

# СТАЦИОНАРНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА ДЛЯ ФЕРМИОНОВ ВО ВНЕШНЕМ КУЛОНОВСКОМ ПОЛЕ

*В. П. Незнамов<sup>a,b\*</sup>, И. И. Сафронов<sup>a</sup>*

<sup>a</sup> ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ»  
607188, Саров, Нижегородская обл., Россия

<sup>b</sup> Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»  
115409, Москва, Россия

Поступила в редакцию 3 октября 2018 г.,  
после переработки 25 января 2019 г.  
Принята к публикации 25 января 2019 г.

Изучены самосопряженные уравнения второго порядка со спинорными волновыми функциями для фермионов, движущихся во внешнем кулоновском поле. Для стационарных состояний уравнения характеризуются разделенными состояниями с положительной и отрицательной энергиями, и это приводит к возможности вероятностной интерпретации. Для кулоновского поля притяжения энергетический спектр уравнения второго порядка совпадает со спектром уравнения Дирака, в то время как плотности вероятности состояний несколько различаются. Для кулоновского поля отталкивания существует непроницаемый потенциальный барьер, радиус которого зависит от классического радиуса электрона и от энергии электрона. Существование непроницаемого барьера не противоречит результатам экспериментов по изучению внутренней структуры электрона и не влияет в низшем порядке теории возмущений на сечение кулоновского рассеяния электронов. Наличие непроницаемого барьера может приводить к конфайнменту позитронов в сверхкритических ядрах с  $Z \geq 170$  при реализации спонтанного испускания вакуумных электрон-позитронных пар.

DOI: 10.1134/S0044451019050031

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В квантовой механике движение частиц со спином  $1/2$  описывается, как правило, уравнением Дирака с производными первого порядка по пространственно-временным переменным биспинорной волновой функции [1]. В [1] Дирак получил также уравнение второго порядка для фермионов, движущихся во внешнем электромагнитном поле.

Движение фермионов во внешних силовых полях можно описывать также самосопряженными уравнениями со спинорными волновыми функциями [2]. В процессе преобразования от уравнения Дирака первого порядка к самосопряженному уравнению второго порядка энергия спиновой частицы сохраняется, в то время как плотности вероятности обнаружения частиц различаются. Это приводит к новым физическим следствиям. Так, напри-

мер, при наличии горизонтов событий нерегулярные стационарные решения уравнения Дирака во внешних гравитационных и электромагнитных полях Шварцшильда, Райсснера–Нордстрёма, Керра, Керра–Ньюмена становятся регулярными стационарными решениями уравнений второго порядка с квадратично-интегрируемыми спинорными волновыми функциями [3–5].

Настоящая работа посвящена анализу стационарных решений уравнений второго порядка для фермионов, движущихся в плоском пространстве-времени во внешнем кулоновском поле.

Работа построена следующим образом.

В разд. 2 для связности изложения приводятся уравнения Дирака для биспинорной волновой функции. Приводятся также самосопряженные уравнения второго порядка для спинорных волновых функций.

В разд. 3 анализируются уравнения Дирака со спинорными волновыми функциями и устанавливается их связь с уравнениями Дирака в представлении Фолди–Ваутхайзена [6].

\* E-mail: vpneznamov@vniief.ru, vpneznamov@mail.ru

В разд. 4 для фермионов и антифермионов во внешнем кулоновском поле получены самосопряженные уравнения второго порядка со спинорными волновыми функциями. Примечательно, что эти уравнения выведены с использованием замкнутых преобразований подобия. После разделения переменных получены уравнения для радиальных волновых функций. Показана допустимость вероятностной интерпретации спинорных волновых функций, одинаковой с интерпретацией для волновых функций уравнения Клейна – Гордона с разделенными состояниями с положительной и отрицательной энергиями [7].

В разд. 5 анализируются решения уравнения второго порядка в кулоновском поле притяжения. Показано, что при одинаковом энергетическом спектре водородоподобных атомов плотности вероятности обнаружения фермионов в соответствующих энергетических состояниях несколько отличаются от плотностей вероятности, вычисленных с помощью собственных функций уравнения Дирака. Это отличие возрастает с ростом порядкового номера  $Z$ .

В разд. 6 анализируются уравнения второго порядка в кулоновском поле отталкивания. Показано существование непроницаемого потенциального барьера с радиусом, пропорциональным классическому радиусу фермиона и обратно пропорциональным энергии фермиона (при  $E \gg mc^2$ ), где  $E$  и  $m$  – энергия и масса фермиона,  $c$  – скорость света. Показано, что существование непроницаемого барьера не противоречит результатам экспериментов по зондированию внутренней структуры электрона и не влияет в низшем порядке теории возмущений на сечение кулоновского рассеяния электронов.

Наличие непроницаемого барьера может приводить к удержанию (конфайнменту) позитронов в сверхкритических ядрах с  $Z \gtrsim 170$  при реализации испускания вакуумных электрон-позитронных пар [8–10].

В Заключении проводится обсуждение полученных результатов.

## 2. УРАВНЕНИЕ ДИРАКА ДЛЯ БИСПИНОРНОЙ ВОЛНОВОЙ ФУНКЦИИ

Для фермионов с массой  $m$  и зарядом  $e$ , движущихся во внешнем электромагнитном поле, уравнение Дирака можно записать в следующем виде:

$$[p^0 - eA^0(\mathbf{r}, t) - \boldsymbol{\alpha} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)) - \beta m] \times \Psi(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (1)$$

Здесь и ниже мы используем систему единиц  $\hbar = c = 1$  и сигнатуру пространства-времени Минковского

$$g_{\mu\nu} = \text{diag}[1, -1, -1, -1]. \quad (2)$$

В формуле (2)  $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ . В (1)  $\Psi(\mathbf{r}, t)$  – биспинорная волновая функция;  $A^0(\mathbf{r}, t)$ ,  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  – потенциалы электромагнитного поля;  $\alpha^k, \beta$  – четырехмерные матрицы Дирака,  $k = 1, 2, 3$ ;  $p^0 = i\frac{\partial}{\partial t}$ ,  $\mathbf{p} = -i\nabla$ .

Дирак также получил уравнение второго порядка [1]

$$[(p^0 - eA^0)^2 - (\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 - m^2 + e\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{H} - i\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{E}] \times \Psi(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (3)$$

где  $\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}$ ,  $\boldsymbol{\sigma}^k$  – двумерные матрицы Паули;  $\mathbf{H} = \text{rot}\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{E} = -\partial\mathbf{A}/\partial t - \nabla A^0$  – магнитное и электрическое поля.

Пусть

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \begin{pmatrix} \varphi(\mathbf{r}, t) \\ \chi(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix}, \quad (4)$$

где  $\varphi(\mathbf{r}, t)$ ,  $\chi(\mathbf{r}, t)$  – спинорные волновые функции.

Тогда плотность вероятности для уравнений (1), (3) определяется равенством

$$w_D = \Psi^\dagger(\mathbf{r}, t) \Psi(\mathbf{r}, t) = \varphi^\dagger(\mathbf{r}, t) \varphi(\mathbf{r}, t) + \chi^\dagger(\mathbf{r}, t) \chi(\mathbf{r}, t). \quad (5)$$

Из уравнения (1) следуют выражения

$$\begin{aligned} (p^0 - eA^0 - m) \varphi &= \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A}) \chi, \\ (p^0 - eA^0 + m) \chi &= \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A}) \varphi, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \chi &= \frac{1}{p^0 - eA^0 + m} \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A}) \varphi, \\ \varphi &= \frac{1}{p^0 - eA^0 - m} \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A}) \chi. \end{aligned} \quad (7)$$

### 3. УРАВНЕНИЯ ДИРАКА СО СПИНОРНЫМИ ВОЛНОВЫМИ ФУНКЦИЯМИ

Используя (7), из уравнения (3) получим два отдельных уравнения для спиноров  $\varphi(\mathbf{r}, t), \chi(\mathbf{r}, t)$ :

$$\left[ (p^0 - eA^0)^2 - (\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 - m^2 + e\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{H} - ie\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{E} \frac{1}{p^0 - eA^0 + m} \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A}) \right] \varphi(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (8)$$

$$\left[ (p^0 - eA^0)^2 - (\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 - m^2 + e\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{H} - ie\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{E} \frac{1}{p^0 - eA^0 - m} \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A}) \right] \chi(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (9)$$

Уравнения (8), (9) являются несамосопряженными, так как множители в последних слагаемых в общем случае не коммутируют друг с другом.

