $W_{i\to f}^n$ (47) перехода электрона из основного состояния в непрерывный спектр имеет вид

$$W_{i\to f}^n = \frac{1}{\hbar^2}\,\mathrm{Re}\left\{2\pi\frac{e_0^2}{4}\int\left|\frac{dJ_n(\boldsymbol{\alpha}_0\cdot\mathbf{p})/\hbar}{\boldsymbol{\alpha}_0\cdot\mathbf{p}/\hbar}\right|^2|\mathbf{E}_0\cdot\mathbf{M}^f|\delta(\varepsilon_f + E_B - n\hbar\omega)\frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\right\}, \quad (49)$$

где $\boldsymbol{\alpha} = e_0\mathbf{E}_0/\mu\omega^2$. Подставив $\mathbf{M}^f$ (48) в формулу (49) для парциальной вероятности, получим

$$W_{i\to f}^n = 2^4e_0^2\int\frac{1}{\eta^4}\left(\frac{\eta^2}{1+\eta^2}\right)^5\frac{\exp(-4\eta\,\mathrm{arctg}\,\eta)}{1-\exp(-2\pi\eta)}(\mathbf{E}_0\cdot\mathbf{p})^2\left|\frac{dJ_n(\boldsymbol{\alpha}_0\cdot\mathbf{p})/\hbar}{\boldsymbol{\alpha}_0\cdot\mathbf{p}/\hbar}\right|^2\delta(\varepsilon_f + E_B - n\hbar\omega)\frac{d\mathbf{p}}{p^7}. \quad (50)$$

Направим $\mathbf{E}_0$ по оси z и интегрирование проведем в сферической системе координат, где θ — угол между векторами $\mathbf{p}$ и $\mathbf{E}_0$, φ — угол между плоскостью, составленной векторами $\mathbf{p}$, $\mathbf{E}_0$ и плоскостью xz. Проинтегрировав (50) по энергии вылетающего электрона ε_f и полярному углу φ, получим формулу

$$W_{i\to f}^n = 2^4\pi\frac{e_0^2E_0^2}{\mu\omega\eta_n^4}\left(\frac{\eta_n^2}{1+\eta_n^2}\right)^5\times \times\frac{\exp(-4\eta_n\,\mathrm{arctg}\,\eta_n)}{1-\exp(-2\pi\eta_n)}\,\frac{1}{\hbar\omega n - E_B}\,F_n(b_n), \quad (51)$$

где

$$b_n = \frac{eE_0}{\hbar\mu\omega^2}\, p_n, \quad x = b_n \cos\theta(-b_n < x < b_n),$$

$$F_n(b_n) = \int\limits_0^{b_n} x^2 |J_n'(x)|^2 dx. \qquad (52)$$

Используя табличные интегралы, функцию $F_n(b_n)$ (52) можно выразить через обобщенную гипергеометрическую функцию [21]. Полученные выражения упрощаются при однофотонном поглощении, когда формула для вероятности факторизована по вкладам кулоновского и внешнего ЭМ-излучения. При произвольном n, $n \neq 1$, в пределе $b_n \leq 1$ получим известную формулу для многофотонной ионизации, получаемую по теории возмущений по E_0 [12]:

$$W_{i\to f}^N = CE_0^{2N}, \qquad (53)$$

где $N = \langle E_B/\hbar\omega + 1\rangle$ — минимальное число фотонов, необходимых для ионизации в соответствии с законом сохранения энергии, а член

$$C = \pi \frac{2^4 n^2 e_0^{2n}}{\mu\omega\eta_n^4(2n+1)(n!)^2} \left(\frac{p_n}{\hbar\mu\omega^2}\right)^{2n-2} \left(\frac{\eta_n^2}{1+\eta_n^2}\right)^5 \times$$
$$\times \frac{\exp(-4\eta_n \operatorname{arctg}\eta_n)}{1-\exp(-2\pi\eta_n)} \frac{1}{\hbar\omega n - E_B} \qquad (54)$$

при $n = N$ — поправка, вносимая кулоновским полем из-за воздействия на электрон в конечном состоянии после ионизации. Величина, обратная факториалу $n!$, $n \neq 1$, в определении $F_n(b_n)$ уменьшает его вклад в вероятности процесса (51) по сравнению с предшествующим кулоновским членом, но при выполнении дисперсионного соотношения $p_n^2/2\mu = E_B + n\hbar\omega$ вероятность $W_{i\to f}^n$ определяется взаимодействием электрона именно с полем внешнего ЭМ-излучения.

Для больших n, используя асимптотическую формулу для функции Бесселя

$$J_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2n\pi}} \left(\frac{ex}{2n}\right)^n,$$

получим новую формулу:

$$F_n(b_n) = \frac{b_n^{2n-2}}{(2n+1)\pi} \left(\frac{e}{2n}\right)^{2n}.$$

Тогда вероятность многофотонной ионизации без ограничения на величину напряженности ЭМ-поля определится формулой

$$W_{i\to f} = \sum_{n=N}^{\infty} W_{i\to f}^n, \qquad (55)$$

где

$$W_{i\to f}^n = \frac{2^5}{\omega\eta_n^4} \left(\frac{\eta_n^2}{1+\eta_n^2}\right)^5 \frac{\exp(-4\eta_n \operatorname{arctg}\eta_n + 2n)}{1-\exp(-2\pi\eta_n)} \times$$
$$\times \frac{e_0^2 E_0^2}{(2n)^{2n} p_n^2} \left(\frac{e_0 E_0}{\hbar\mu\omega^2}\, p_n\right)^{2n-2}. \qquad (56)$$

Известные предельные переходы для вероятности многофотонной надпороговой ионизации в ОЭП-соотношении (56) в сильном лазерном поле (в том числе и в борновском приближении по кулоновскому потенциалу ($\eta \ll 1$)) рассмотрены в работе [24].

