

ДИНАМИКА ДВУХАТОМНОЙ МОЛЕКУЛЫ В ЛОВУШКЕ

Н. Н. Розанов^{a,b,c}, Н. В. Высотина^a*

^a *Государственный оптический институт им. С. И. Вавилова
199053, Санкт-Петербург, Россия*

^b *Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет
информационных технологий, механики и оптики
197101, Санкт-Петербург, Россия*

^c *Физико-технический институт им. А. Ф. Иоффе Российской академии наук
194021, Санкт-Петербург, Россия*

Поступила в редакцию 28 декабря 2018 г.,
после переработки 27 января 2019 г.
Принята к публикации 29 января 2019 г.

Проведен теоретический и численный анализ динамики двухатомной молекулы, обладающей поступательной, вращательной и колебательной степенями свободы, в ловушке. Взаимодействие атомов в молекуле описывается потенциалом Леннарда-Джонса, а атомов со стенками ловушки — отталкивательным потенциалом экспоненциального типа. Вдали от стенок ловушки движение молекулы сводится к классической задаче двух тел с центральным взаимодействием и является регулярным. Найдено, что сколь-либо интенсивное взаимодействие атомов молекулы со стенками ловушки ведет к стохастизации движения.

DOI: 10.1134/S0044451019060038

1. ВВЕДЕНИЕ

Изучение примыкающей к проблеме Ферми [1] задачи Улама о динамике классической частицы в ловушке с осциллирующими стенками [2] оказало глубокое влияние на прояснение основ статистической физики и на развитие имеющей разнообразные приложения теории динамического хаоса [3–6]. В указанных работах представлены результаты как прямого численного моделирования, так и аналитического рассмотрения, в том числе в рамках приближенного подхода на основе уравнения диффузии [6].

Тем не менее это направление включает и новые задачи, в том числе в случае замены точечной частицы более сложным объектом, обладающим внутренней структурой и дополнительными степенями свободы. В работе [7] было изучено движение между осциллирующими стенками обладающего пространственной распределенностью солитона конденсата Бозе–Эйнштейна. В то же время естественно обращение к более простому объекту — системе двух взаимодействующих классических частиц, модели-

рующей двухатомную молекулу, что и служит задачей настоящего сообщения. Классическое описание движения ядер молекулы [8] широко распространено и оправдано ввиду значительной массы ядер по сравнению с массой электрона. Необходимость учета квантовых эффектов возникает главным образом при экстремально низких энергиях колебаний, сравнимых с энергией кванта колебаний, но эта область энергий исключается из рассмотрения в данной статье.

Представляется, что исследование спектроскопии и внутреннего движения изолированных молекул становится сейчас актуальным в связи с прогрессом в разработке ловушек и методов охлаждения для таких объектов [9–13] и возможностями наблюдать внутренние молекулярные движения с помощью предельно коротких (аттосекундных) импульсов [14–17]. Особый интерес представляет присутствие двух- и многочастичным системам наличие относительных колебаний около положения равновесия. Это допускает возможность достижения, например, режима динамического хаоса даже при неподвижных стенках ловушки. Другой особенностью таких систем по сравнению с одиночной частицей служит появление канала диссоциации — развала системы на отдельные частицы. Подход с неко-

* E-mail: nnrosanov@mail.ru

торыми модификациями применим и к управлению движением наночастиц в ловушке [18, 19].

2. МОДЕЛЬ И УРАВНЕНИЯ

Решались уравнения для двухатомной молекулы с массами атомов m_1, m_2 , движущейся между двумя неподвижными стенками $L_l < z < L_r$:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 &= -\frac{dU_v}{dr} \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{r} - \frac{dU_{w1}}{dz} \mathbf{e}_z, \\ m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 &= -\frac{dU_v}{dr} \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{r} - \frac{dU_{w2}}{dz} \mathbf{e}_z. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $\mathbf{r}_1 = (y_1, z_1)$, $\mathbf{r}_2 = (y_2, z_2)$ — радиус-векторы атомов, $r = |\mathbf{r}|$ — расстояние между атомами и $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$. Энергия взаимодействия атомов со стенками (отталкивание от стенок) описывалась уравнениями

$$\begin{aligned} U_w(z) &= U_0 \left[\exp\left(\frac{z - L_r}{w}\right) + \exp\left(\frac{L_l - z}{w}\right) \right], \\ &L_l < z < L_r, \\ U_w(z) &= U_0 \left[1 + \exp\left(\frac{L_l - L_r}{w}\right) \right] \approx U_0, \\ &z < L_l, \quad \text{или} \quad z > L_r, \end{aligned} \quad (2)$$