Из равенств (6), (7) можно также получить несамосопряженные уравнения

$$\left[ p^0 - eA^0 - m - \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A}) \times \frac{1}{p^0 - eA^0 + m} \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A}) \right] \varphi = 0, \quad (10)$$

$$\left[ p^0 - eA^0 + m - \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A}) \times \frac{1}{p^0 - eA^0 - m} \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A}) \right] \chi = 0. \quad (11)$$

Уравнения (8), (10) отличаются, соответственно, от уравнений (9), (11) заменой  $p^0 \rightarrow -p^0, \mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}, e \rightarrow -e$ .

Для стационарных состояний решениям уравнений (8), (10) соответствуют состояния с положительной энергией фермиона, решениям уравнений (9), (11) соответствуют состояния с отрицательной энергией:

$$\begin{aligned} p^0 \varphi &= |E| \varphi, \\ p^0 \chi &= -|E| \chi, \end{aligned} \quad (12)$$

где  $E$  — энергия фермиона. В случае стационарных состояний электромагнитные потенциалы  $A^0(\mathbf{r}), A^k(\mathbf{r})$  не зависят от времени.

В (8), (9) и (10), (11) мы разделили состояния с положительной и отрицательной энергиями. В (12) уравнение для  $\varphi$  соответствует частицам; уравнение для  $\chi$  соответствует античастицам.

Уравнения (8), (9) и (10), (11) являются точными уравнениями со спинорными волновыми функциями  $\varphi(\mathbf{r}, t), \chi(\mathbf{r}, t)$ . Однако эти уравнения являются несамосопряженными. Источником несамосопряженности является переход от уравнения Дирака с биспинорной волновой функцией к уравнениям (8), (9) и (10), (11) с разделенными состояниями по знаку энергии фермиона и со спинорными волновыми функциями.

В квантовой механике гамильтонианы стационарных состояний являются эрмитовыми и самосопряженными операторами. При отсутствии гамильтонова подхода операторы в уравнениях для волновых функций стационарных состояний должны быть также эрмитовыми и самосопряженными. Для этого с помощью неунитарных преобразований подобия уравнения для волновых функций должны быть приведены к самосопряженному виду.

Ранее при переходе от биспинорных волновых функций уравнения Дирака к спинорным волновым функциям аналогичная проблема возникающая несамосопряженности уравнений для них также разрешалась применением неунитарных преобразований подобия (эта проблема возникает при анализе релятивистских поправок к движению частиц со спином 1/2 в электростатическом поле с точностью до членов порядка  $v^2/c^2$ , где  $v$  — скорость частицы (см., например, [11]).

Преобразования подобия сохраняют энергии состояний, но не сохраняют их вероятности. В отличие от уравнений (8), (9) преимуществом уравнений (10), (11) является существование для них замкнутых преобразований подобия (31).

При получении уравнений (8), (9) и (10), (11) может возникнуть вопрос об адекватности равенств (7) при стремлении их знаменателей к нулю. Однако в этом случае (см. разд. 6) для физически приемлемых стационарных решений уравнений (10), (11) существуют следующие асимптотики:

— для частиц ( $E > 0$ )

$$\begin{aligned} E - eA^0 + m|_{r \rightarrow r_{cl}} &\sim r - r_{cl}, \\ \varphi|_{r \rightarrow r_{cl}} &\sim (r - r_{cl})^2, \\ \chi|_{r \rightarrow r_{cl}} &\sim \text{const } 1, \end{aligned}$$

— для античастиц ( $E < 0$ )

$$\begin{aligned} -|E| + eA^0 - m|_{r \rightarrow r_{cl}} &\sim r - r_{cl}, \\ \chi|_{r \rightarrow r_{cl}} &\sim (r - r_{cl})^2, \\ \varphi|_{r \rightarrow r_{cl}} &\sim \text{const } 2. \end{aligned}$$

Эти асимптотики, с учетом обозначения  $\mathbf{p} = -i\nabla$ , согласуются с равенствами (7). Отметим, что кажущаяся сингулярность в (7) возникает лишь в кулоновских полях отталкивания.

Обратимся теперь к вопросу о вероятностной интерпретации волновых функций в уравнениях (10), (11) при наличии стационарных состояний (12). Начнем с уравнения (10):

$$E\varphi = (m + eA^0 + \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A})) \times \frac{1}{E - eA^0 + m} \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A}) \varphi. \quad (13)$$

1. Если  $A^0(\mathbf{r}) = 0$ , то методом последовательных приближений, подставляя в знаменатель правой части (13)

$$E^0 = m, \quad E^{(1)} = m + \frac{[\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A})]^2}{2m},$$

$$E^{(2)} = m + \frac{[\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A})]^2}{2m} - \frac{[\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A})]^4}{8m^3}, \dots,$$

можно получить замкнутое выражение для гамильтониана уравнения (13):

$$E\varphi = H_{FW}^{(+)}\varphi = \left( m + \frac{[\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A})]^2}{2m} - \frac{[\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A})]^4}{8m^3} + \dots \right) \varphi = \sqrt{m^2 + (\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 - e\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{H}} \varphi. \quad (14)$$

Для стационарных состояний уравнения (11) аналогичная процедура приводит к уравнению с отрицательным знаком перед квадратным корнем:

$$E\chi = H_{FW}^{(-)}\chi = -\sqrt{m^2 + (\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 - e\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{H}} \chi. \quad (15)$$

В (14), (15)  $\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}$  — магнитное поле. Уравнения (14), (15) показывают, что волновые функции  $\varphi(\mathbf{r}, t)$ ,  $\chi(\mathbf{r}, t)$  являются волновыми функциями уравнения Дирака в представлении Фолди–Ватхайзена [12]. В этом представлении биспинорная волновая функция и гамильтониан могут быть представлены в виде [12, 13]

$$\Psi_{FW}(\mathbf{r}, t) = \begin{pmatrix} \varphi(\mathbf{r}) \\ 0 \end{pmatrix} e^{-iEt}, \quad E > 0, \quad (16)$$

$$\Psi_{FW}(\mathbf{r}, t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \chi(\mathbf{r}) \end{pmatrix} e^{-iEt}, \quad E < 0,$$

$$H_{FW} = \beta \sqrt{m^2 + (\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2} - e\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{H}. \quad (17)$$

Выражения (16), (17) справедливы для любой величины магнитного поля.

2.  $A^k(\mathbf{r}) = 0$ ,  $A^0(\mathbf{r}) \neq 0$ . В этом случае, подставляя в знаменатель правой части уравнения (13)  $E^0 = m$ , получим

$$E^{(1)}\varphi = \left( eA^0 + m + \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{ie\nabla A^0 \mathbf{p}}{4m^2} + \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot [e\nabla A^0 \times \mathbf{p}]}{4m^2} \right) \varphi. \quad (18)$$

Уравнение (18) является несамосопряженным. Для приведения его к самосопряженному виду необходимо провести неунитарное преобразование подобия

$$\varphi_{sc}^{(1)} = g_\varphi^{(1)} \varphi, \quad (19)$$

где с точностью до  $\mathbf{p}^2$  и  $eA^0$

$$g_\varphi^{(1)} = 1 + \frac{\mathbf{p}^2}{8m^2} + \frac{eA^0}{2m}, \quad (20)$$

$$(g_\varphi^{(1)})^{-1} = 1 - \frac{\mathbf{p}^2}{8m^2} - \frac{eA^0}{2m}.$$

Тогда

$$E^{(1)}\varphi_{sc}^{(1)} = H_{FW}^{(1)}\varphi_{sc}^{(1)} = g_\varphi^{(1)} \left( eA^0 + m + \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{ie\nabla A^0 \mathbf{p}}{4m^2} + \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot [e\nabla A^0 \times \mathbf{p}]}{4m^2} \right) (g_\varphi^{(1)})^{-1} \varphi_{sc}^{(1)} = \left( eA^0 + m + \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{\Delta eA^0}{8m^2} + \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot [e\nabla A^0 \times \mathbf{p}]}{4m^2} \right) \varphi_{sc}^{(1)}, \quad (21)$$

где  $\Delta = \nabla^2$  — лапласиан.