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В представленной работе найдена вероятность многофотонной ионизации атома в лазерном поле с учетом влияния кулоновского поля на конечное состояние электрона в непрерывном спектре в рамках квантовомеханической теории, которая приведена к упрощенной формуле для интенсивной волны, когда процесс ионизации существенно многофотонный. Волновая функция электрона в конечном состоянии рассмотрена в обоих полях внешнего ЭМ-излучения линейной поляризации и кулоновского потенциала в нерелятивистском ОЭП. Вероятность многофотонной ионизации необходима для изучения экпериментально наблюдаемых ранее низкоэнергетических структур. Случай ЭМ-волны релятивистской интенсивности эллиптической поляризации и электростатического потенциала произвольного вида требует отдельного рассмотрения.

Благодарности. Автор выражает признательность Г. К. Аветисяну за многочисленные обсуждения и постоянное внимание к работе.

Финансирование работы. Исследование выполнено при финансовой поддержке Государственного комитета по науке Министерства образования и науки Республики Армения (ГКН МОН РА).

ЛИТЕРАТУРА

1. T. Popmintchev, M. C. Chen, D. Popmintchev, P. Arpin, S. Brown, S. Alisauskas, G. Andriukaitis, T. Balciunas, O. D. Mucke, A. Pugzlys, A. Baltuska, B. Shim, S. E. Schrauth, A. Gaeta, C. Hernandez-Garcıa, L. Plaja, A. Becker, M. M. Jaron-Becker, A. Murnane, and H. C. Kapteyn, Science **336**, 1287 (2012).

2. C. I. Blaga, F. Catoire, P. Colosimo, G. G. Paulus, H. G. Muller, P. Agostini, and L. F. DiMauro, Nature Phys. **5**, 335 (2009).

3. W. Quan, Z. Lin, M. Wu, H. Kang, H. Liu, X. Liu, J. Chen, J. Liu, X. T. He, S. G. Chen, H. Xiong, L. Guo, H. Xu, Y. Fu, Y. Cheng, and Z. Z. Xu, Phys. Rev. Lett. **103**, 093001 (2009).

4. B. Wolter, M. G. Pullen, M. Baudisch, M. Sclafani, M. Hemmer, A. Senftleben, C. D. Schroter, J. Ullrich, R. Moshammer, and J. Biegert, Phys. Rev. X **5**, 021034 (2015).

5. J. Maurer, B. Willenberg, B. W. Mayer, C. R. Phillips, L. Gallmann, J. Danek, M. Klaiber, K. Z. Hatsagortsyan, C. H. Keitel, and U. Keller, arXiv:1703. 03283.

6. J. Danek, K. Z. Hatsagortsyan, and Ch. H. Keitel, arXiv:1707.06921.

7. L. V. Keldysh, Sov. Phys. JETP **20**, 1307 (1965).

8. F. Faisal, J. Phys. B **6**, L89 (1973).

9. H. R. Reiss, Phys. Rev. A **22**, 1786 (1980).

10. Н. Б. Делоне, В. П. Крайнов, *Нелинейная ионизация атомов лазерным излучением*, Физматлит, Москва (2001).

11. А. И. Никишов, В. И. Ритус, ЖЭТФ **46**, 776 (1964).

12. А. И. Никишов, В. И. Ритус, ЖЭТФ **52**, 23 (1967).

13. А. М. Переломов, В. С. Попов, М. В. Терентьев, ЖЭТФ **50**, 1393 (1966).

14. А. М. Переломов, В. С. Попов, М. В. Терентьев, ЖЭТФ **51**, 309 (1966).

15. В. С. Попов, УФН **174**, 921 (2004) [V. S. Popov, Phys. Usp. **47**, 855 (2004)].

16. V. S. Popov, Phys. Atom. Nucl. **68**, 686 (2005).

17. S. V. Popruzhenko, J. Phys. B **47**, 204001 (2014).

18. H. K. Avetissian, A. G. Markossian, G. F. Mkrtchian, and S. V. Movsissian, Phys. Rev. A **56**, 4905 (1997).

19. L. Davidovich, CEA, Paris (1991).

20. А. П. Прудников, А. Ю. Брычков, О. И. Марычев, *Интегралы и ряды*, Наука, Москва (1981).

21. А. П. Прудников, А. Ю. Брычков, О. И. Марычев, *Интегралы и ряды. Специальные функции*, Наука, Москва (1983).

22. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика. Нерелятивистская теория*, Наука, Москва (1989).

23. H. K. Avetissian and S. V. Movsissian, Phys. Rev. A **54**, 3036 (1996).

24. H. K. Avetissian, A. G. Markossian, and G. F. Mkrtchian, Phys. Rev. A **64**, 053404 (2001).