где w — характерная протяженность области отталкивания, U_0 — максимальный потенциал. Энергия сжатия–растяжения молекулы описывалась потенциалом Леннард-Джонса [20]

$$U_v(r) = 4\varepsilon \left[\left(\frac{\sigma}{r}\right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{r}\right)^6 \right]. \quad (3)$$

Здесь параметр ε характеризует минимальную потенциальную энергию ($\min U_v(r) = -\varepsilon$), а σ — равновесное расстояние между атомами, отвечающее этому минимуму (точнее, это расстояние равно $2^{1/6}\sigma$).

3. СВОБОДНАЯ МОЛЕКУЛА

Движение двухатомной молекулы, не взаимодействующей со стенками ловушки, описывается классической задачей двух тел [8]. Сохраняющиеся импульс \mathbf{P} , энергия E и момент импульса \mathbf{M} имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = m_1 \dot{\mathbf{r}}_1 + m_2 \dot{\mathbf{r}}_2, \\ E &= \frac{1}{2} m_1 \dot{\mathbf{r}}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\mathbf{r}}_2^2 + U(r), \\ \mathbf{M} &= [\mathbf{r}_1 \times \mathbf{p}_1] + [\mathbf{r}_2 \times \mathbf{p}_2]. \end{aligned} \quad (4)$$

В системе координат, связанной с центром инерции

$$\mathbf{r}_c = \frac{\mathbf{r}_1 m_1 + \mathbf{r}_2 m_2}{m_1 + m_2},$$

имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'_1 &= \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_c = \frac{m}{m_1} \mathbf{r}, \quad \mathbf{r}'_2 = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_c = -\frac{m}{m_2} \mathbf{r}, \\ \mathbf{P}' &= m_1 \dot{\mathbf{r}}'_1 + m_2 \dot{\mathbf{r}}'_2 = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

$$E' = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2 + U(r), \quad \mathbf{M}' = [\mathbf{r} \times \mathbf{p}]. \quad (6)$$

Здесь $\mathbf{p} = m \dot{\mathbf{r}}$ и $m = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ — приведенная масса. Штрихи далее опускаем.

Движение происходит в плоскости, ортогональной моменту импульса \mathbf{M} . С учетом его сохранения энергию молекулы можно представить в виде

$$E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + U_{eff}(r), \quad (7)$$

где введена эффективная энергия взаимодействия атомов

$$\begin{aligned} U_{eff}(r) &= U_v(r) + \frac{M^2}{2mr^2} = \\ &= 4\varepsilon \left[\left(\frac{\sigma}{r}\right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{r}\right)^6 \right] + \frac{M^2}{2mr^2}. \end{aligned} \quad (8)$$

После введения безразмерных координаты $\rho = r/\sigma$ и параметра $\mu = M^2/\varepsilon m \sigma^2$ эта зависимость записывается в виде

$$\frac{U_{eff}(\rho)}{\varepsilon} = 4(\rho^{-12} - \rho^{-6}) + \frac{\mu}{2} \rho^{-2}. \quad (9)$$

В точках экстремумов

$$\begin{aligned} \mu &= -48\rho^{-10} + 24\rho^{-4}, \\ \frac{U_{eff}(\rho)}{\varepsilon} &= -20\rho^{-12} + 8\rho^{-6}. \end{aligned} \quad (10)$$

Функция $\mu(\rho)$ положительна при $\rho > 2^{1/6} \approx 1.122$ и имеет единственный максимум при $\rho = 5^{1/6} \approx 1.308$. В интервалах $2^{1/6} < \rho < 5^{1/6}$ и $5^{1/6} < \rho < \infty$ связь между μ и ρ взаимно однозначная. При этом интервал $2^{1/6} < \rho < 5^{1/6}$ соответствует минимальным значениям эффективной энергии, а интервал $5^{1/6} < \rho < \infty$ — максимальным.