Уравнение (11) для состояний с  $E < 0$  имеет вид

$$E\chi = \left( eA^0 - m + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \frac{1}{E - eA^0 - m} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \right) \chi. \quad (22)$$

Подставляя в знаменатель правой части (22)  $E^{(0)} = -m$ , получаем

$$E^{(1)}\chi = \left( eA^0 - m - \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{ie\nabla A^0 \mathbf{p}}{4m^2} + \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot [e\nabla A^0 \times \mathbf{p}]}{4m^2} \right) \chi. \quad (23)$$

Для приведения (23) к самосопряженному виду используем равенство

$$\chi_{sc} = g_{\chi}^{(1)} \chi, \quad (24)$$

где с точностью до  $\mathbf{p}^2$  и  $eA^0$

$$g_{\chi}^{(1)} = 1 + \frac{\mathbf{p}^2}{8m^2} - \frac{eA^0}{2m}, \quad (25)$$

$$(g_{\chi}^{(1)})^{-1} = 1 - \frac{\mathbf{p}^2}{8m^2} + \frac{eA^0}{2m}.$$

Имеем

$$E^{(1)} \chi_{sc}^{(1)} = \left( eA^0 - m - \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{\Delta eA^0}{8m^2} + \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot [e\nabla A^0 \times \mathbf{p}]}{4m^2} \right) \chi_{sc}. \quad (26)$$

Уравнения (21), (26) представляют собой первые члены разложения гамильтониана Фолди – Ваутхайзена во внешнем поле  $A^0(\mathbf{r})$  [6].

В результате после проведения процедуры последовательных приближений для стационарных решений уравнений (10), (11) можно получить гамильтониан Фолди – Ваутхайзена в виде ряда по степеням  $\mathbf{p}^2$  и  $eA^0$ . При этом на каждом этапе последовательных приближений волновые функции уравнений (10), (11) будут подвергаться соответствующим неунитарным преобразованиям подобия:

$$\Psi_{FW}(\mathbf{r}, t) = \begin{pmatrix} \varphi^{(n)}(\mathbf{r}) \\ 0 \end{pmatrix} \Big|_{n \rightarrow \infty} e^{-iEt}, \quad E > 0, \quad (27)$$

$$\Psi_{FW}(\mathbf{r}, t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \chi^{(n)}(\mathbf{r}) \end{pmatrix} \Big|_{n \rightarrow \infty} e^{-iEt}, \quad E < 0,$$

где

$$\varphi^{(n)}(\mathbf{r}) \Big|_{n \rightarrow \infty} = g_{\varphi}^{(n)} \varphi(\mathbf{r}), \quad (28)$$

$$\chi^{(n)}(\mathbf{r}) \Big|_{n \rightarrow \infty} = g_{\chi}^{(n)} \chi(\mathbf{r}).$$

При наличии стационарных состояний анализ уравнений (10), (11) со спинорными волновыми функциями приводит к следующим выводам.

1. В случае  $A^0(\mathbf{r}) = 0, A^k(\mathbf{r}) \neq 0$  уравнения (10), (11) приводятся к уравнению Дирака в представлении Фолди – Ваутхайзена с разделенными состояниями с положительной и отрицательной энергиями фермиона. Гамильтониан  $H_{FW}$  имеет замкнутый вид (см. (17)).

2. В случае  $A^0(\mathbf{r}) \neq 0, A^k(\mathbf{r}) = 0$  гамильтониан  $H_{FW}$  можно получить лишь в виде ряда по степеням  $\mathbf{p}^2$  и  $eA^0$  (первые члены ряда см. в (21), (26)).

3. В случае  $A^0(\mathbf{r}) \neq 0$  переход к представлению Фолди – Ваутхайзена с эрмитовым гамильтонианом  $H_{FW}$  осуществляется приведением уравнений (10), (11) к самосопряженному виду. При этом уравнения и волновые функции  $\varphi(\mathbf{r}, t), \chi(\mathbf{r}, t)$  подвергаются неунитарным преобразованиям подобия.

4. В представлении Фолди – Ваутхайзена плотность вероятности в соответствии с (27) равна

$$w_{\varphi} = \varphi^{(n)+} \varphi^{(n)} \Big|_{n \rightarrow \infty}, \quad E > 0, \quad (29)$$

$$w_{\chi} = \chi^{(n)+} \chi^{(n)} \Big|_{n \rightarrow \infty}, \quad E < 0.$$

Поскольку переход в представление Фолди – Ваутхайзена можно осуществить унитарным преобразованием уравнения Дирака с биспинорной волновой функцией [14, 15], плотности вероятности (29) совпадают с дираковской плотностью вероятности (5).

#### 4. САМОСОПРЯЖЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА СО СПИНОРНЫМИ ВОЛНОВЫМИ ФУНКЦИЯМИ И ВЕРОЯТНОСТНАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ

Если умножить уравнение (10) слева на оператор  $(p^0 - eA^0 + m)$ , а уравнение (11) – на оператор  $(p^0 - eA^0 - m)$ , то получим уравнения (8), (9). Для стационарных состояний (12) решениями уравнений (8), (9), как и уравнений (10), (11), являются разделенные состояния с положительной и отрицательной энергиями фермиона.

В случае  $A^0(\mathbf{r}) = 0$  при наличии стационарных состояний уравнения (8), (9) являются самосопряженными, их решения совпадают с решениями уравнения Дирака в представлении Фолди – Ваутхайзена (см. (14), (15)).

Пусть  $A^0(\mathbf{r}) \neq 0, A^k(\mathbf{r}) = 0$ . В этом случае уравнения (8), (9) с заменой  $p^0 \rightarrow E$  (наличие стационарных состояний) необходимо приводить к самосопряженному виду. Примечательно, что в отличие от уравнений (10), (11) для уравнений (8), (9) операторы преобразования записываются в замкнутом виде:

$$\Phi = g_{\varphi} \varphi, \quad (30)$$

$$X = g_{\chi} \chi,$$

где

$$g_{\varphi} = (E - eA^0 + m)^{-1/2}, \quad (31)$$

$$g_{\chi} = (|E| + eA^0 + m)^{-1/2}.$$

После преобразований уравнения (8), (9) имеют самосопряженный вид:

$$g_\varphi \left[ (E - eA^0)^2 - \mathbf{p}^2 - m^2 - \frac{1}{E - eA^0 + m} ie\boldsymbol{\sigma}\mathbf{E}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p} \right] g_\varphi^{-1}\Phi =$$

$$= \left[ (E - eA^0)^2 - \mathbf{p}^2 - m^2 - \frac{3}{4} \frac{e^2\mathbf{E}^2}{(E - eA^0 + m)^2} + \frac{e \operatorname{div} \mathbf{E}}{2(E - eA^0 + m)} + \frac{e\boldsymbol{\sigma} \cdot [\mathbf{E} \times \mathbf{p}]}{E - eA^0 + m} \right] \Phi = 0, \quad (32)$$

$$g_\chi \left[ (E - eA^0)^2 - \mathbf{p}^2 - m^2 - \frac{1}{E - eA^0 - m} ie\boldsymbol{\sigma}\mathbf{E}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p} \right] g_\chi^{-1}\chi =$$

$$= \left[ (E - eA^0)^2 - \mathbf{p}^2 - m^2 - \frac{3}{4} \frac{e^2\mathbf{E}^2}{(E - eA^0 - m)^2} + \frac{e \operatorname{div} \mathbf{E}}{2(E - eA^0 - m)} + \frac{e\boldsymbol{\sigma} \cdot [\mathbf{E} \times \mathbf{p}]}{E - eA^0 - m} \right] \chi = 0. \quad (33)$$

Уравнение (32) описывает частицы со спином 1/2 с положительной энергией. Уравнение (33) описывает античастицы с отрицательной энергией. Уравнения (32), (33) отличаются друг от друга знаком перед массовым членом. Оба уравнения можно записать в виде, характерном для представления Фолди–Ваутхайзена:

$$\left[ (E - eA^0)^2 - \mathbf{p}^2 - m^2 - \frac{3}{4} \frac{e^2\mathbf{E}^2}{(E - eA^0 + \beta m)^2} + \frac{e \operatorname{div} \mathbf{E}}{2(E - eA^0 + \beta m)} + \frac{e\boldsymbol{\sigma} \cdot [\mathbf{E} \times \mathbf{p}]}{E - eA^0 + \beta m} \right] \times$$

$$\times \Psi(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (34)$$

где  $\Psi(\mathbf{r}, t)$  — биспинор,

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \begin{pmatrix} \Phi(\mathbf{r}) \\ 0 \end{pmatrix} e^{-iEt}, \quad E > 0,$$

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \chi(\mathbf{r}) \end{pmatrix} e^{-iEt}, \quad E < 0. \quad (35)$$

Как известно, (см., например, [7]) при разделении состояний с положительной и отрицательной энергиями для уравнения Клейна–Гордона допустима вероятностная интерпретация. Плотности вероятности для уравнения (34) и уравнений (32), (33) равны

$$w_\Phi = \Phi^+\Phi, \quad E > 0,$$

$$w_\chi = \chi^+\chi, \quad E < 0. \quad (36)$$

Поскольку преобразования (31) отличаются от преобразований (20), (25), (28), плотности вероятности

(36) отличаются от плотностей вероятности (5), (29) для уравнения Дирака. О масштабе отличий говорится в следующих разделах работы.