В точках экстремумов U_{eff} монотонно растет с возрастанием μ , причем $\max \mu = \mu_{cr} = 14.4 \cdot 5^{-2/3} \approx 4.925$ и $\max(U_{eff}/\varepsilon) = 0.8$ (рис. 1). Вычисленные максимальные значения μ_{cr} и $\max(U_{eff})$ не зависят от соотношения масс атомов в молекуле, в отличие от значения момента импульса.

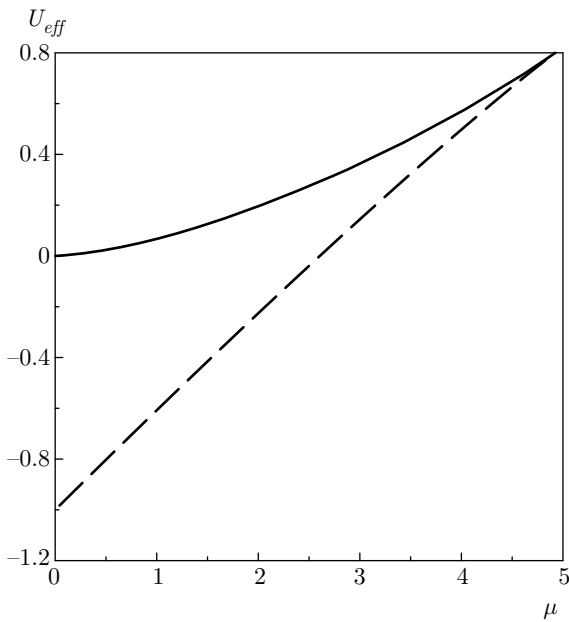


Рис. 1. Зависимости от μ эффективной потенциальной энергии U_{eff} в точках экстремумов. Сплошная кривая соответствует максимумам эффективной энергии (точки поворота, где $\dot{\rho} = 0$), штриховая линия — минимумам эффективной энергии (максимальные значения $\dot{\rho}$)

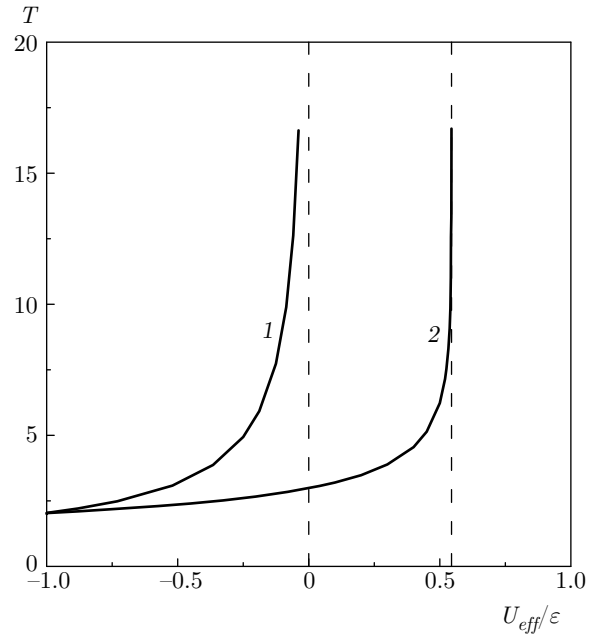


Рис. 3. Зависимости периода колебаний свободной молекулы от степени ее возбуждения. В начальный момент молекула находится в равновесном состоянии. Кривая 1 — молекула возбуждается за счет увеличения U_v , вращательный момент равен нулю, молекула разрывается при $U_{eff} = 0$; кривая 2 — молекула возбуждается за счет увеличения ее вращательного момента, разрыв молекулы происходит при $\mu \approx 3.89$, $U_{eff} \approx 0.5447\epsilon$