Преобразования подобия сохраняют энергии состояний. Энергии частицы со спином 1/2 в уравнениях второго порядка (32), (33) совпадают с соответствующими энергиями в уравнении Дирака (1) и в уравнении Дирака в представлении Фолди–Ваутхайзена.

Для центрально-симметричного кулоновского потенциала уравнения (32), (33) допускают разделение переменных в сферических координатах  $(r, \theta, \varphi)$ .

Если представить спиноры  $\Phi(\mathbf{r})$ ,  $\chi(\mathbf{r})$  в виде

$$\Phi(r, \theta, \varphi) = F(r) \Omega_{jlm_\varphi}(\theta, \varphi), \quad (37)$$

$$\chi(r, \theta, \varphi) = G(r) (-1)^{(1+l-l')/2} \Omega_{j'l'm_\varphi}(\theta, \varphi), \quad (38)$$

где  $\Omega_{jlm_\varphi}$ ,  $\Omega_{j'l'm_\varphi}$  — шаровые спиноры [16];  $l = j \pm 1/2$ ,  $l' = 2j - 1$ ;  $j, l$  — полный и орбитальный моменты частицы со спином 1/2;  $m_\varphi = -j, -j + 1, \dots, j$  — проекция полного момента  $j$ , то для радиальных функций  $F(r)$ ,  $G(r)$  можно получить уравнения типа Шредингера с эффективными потенциалами  $U_{eff}^F(r)$ ,  $U_{eff}^G(r)$ :

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d}{dr} \right) F(r) + 2(E_{Schr} - U_{eff}^F(r)) F(r) = 0, \quad (39)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d}{dr} \right) G(r) + 2(E_{Schr} - U_{eff}^G(r)) G(r) = 0. \quad (40)$$

В формулах (39), (40)

$$E_{Schr} = \frac{E^2 - m^2}{2}, \quad (41)$$

$$U_{eff}^F(r) = EeA^0 - \frac{1}{2} (eA^0)^2 + \frac{\kappa(\kappa + 1)}{2r^2} + \frac{d^2(eA^0)}{4(E + m - eA^0)} + \frac{3}{8} \frac{\left( \frac{deA^0}{dr} \right)^2}{(E + m - eA^0)^2} - \frac{1}{2} \frac{\kappa \frac{deA^0}{dr}}{r(E + m - eA^0)}, \quad (42)$$

$$U_{eff}^G(r) = EeA^0 - \frac{1}{2}(eA^0)^2 + \frac{\kappa(\kappa+1)}{2r^2} + \frac{1}{4} \frac{d^2(eA^0)}{dr^2} + \frac{3}{8} \frac{\left(\frac{deA^0}{dr}\right)^2}{(E-m-eA^0)^2} - \frac{1}{2} \frac{\kappa \frac{deA^0}{dr}}{r(E-m-eA^0)}. \quad (43)$$

В (42), (43)  $\kappa$  – квантовое число уравнения Дирака,

$$\kappa = \mp 1, \mp 2, \dots = \begin{cases} -(l+1), & j = l + 1/2, \\ l, & j = l - 1/2. \end{cases} \quad (44)$$

Далее уравнение (39) мы используем для анализа движения фермионов в кулоновских полях различной интенсивности.

### 5. УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА В КУЛОНОВСКОМ ПОЛЕ ПРИТЯЖЕНИЯ

Рассмотрим решения уравнения типа Шредингера (39) для фермионов в кулоновском поле  $eA^0(r) = -Ze^2/r$ , где  $Z$  – порядковый номер атомных ядер. Ниже будем использовать безразмерные величины  $\varepsilon = E/m$ ,  $\rho = r/l_c$ , где  $l_c = \hbar/mc$  – комптоновская длина волны фермиона.

Асимптотика эффективного потенциала (42) при  $\rho \rightarrow 0$  имеет вид

$$U_{eff}^F|_{\rho \rightarrow 0} = -\frac{(Z\alpha)^2 - 3/4 + (1 - \kappa^2)}{2\rho^2}, \quad (45)$$

где  $\alpha = e^2/\hbar c$  – электромагнитная постоянная тонкой структуры.

В асимптотике (45) в зависимости от  $Z$  можно выделить три характерных области. Для примера рассмотрим эти области для связанных состояний  $1S_{1/2}$  ( $\kappa = -1$ ),  $2P_{1/2}$  ( $\kappa = +1$ ). В первой области  $1 \leq Z < \sqrt{3}/2\alpha$  при  $\rho \rightarrow 0$  существует положительный барьер  $\sim 1/\rho^2$  с последующей потенциальной ямой. При  $Z = Z_{cr} = \sqrt{3}/2\alpha \approx 118.7$  потенциальный барьер исчезает; для  $Z > Z_{cr}$  при  $\rho \rightarrow 0$  остается потенциальная яма  $-K/\rho^2$ . Во второй области  $119 \leq Z \leq 137$  коэффициент  $K \leq 1/8$ , что допускает существование фермионных стационарных связанных состояний [17]. В третьей области  $Z > 137$  при  $\rho \rightarrow 0$  существует потенциальная яма с  $K > 1/8$ , что свидетельствует о реализации режима «падения на центр» [17]. На рис. 1 для  $Z = 1, 119, 140$  приведены зависимости  $U_{eff}^F(\rho)$  при  $\kappa = -1$  ( $1S_{1/2}$ ).

Для сравнения на рис. 1 для  $Z = 1, 119, 140$  приведены зависимости кулоновского потенциала

$eA^0(\rho) = -Z\alpha^2/r$ , используемого в уравнениях Дирака. Видно существенное различие зависимостей  $U_{eff}^F(\rho)$  и  $eA^0(\rho)$ . Отметим, что три области, обсуждавшиеся выше, можно получить также в результате строгого математического анализа уравнения Дирака с сингулярным потенциалом  $eA^0(\rho)$  [18,19]. Отметим также, что проблема «падения на центр» при  $Z > 137$  разрешается при учете конечных размеров атомных ядер [8–10]. Аналогичный анализ асимптотик  $U_{eff}^F(\rho)$  (42) с другим разбиением на три области можно провести для допустимых значений  $\kappa \neq \pm 1$ .

Энергетический спектр и собственные функции уравнения типа Шредингера (39) мы определяли численно, используя преобразование Прюфера [20] и метод фазовых функций [21–23]. Некоторые подробности приведены в Приложении. Ранее этот метод численных решений уравнений типа Шредингера применительно к движению фермионов в полях Шварцшильда, Райсснера – Нордстрёма, Керра – Ньюмена подробно излагался в работах [3–5].

В результате расчетов показано, что энергетический спектр уравнения второго порядка (39), как и должно быть, совпадает со спектром водородоподобных атомов, получаемым решением уравнения Дирака (1).

Несколько иная ситуация возникает при сравнении плотностей вероятности (5) (с собственными функциями уравнения Дирака (1)) с плотностями вероятности (36) (с собственными функциями уравнений (32), (33)). Ниже мы ограничимся сравнением плотностей вероятности с радиальными волновыми функциями уравнения Дирака (1) и уравнения (32) для состояний с  $E > 0$ . Соответствующий анализ с использованием уравнения (33) для состояний с  $E < 0$  можно провести аналогичным образом.

Выделим в представлении биспинорной волновой функции радиальные функции  $\varphi(\rho), \chi(\rho)$ :

$$\begin{aligned} \varphi(\rho, t) &= \varphi(\rho) \Omega_{jlm_\varphi}(\theta, \varphi) e^{-i\varepsilon t}, \\ \chi(\rho, t) &= \chi(\rho) (-1)^{(1+l-l')/2} \Omega_{j'l'm_\varphi}(\theta, \varphi) e^{-i\varepsilon t}, \end{aligned} \quad (46)$$

где  $\Omega_{jlm_\varphi}, \Omega_{j'l'm_\varphi}$  – шаровые спиноры [16] (см. также (37), (38)).

Тогда для дираковских волновых функций в соответствии с (5) вероятность обнаружения фермиона на расстоянии  $\rho$  в сферическом слое  $d\rho$  равна

$$w_D(\rho) = (\varphi^*(\rho) \varphi(\rho) + \chi^*(\rho) \chi(\rho)) \rho^2 d\rho. \quad (47)$$

Аналогичная вероятность с собственными функциями уравнения второго порядка (39) равна (см. (36), (37), (30))

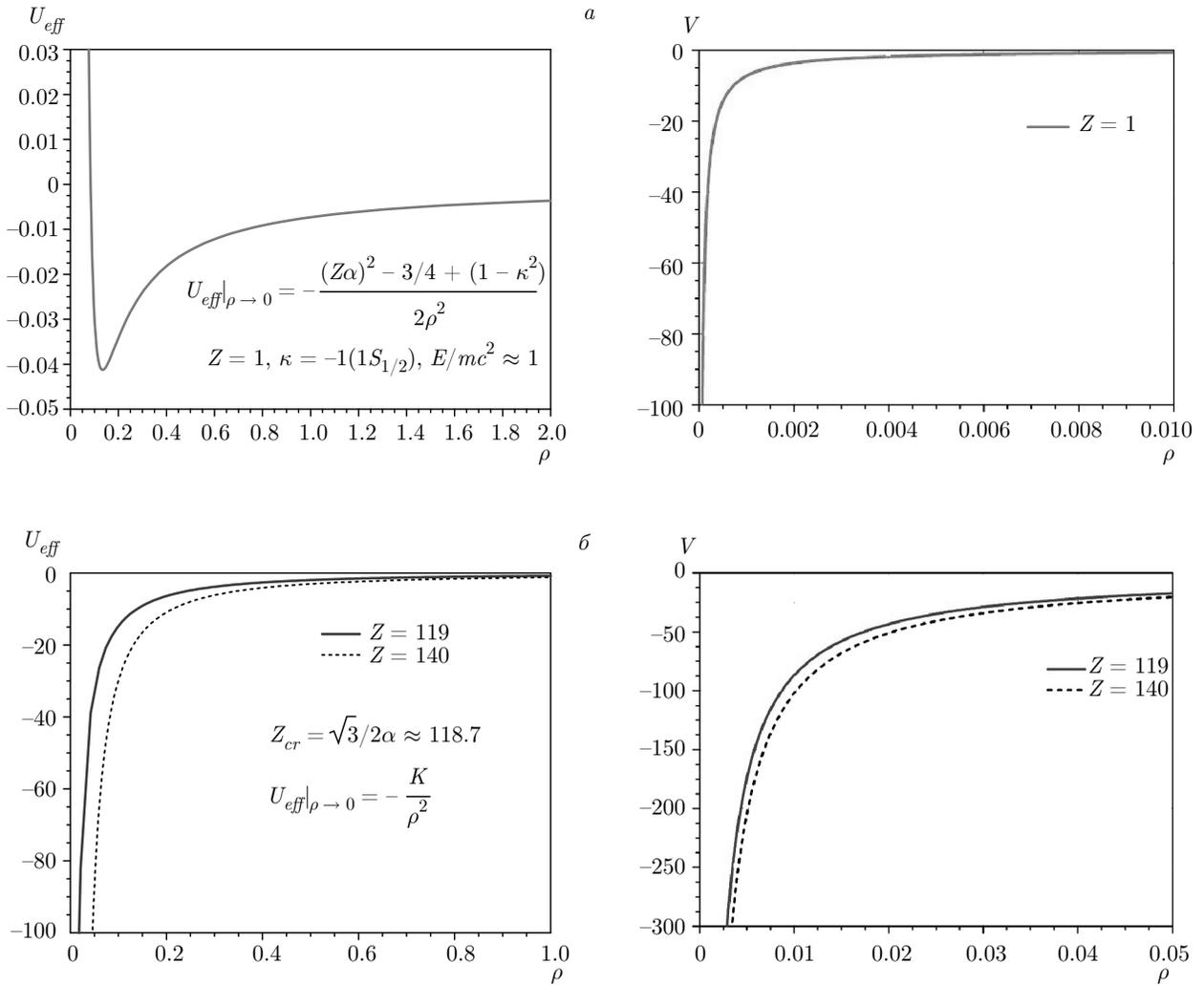


Рис. 1. Зависимости  $U_{eff}(\rho)$  и  $V(\rho) = -Z\alpha/\rho$  для  $Z = 1$  (а), 119, 140 (б)

$$w_{\Phi}(\rho) = F^*(\rho) F(\rho) \rho^2 d\rho = \frac{1}{\varepsilon + Z\alpha^2/\rho + 1} \varphi^*(\rho) \varphi(\rho) \rho^2 d\rho. \quad (48)$$

Уже на данном этапе без вычислений видно, что вероятности (47), (48) отличаются друг от друга. Кулоновские функции водородоподобных атомов  $\chi(\rho)$  не обращаются в нуль во всей области определения  $(0, \infty)$ , в то время как функции  $\varphi(\rho)$  один или несколько раз обращаются в нуль для возбужденных энергетических состояний [24]. Вероятность (48) пропорциональна  $\varphi^*(\rho) \varphi(\rho)$ , поэтому она отличается от вероятности (47). Посмотрим на масштаб этих отличий. На рис. 2 для состояний  $1S_{1/2}, 2S_{1/2}, 2P_{1/2}, 3P_{1/2}$  и  $Z = 1, 100$  приведены вычисленные плотности вероятности (47), (48).

На рис. 2 по оси абсцисс расстояния приведены в атомных единицах  $\rho_a = (r/\hbar^2)me^2 = \alpha\rho$ .

Для атома водорода ( $Z = 1$ ) относительный вклад слагаемого  $\chi^*(\rho)\chi(\rho)$  в (47) составляет порядка  $10^{-7}$ . С этой степенью точности мы видим совпадение плотностей вероятности (47) и (48).

Для водородоподобного атома с  $Z = 100$  вес слагаемого  $\chi^*(\rho)\chi(\rho)$  составляет приблизительно 16%. При качественном совпадении зависимостей  $w_D(\rho)$  и  $w_{\Phi}(\rho)$  мы видим и некоторые небольшие различия. Влияние этих различий на величину матричных элементов реальных физических процессов требует дополнительного изучения. Однако очевидно, что влияние будет малым и в целом можно заключить, что уравнение второго порядка со спинорными волновыми функциями и уравнение Дирака описывают движение фермионов в кулоновском поле при-

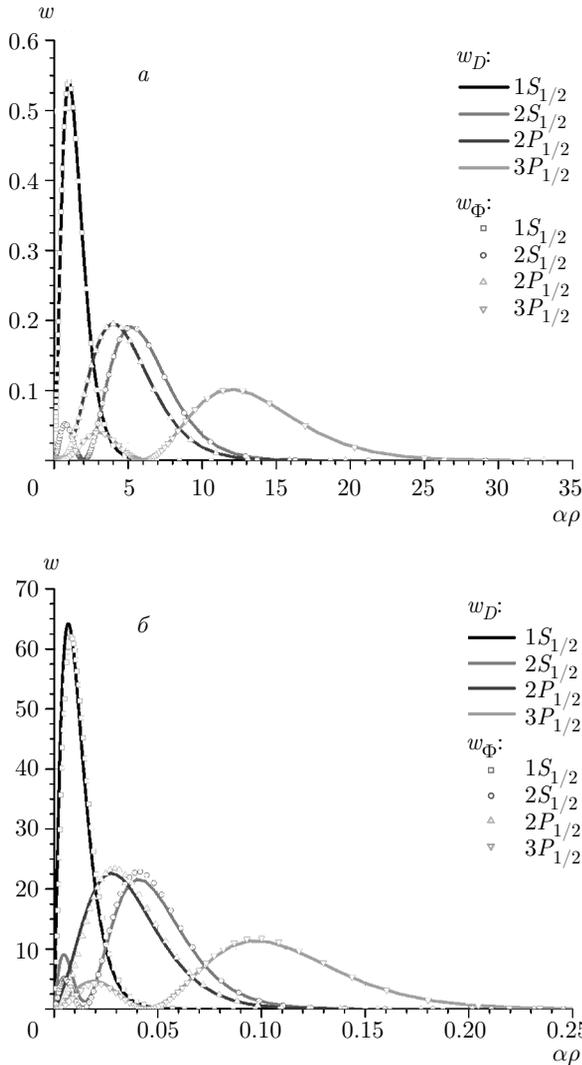


Рис. 2. (В цвете онлайн) Сопоставление плотностей вероятности  $w_D(\rho)$  и  $w_F(\rho)$  для  $Z = 1$  (а), 100 (б)

тяжения с идентичными энергетическими спектрами и близкими друг к другу плотностями вероятности.