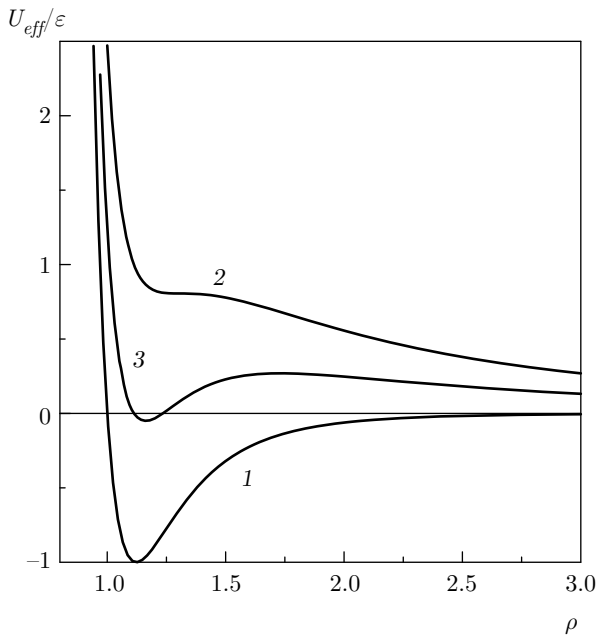


Рис. 2. Эффективная потенциальная энергия в зависимости от расстояния между атомами $\rho = r/\sigma$ при нулевом моменте импульса, $\mu = 0$ (1), критическом значении μ_{cr} (2) и промежуточном значении $\mu_{cr}/2$ (3)

Зависимость эффективной потенциальной энергии от расстояния между атомами при $\mu > \mu_{cr}$ не обладает минимумом (рис. 2, кривая 2). Тогда молекула неизбежно распадается (диссоциирует) на два атома. Если же μ меньше критического значения, то молекула разрывается, когда ее полная энергия становится больше значения U_{eff} в точке максимума, а при меньших энергиях молекула колеблется с периодом T , возрастающим до бесконечности с ростом ее полной энергии до значения U_{eff} в точке максимума. В частности, при нулевом моменте импульса ($M = 0$) диссоциация происходит при энергии молекулы, большей нуля (в системе центра инерции, рис. 3, кривая 1).

Для расчетов динамики удобно перейти к безразмерной координате $z' = z/\sigma$, безразмерному времени

$$\tau = t \sqrt{\frac{24\epsilon}{(m_1 + m_2)\sigma^2}}$$

и безразмерным параметрам

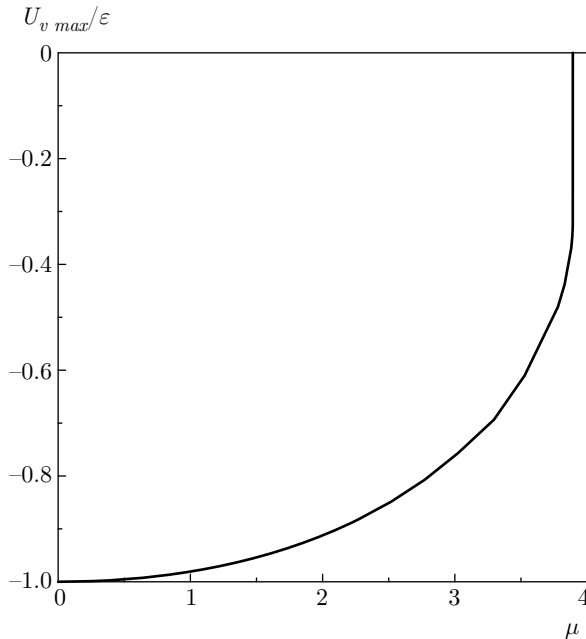


Рис. 4. Максимальное количество колебательной энергии, перекачавшейся из вращательной, в зависимости от μ

$$w' = \frac{w}{\sigma}, \quad L' = \frac{L}{\sigma}, \quad C = \frac{U_0}{24\varepsilon}, \quad (11)$$