### 6. УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА В КУЛОНОВСКОМ ПОЛЕ ОТТАЛКИВАНИЯ. НЕПРОНИЦАЕМЫЕ ПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ БАРЬЕРЫ

В этом случае кулоновский потенциал

$$eA^0(\rho) = Z\alpha^2/\rho. \quad (49)$$

В отличие от (49) эффективный потенциал (42) сингулярен при

$$\rho_{cl} = Z\alpha/(\varepsilon + 1). \quad (50)$$

В естественных единицах радиус  $r_{cl}$  пропорционален классическому радиусу заряженного фермиона  $r_f = Ze^2/mc^2$ :

$$r_{cl} = \frac{r_f}{1 + E/mc^2} = \frac{Z(e^2/mc^2)}{1 + E/mc^2}. \quad (51)$$

Ведущая асимптотика потенциала (42) при  $\rho \rightarrow \rho_{cl}$  имеет вид

$$U_{eff}^F|_{\rho \rightarrow \rho_{cl}} = \frac{3}{8} \frac{1}{(\rho - \rho_{cl})^2}. \quad (52)$$

Если при  $\rho \rightarrow \rho_{cl}$  представить радиальную функцию  $F(\rho)$  как

$$F(\rho)|_{\rho \rightarrow \rho_{cl}} = (\rho - \rho_{cl})^s \sum_{k=0}^{\infty} f_k (\rho - \rho_{cl})^k, \quad (53)$$

то определяющее уравнение для (39) с учетом (52) приводит к двум решениям  $s_1 = 3/2$ ,  $s_2 = -1/2$  и

$$F_1|_{\rho \rightarrow \rho_{cl}} = f_0^{(1)} (\rho - \rho_{cl})^{3/2}, \quad (54)$$

$$F_2|_{\rho \rightarrow \rho_{cl}} = f_0^{(2)} (\rho - \rho_{cl})^{-1/2}. \quad (55)$$

Решение (55) квадратично-неинтегрируемо, и поэтому физически неприемлемо.

Решение (54) с учетом (30), (31), (37), (46) приводит к зависимостям дираковских радиальных функций  $\varphi(\rho)$ ,  $\chi(\rho)$ :

$$\varphi|_{\rho \rightarrow \rho_{cl}} \sim (\rho - \rho_{cl})^2, \quad (56)$$

$$\chi|_{\rho \rightarrow \rho_{cl}} \sim \text{const}1.$$

Для решений уравнения Дирака в поле Керра–Ньюмена с  $\varepsilon < 1$  в случае существования потенциального барьера (52) с последующей потенциальной ямой ранее численно показано поведение радиальных функций в точном соответствии с асимптотикой (56) [5].

Однако кулоновские функции непрерывного спектра водородоподобных атомов с  $\varepsilon > 1$  для потенциала (49) не обращаются в нуль при  $\rho = \rho_{cl}$ , а равны некоторым константам [16]. Такое поведение приводит к нефизической асимптотике (55) волновой функции уравнения второго порядка (39). Очевидно, что для кулоновского потенциала отталкивания должно также существовать второе решение уравнения Дирака с асимптотикой (56).

Численный анализ интегральных кривых решения уравнения Дирака (1) для радиальных функций  $\varphi(\rho)$ ,  $\chi(\rho)$  показывает, что решение с асимптотикой (56) действительно существует. Примечательно, что

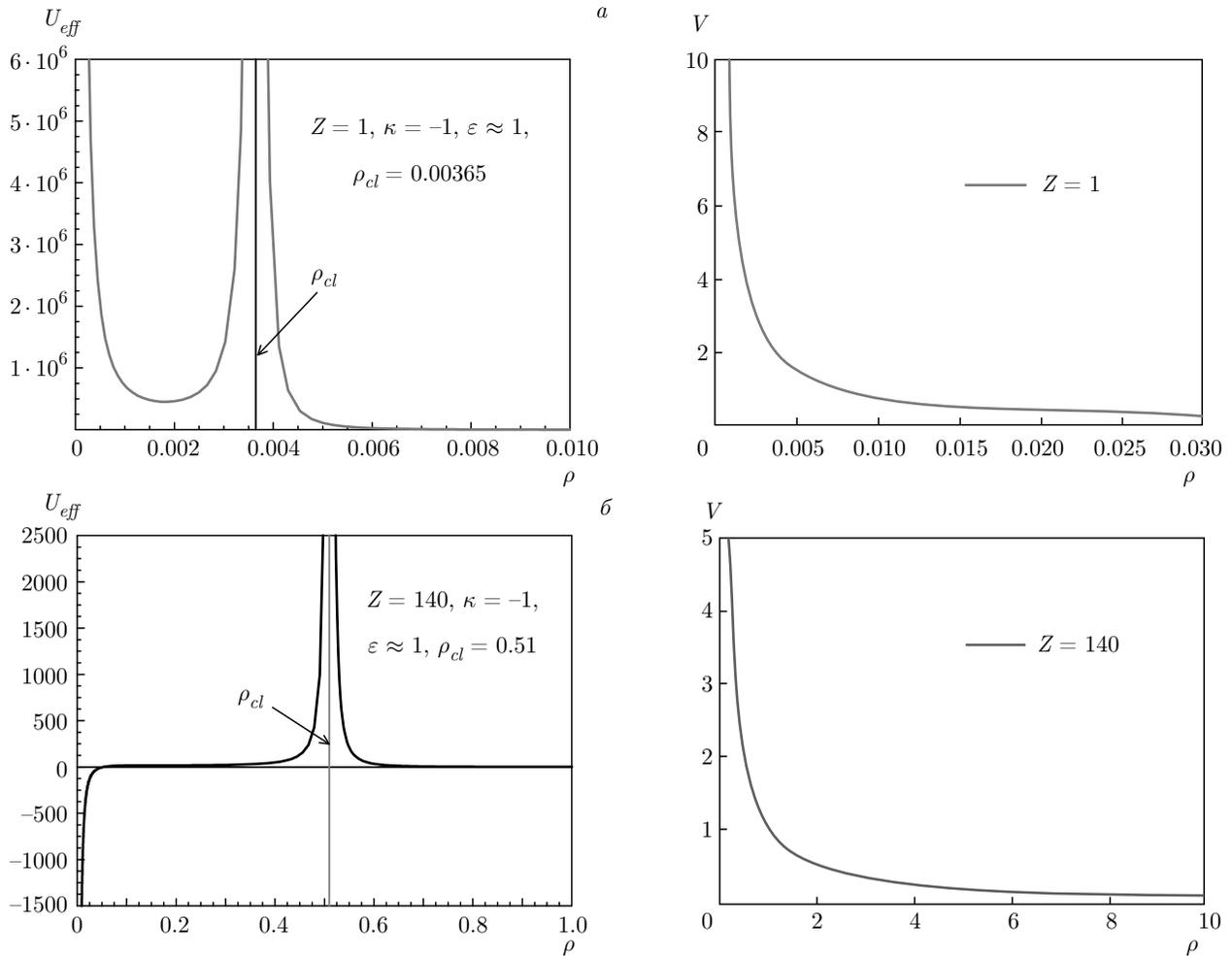


Рис. 3. Зависимости  $U_{eff}(\rho)$  и  $V(\rho) = Z\alpha/\rho$  для  $Z = 1$  (а), 140 (б)

это решение на расстоянии нескольких комптоновских длин волн от  $\rho = \rho_{cl}$  начинает совпадать с кулоновскими функциями непрерывного спектра с  $\varepsilon > 1$ .

На рис. 3 приведены зависимости  $U_{eff}^F(\rho)$  для  $Z = 1, \kappa = -1, \varepsilon \approx 1$  и  $Z = 140, \kappa = -1, \varepsilon \approx 1$ . Также для сравнения приведены зависимости  $eA^0(\rho) = Ze^2/\rho$  для  $Z = 1, Z = 140$ .

Для асимптотики (54) потенциальный барьер (52) является квантовомеханически непроницаемым [25]. Возникает вопрос: соответствует ли существование непроницаемого барьера при  $\rho = \rho_{cl}$  известным к настоящему времени экспериментальным данным?

### 6.1. Зондирование внутренней структуры электрона

В случае рассеяния электрона на электро-не приведённая масса  $m = m_e/2$ , где  $m_e$  — масса электро-

на. Выражение для радиуса непроницаемого барьера (51) приобретает вид

$$r_{cl}^{(e)} = \frac{2r_e}{1 + 2E/m_e c^2}. \tag{57}$$

В (57)  $r_e = e^2/m_e c^2$  — классический радиус электрона. Для покоящегося электрона ( $E = m_e c^2$ ) радиус барьера равен двум третям классического радиуса электрона. При  $E \gg m_e c^2$  радиус барьера уменьшается обратно пропорционально энергии электрона в системе центра масс.