$$m'_{1,2} = \frac{m_{1,2}}{m_1 + m_2}.$$

Теперь уравнения движения Ньютона примут вид

$$m'_1 \ddot{\rho}_1 = \left(\frac{2}{\rho^{13}} - \frac{1}{\rho^7} \right) \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho} - \frac{C}{w'} \left[\exp\left(\frac{z'_1 - L'_r}{w'} \right) - \exp\left(\frac{L'_l - z'_1}{w'} \right) \right] \mathbf{e}_z, \quad (12)$$

$$m'_2 \ddot{\rho}_2 = \left(\frac{2}{\rho^{13}} - \frac{1}{\rho^7} \right) \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho} - \frac{C}{w'} \left[\exp\left(\frac{z'_2 - L'_r}{w'} \right) - \exp\left(\frac{L'_l - z'_2}{w'} \right) \right] \mathbf{e}_z.$$

При этом безразмерные выражения для потенциала Леннард-Джонса, энергии взаимодействия молекулы со стенками и кинетической энергии выразятся соответственно следующим образом:

$$U'_{LJ}(\rho) = \frac{U_{LJ}(\rho)}{\varepsilon} = 4 \left(\frac{1}{\rho^{12}} - \frac{1}{\rho^6} \right),$$

$$U'_w(z') = \frac{U_w(z')}{\varepsilon} = 24C \times \left[\exp\left(\frac{z' - L'}{w'} \right) + \exp\left(-\frac{z'}{w'} \right) \right], \quad (13)$$

$$E_t = 12 (m'_1 \mathbf{V}'^2_1 + m'_2 \mathbf{V}'^2_2).$$

Следующие рисунки получены численным решением уравнений (12). Перераспределение энер-

гии между вращательной энергией и колебательной иллюстрируют рис. 4 и 5. В начальный момент молекула находится в равновесном состоянии ($U_v = U_{v \min} = -\varepsilon$). Ей сообщается вращательный момент, которому соответствует параметр μ . Видно, что динамика оказывается периодической и при возрастании вращательной энергии перекачка в колебательную энергию непрерывно увеличивается.

4. СТОЛКНОВЕНИЯ СО СТЕНКАМИ

Поскольку, согласно (1) и (2), сила взаимодействия со стенками имеет только продольную составляющую (вдоль оси z), из-за наличия стенок сохраняются постоянными поперечные компоненты импульса молекулы и продольная составляющая момента импульса. Ввиду этого без потери общности можно считать, что поперечный импульс молекулы $\mathbf{P}_\perp = (p_x, p_y) = 0$. Продольная составляющая импульса, естественно, при столкновениях со стенками меняется. С учетом потенциальной энергии взаимодействия молекулы со стенками неизменной остается общая энергия.

Вообще говоря, потенциал взаимодействия со стенками U'_w имеет минимум посередине ловушки, при $z' = L'/2$. Поэтому локализация молекулы около этого положения устойчива, а малые отклонения от него вызывают лишь малоамплитудные гармонические осцилляции. Однако мы будем считать, что длина ловушки значительно превышает «ширину» стенок w и размер молекулы r_0 . Поэтому минимум потенциала очень широкий и уже при небольших энергиях поступательного движения молекула удаляется от минимума на значительные расстояния, сталкиваясь со стенками. Именно при таких условиях, когда можно пренебречь наличием минимума потенциала U'_w , и будет проводиться дальнейшее рассмотрение.

Основные расчеты проводились при следующих параметрах: расстояние между стенками $L'_r - L'_l = 100$, $C = 0.1$, $w' = r_0$, где $r_0 = 2^{1/6}$ — безразмерное равновесное расстояние между атомами.

Столкновения со стенками молекулы с ненулевой продольной составляющей импульса приводят к перераспределению энергии между поступательной, вращательной и колебательной степенями свободы. Это перераспределение критически зависит от «размазанности» стенок — параметра w . Как показывает рис. 6, по мере увеличения параметра w доля энергии, перекачанной в результате столкновений в колебательную и вращательную, уменьшается, при-