При зондировании внутренней структуры электрона во всех возможных экспериментах с электрон-электронным рассеянием должна фиксироваться невозможность проникновения электронов в область  $r < r_{cl}^{(e)}$ .

В экспериментах с электрон-позитронным рассеянием, проведенных в конце XX века на ускорителе LEP (ЦЕРН), при энергии в системе цен-

тра масс  $E = 200$  ГэВ внутренняя структура электронов и позитронов не проявляется при  $r_{min} \approx 2 \cdot 10^{-18}$  см (см., например, [26]). Очевидно, в аналогичных гипотетических экспериментах с электрон-электронным рассеянием величина  $r_{min}$  будет несколько большей. Радиус непроницаемого барьера (57) при  $E = 200$  ГэВ равен  $r_{cl}^{(e)} = 0.7 \cdot 10^{-18}$  см, т. е.

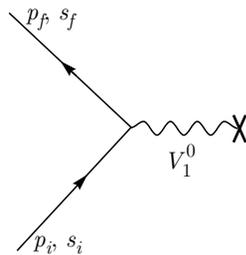
$$r_{cl}^{(e)} < r_{min}. \quad (58)$$

На данном этапе существование непроницаемого барьера (52) с радиусом (57) не противоречит экспериментальным данным по зондированию внутренней структуры электрона.

### 6.2. Сечение рассеяния электрона в кулоновском поле

Будем рассматривать кулоновское рассеяние электрона в низшем порядке по  $e$ , используя самосопряженное уравнение второго порядка (32) со спиновой волновой функцией  $\Phi(\mathbf{r})$ .

Диаграмма Фейнмана имеет вид



В первом порядке по  $e$  вершинный оператор  $V_1^0$  равен (см. уравнение (32))

$$V_1^0 = e \left[ E_f + E_i - \frac{\text{div} \mathbf{E}}{E_i + m} - \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot [\mathbf{E} \times \mathbf{p}]}{E_i + m} \right]. \quad (59)$$

По сравнению с уравнением Клейна–Гордона для бесспиновых частиц наличие спина у электрона приводит к появлению двух последних слагаемых в вершинном операторе (59). Для статического кулоновского потенциала

$$\begin{aligned} A^\mu(q) &\equiv \int d^4x e^{iqx} A^\mu(x) = \\ &= \frac{Ze}{|\mathbf{q}|^2} 2\pi \delta(E_f - E_i) g^{\mu 0}. \end{aligned} \quad (60)$$

В (60)  $q = p_f - p_i$ ,  $p_f^0 = p_i^0$ ,  $\mathbf{q} = \mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i$ ,  $\mathbf{p}_f^2 = \mathbf{p}_i^2$ .  
С учетом (60)

$$\mathbf{E} = -\nabla A^0 = i\mathbf{q}A^0(q), \quad \text{div} \mathbf{E} = \mathbf{q}^2 A^0(q),$$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot [\mathbf{E} \times \mathbf{p}_i] = -i\boldsymbol{\sigma} \cdot [\mathbf{q} \times \mathbf{p}_i] A^0(q).$$

В итоге вершинный оператор (59) равен

$$V_1^0 = e \left( E_i + m + \frac{\boldsymbol{\sigma} \mathbf{p}_f \boldsymbol{\sigma} \mathbf{p}_i}{E_i + m} \right). \quad (61)$$

Свободные решения уравнения Клейна–Гордона и уравнений (32), (33) в виде плоских волн в непрерывном спектре записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} e^{-ipx} \Phi_s, \\ X &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} e^{ipx} X_s. \end{aligned} \quad (62)$$

В (62)  $E_p = \sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}$ ;  $\Phi_s, X_s$  — нормированные спиновые функции Паули.

В результате амплитуду перехода для рассеяния электрона в кулоновском поле можно записать в виде

$$\begin{aligned} S_{fi} &= -i \int d^4x \Phi^+(x, p_f, s_f) V_1^0 A^0(x) \Phi(x, p_i, s_i) = \\ &= -\frac{i\delta(E_f - E_i)}{(2\pi)^2} \Phi_{s_f}^+ \langle \mathbf{p}_f | V_1^0 A^0 | \mathbf{p}_i \rangle \Phi_{s_i} = \\ &= -i \frac{Ze^2}{\mathbf{q}^2} \frac{\delta(E_f - E_i)}{(2\pi)^2} \Phi_{s_f}^+ \frac{1}{2E_i} \times \\ &\times \left( E_i + m + \frac{1}{E_i + m} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{p}_f \boldsymbol{\sigma} \mathbf{p}_i \right) \Phi_{s_i}. \end{aligned} \quad (63)$$

Амплитуда (63) совпадает с соответствующей амплитудой  $S_{fi}$ , ранее вычисленной в работе [14] для представления Фолди–Ваутхайзена.

Далее обычными методами с помощью матричного элемента  $S_{fi}$  можно получить дифференциальное сечение рассеяния Мотта, переходящее в нерелятивистском случае в сечение Резерфорда (см., например, [7]).

Таким образом, мы показали, что в низшем порядке теории возмущений ( $\sim e^4$ ) наличие непроницаемого барьера (52) не влияет на величину сечения кулоновского рассеяния электронов. Для выводов о величине радиационных поправок к сечению рассеяния необходимы соответствующие расчеты диаграмм высших порядков теории возмущений.

### 6.3. Позитронный конфайнмент в сверхкритических ядрах

Для позитронов непроницаемый барьер (52) существует в случае кулоновского поля атомных ядер  $-eA^0(r) = Ze^2/r$ . Для полностью ионизованных

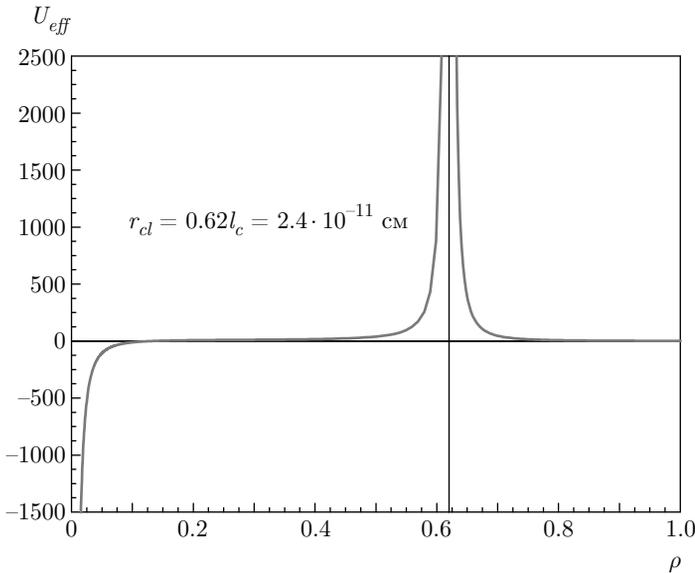


Рис. 4. Зависимость  $U_{eff}(\rho)$  при движении позитрона в кулоновском поле отталкивания с  $Z_{scr} = 170$

стабильных атомов диапазон изменения  $Z$  в (51) составляет от  $Z = 1$  (ядро атома водорода) до  $Z = 92$  (ядро  $U^{238}$ ). Для покоящегося в системе центра масс позитрона согласно (51) радиус барьера (52) изменяется от  $1.4 \cdot 10^{-13}$  см ( $Z = 1$ ) до  $1.3 \cdot 10^{-11}$  см ( $Z = 92$ ). При дальнейшем гипотетическом увеличении  $Z$  до  $Z = Z_{scr} \approx 170$  энергетический уровень основного состояния электрона в кулоновском поле ядра достигает верхней границы нижнего континуума  $E = -m_e c^2$ . Тогда в случае незапятнанных электронами  $S$ -состояний на  $K$ -оболочке происходит спонтанное рождение двух электрон-позитронных пар [8–10]. Электроны занимают свободную  $K$ -оболочку, заряд атома уменьшается на две единицы, а позитроны уходят из атомной системы, где, в принципе, могут быть зарегистрированы.

Однако при наличии непроницаемого барьера (52) возможен вариант позитронного конфайнмента. Родившиеся позитроны будут находиться внутри непроницаемого барьера с  $r = r_{cl}$  (см. рис. 4). В дальнейшем позитроны аннигилируют с электронами  $K$ -оболочки с испусканием  $\gamma$ -квантов, и система возвратится в исходное состояние с  $Z = Z_{scr}$  с дальнейшим повторением событий. Для внешнего мира источником информации о процессах в атомной системе с  $Z = Z_{scr}$  будет источник  $\gamma$ -квантов аннигиляции электронов с позитронами.

## 7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для квантовомеханического описания движения фермионов во внешнем кулоновском поле полу-

ны самосопряженные уравнения второго порядка со спинорными волновыми функциями. Для стационарных состояний уравнения характеризуются разделенными состояниями с положительной и отрицательной энергиями, что приводит к возможности вероятностной интерпретации. Для кулоновского поля притяжения энергетический спектр уравнения второго порядка совпадает со спектром уравнения Дирака. Плотности вероятности состояний уравнения второго порядка несколько отличаются от плотностей вероятности состояний уравнения Дирака. Это отличие возрастает с увеличением порядкового номера  $Z$ .

При использовании уравнения второго порядка для кулоновского поля отталкивания существует непроницаемый потенциальный барьер, радиус которого зависит от классического радиуса электрона и от энергии электрона:

$$r_{cl} = \frac{Ze^2}{mc^2} \frac{1}{1 + (E/mc^2)}.$$

Существование непроницаемого барьера не противоречит экспериментальным данным по зондированию внутренней структуры электрона и не влияет в низшем порядке теории возмущений ( $\sim e^4$ ) на сечение кулоновского рассеяния электронов.

Наличие непроницаемого барьера может приводить к конфайнменту позитронов в сверхкритических ядрах с  $Z \gtrsim 170$  при реализации спонтанного испускания вакуумом электрон-позитронных пар.

Существование непроницаемого барьера опосредованно выявляет связь спина и заряда элементарных частиц. Действительно, для бесспиновых частиц и при разноименных знаках заряда спиновой частицы и кулоновского потенциала непроницаемый барьер отсутствует; при одноименных знаках заряда спиновой частицы и кулоновского потенциала непроницаемый барьер присутствует. Расположение барьера изменяется с изменением энергии частицы. Будущие модели внутренней структуры лептонов должны количественно описывать установленную выше качественную связь спина и заряда частиц.

Использование самосопряженных уравнений второго порядка со спинорными волновыми функциями уже привело к новым физическим результатам.

Во внешних гравитационных и электромагнитных полях Шварцшильда, Райсснера – Нордстрёма, Керра, Керра – Ньюмена получены регулярные стационарные решения уравнений второго порядка с

квадратично-интегрируемыми спинорными волновыми функциями [3–5]. Для уравнения Дирака эти решения являются нерегулярными и квадратично-неинтегрируемыми.

Наши исследования показали, что использование самосопряженных уравнений второго порядка со спинорными волновыми функциями позволяет расширить возможности получения регулярных решений квантовой механики во внешних гравитационных и электромагнитных полях. При этом решения уравнений второго порядка в плоском пространстве-времени не противоречат на данном этапе исследований существующим экспериментальным данным.

**Благодарности.** Авторы благодарят за плодотворные дискуссии Г. М. Тер-Акопяна, К. О. Владова, М. В. Горбатенко, В. А. Жмайло, А. И. Мильштейна, В. Е. Шемарулина. Авторы благодарят А. Л. Новоселову за существенную техническую помощь в подготовке статьи.

**ПРИЛОЖЕНИЕ**

**Преобразование Прюфера и граничные условия**

Для численного решения уравнений (39), (40) мы использовали преобразование Прюфера [20–23].

В качестве примера рассмотрим уравнение (39).

Для функции  $f(r) = rF(r)$  уравнение (39) имеет вид

$$\frac{d^2 f(r)}{dr^2} + 2(E_{Schr} - U_{eff}^F(r)) f(r) = 0. \quad (A.1)$$

Пусть

$$\begin{aligned} f(r) &= P(r) \sin \Phi(r), \\ \frac{df(r)}{dr} &= P(r) \cos \Phi(r). \end{aligned} \quad (A.2)$$

Тогда

$$\frac{f(r)}{df(r)/dr} = \text{tg } \Phi(r) \quad (A.3)$$

и уравнение (A.1) можно записать в виде системы нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{d\Phi}{dr} = \cos^2 \Phi + 2(E_{Schr} - U_{eff}^F) \sin^2 \Phi, \quad (A.4)$$

$$\frac{d \ln P}{dr} = (1 - 2(E_{Schr} - U_{eff}^F)) \sin \Phi \cos \Phi. \quad (A.5)$$

Отметим, что уравнение (A.5) должно решаться после определения из уравнения (A.4) собственных значений  $\varepsilon_n$  и собственных функций  $\Phi_n(r)$ .

Для связанных состояний при  $r \rightarrow \infty$  получаем

$$\begin{aligned} \text{tg } \Phi|_{r \rightarrow \infty} &= -\frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}, \\ \Phi|_{r \rightarrow \infty} &= -\text{arctg } \frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} + k\pi. \end{aligned} \quad (A.6)$$

Для экспоненциально растущих решений при  $r \rightarrow \infty$  имеем

$$\begin{aligned} \text{tg } \Phi|_{r \rightarrow \infty} &= \frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}, \\ \Phi|_{r \rightarrow \infty} &= \text{arctg } \frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} + k\pi. \end{aligned} \quad (A.7)$$

В выражениях (A.6), (A.7)  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Численный метод решения уравнений типа (A.4), (A.5) с асимптотиками (A.6), (A.7) подробно изложен в работах [3–5, 27].

**ЛИТЕРАТУРА**

1. P. A. M. Dirac, *The Principles of Quantum Mechanics*, Clarendon Press (1958).
2. В. П. Незнамов, Теор. матем. физика **197**, 493 (2018).
3. В. П. Незнамов, И. И. Сафронов, ЖЭТФ **154**, 761 (2018).
4. В. П. Незнамов, И. И. Сафронов, В. Е. Шемарулин, ЖЭТФ **154**, 802 (2018).
5. В. П. Незнамов, И. И. Сафронов, В. Е. Шемарулин, ЖЭТФ **155**, 69 (2019).
6. L. L. Foldy and S. A. Wouthuysen, Phys. Rev. **78**, 29 (1950).
7. Д. Д. Бьеркен, С. Д. Дрелл, *Релятивистская квантовая теория*, т. 1, Наука, Москва (1978).
8. I. Ya. Pomeranchuk and Ya. A. Smorodinsky, J. Phys. USSR **9**, 97 (1945).
9. W. Pieper and W. Griener, Zs. Phys. **218**, 327 (1969).
10. Я. Б. Зельдович, В. С. Попов, УФН **105**, 403 (1971) [Ya. B. Zeldovich and V. S. Popov, Sov. Phys. Usp. **14**, 673 (1972)].
11. А. С. Давыдов, *Квантовая механика*, Физматлит, Москва (1973).
12. К. М. Case, Phys. Rev. **95**, 1323 (1954).

13. V. P. Neznamov and A. J. Silenko, *J. Math. Phys.* **50**, 122302 (2009); arXiv:0906.2069 (math-ph).
14. В. П. Незнамов, *ЭЧАЯ* **37**(1), 152 (2006).
15. В. П. Незнамов, *ЭЧАЯ* **43**(1), 33 (2012).
16. В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Квантовая электродинамика*, Физматлит, Москва (2006).
17. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика. Нерелятивистская теория*, Физматгиз, Москва (1963).
18. В. L. Voronov, D. M. Gitman, and I. V. Tyutin, *Theor. Math. Phys.* **150**(1), 34 (2007).
19. D. M. Gitman, I. V. Tyutin, and V. L. Voronov, *Self-adjoint Extensions in Quantum Mechanics*, Springer Science&Business Media, New York (2012).
20. H. Pruefer, *Math. Ann.* **95**, 499 (1926).
21. I. Ulehla and M. Haviček, *Appl. Math.* **25**, 358 (1980).
22. I. Ulehla, M. Haviček, and J. Hořejší, *Phys. Lett. A* **82**, 64 (1981).
23. I. Ulehla, Rutherford Laboratory preprint RL-82-095 (1982).
24. Г. Бете, Э. Солпитер, *Квантовая механика атомов с одним и двумя электронами*, Физматгиз, Москва (1960).
25. J. Dittrich and P. Exner, *J. Math. Phys.* **26**, 2000 (1985).
26. G. Gabrielse, D. Hanneke, T. Kinoshita, M. Noi, and V. Odom, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 030802 (2006).
27. В. П. Незнамов, И. И. Сафронов, В. Е. Шемарулин, *ВАНТ, сер. Теоретическая и прикладная физика*, вып. 1, 63 (2018).