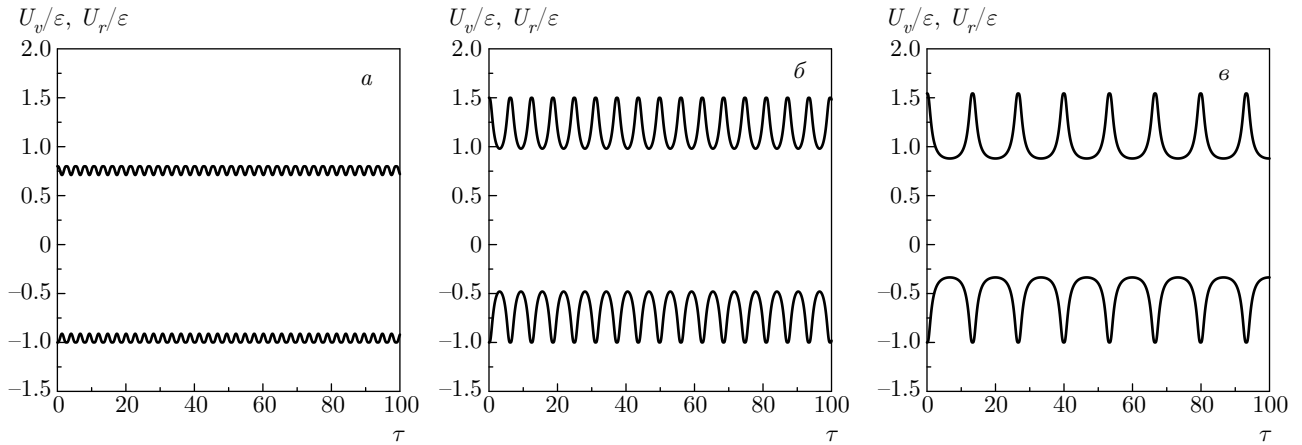


Рис. 5. Колебательная (нижние кривые) и вращательная (верхние кривые) энергии молекулы. а) $\mu \approx 2$, перекачка энергии незначительна, колебательная энергия минимальна; б) $\mu \approx 3$, перекачка энергии более выражена; в) $\mu \approx 3.89$, перекачка энергий приближается к максимально возможной без разрыва молекулы

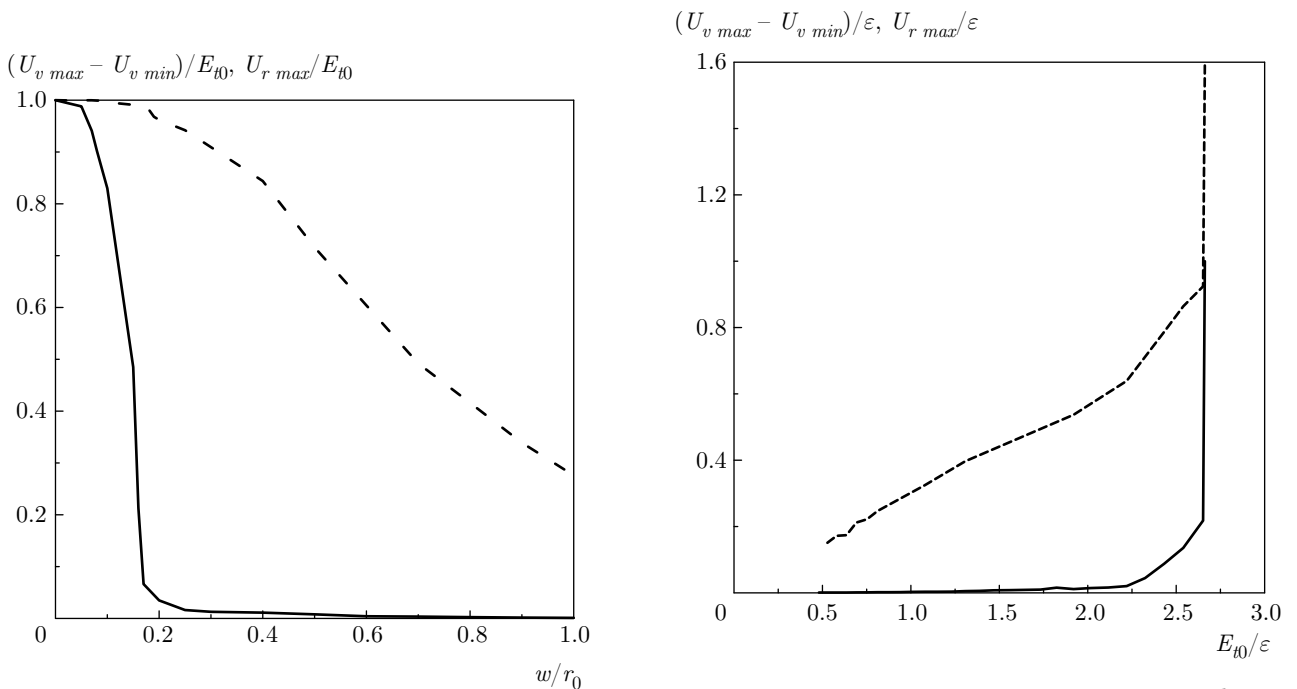


Рис. 6. Доля исходной поступательной энергии, перекачавшаяся в колебательную энергию $(U_{v \max} - U_{v \min})/E_{t0}$ (сплошная линия) и во вращательную энергию $U_{r \max}/E_{t0}$ (штриховая линия) в зависимости от «толщины» стенки w . В начальный момент молекула находится в центре ловушки в равновесном состоянии и имеет только кинетическую энергию поступательного движения $E_{t0} = 0.48\epsilon$, $m_1 = m_2$. Ось молекулы наклонена к оси z под углом $\varphi = 0.6\pi$. Перекачка энергии происходит в результате столкновений молекулы со стенками. Время расчета $\tau_{\max} = 2 \cdot 10^6$

Рис. 7. Количество энергии, перекачавшееся в колебательную энергию $(U_{v \max} - U_{v \min})/\epsilon$ (сплошная кривая) и во вращательную энергию $U_{r \max}/\epsilon$ (штриховая линия) в зависимости от исходной энергии поступательного движения при $w = 1$. В начальный момент молекула имеет только энергию поступательного движения, $m_1 = m_2$, ось молекулы наклонена к оси z под углом $\varphi = 0.6\pi$

чем для колебательной энергии это уменьшение выражено более резко.

Как видно из рис. 6, при $w \approx r_0$ в результате столкновения со стенками перекачка энергии

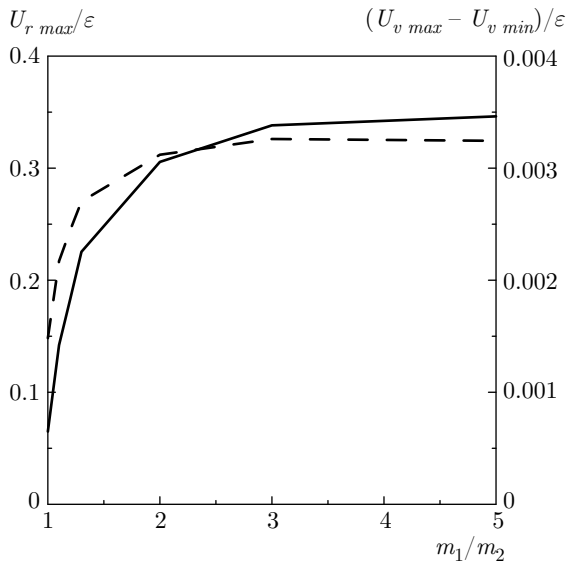


Рис. 8. Количество энергии, перекачанное в колебательную энергию $(U_{v\ max} - U_{v\ min})/\epsilon$ (сплошная кривая) и во вращательную энергию $U_{r\ max}/\epsilon$ (штриховая линия) в зависимости от отношения масс атомов, составляющих молекулу; $w = 1, E_{t0} = 0.48\epsilon, U_{v\ min} = -\epsilon$

в колебательную незначительна, заметная перекачка происходит только во вращательную энергию. В соответствии с рис. 4 при $U_r = 0.48\epsilon$ из вращательной энергии в колебательную преобразуется приблизительно 5.8% энергии. Таким образом, при $w \approx r_0$ разрыв молекулы может происходить лишь при значениях энергии, заметно превышающих энергию разрыва ϵ . При $w \ll r_0$ перекачка энергии в колебательную происходит непосредственно за счет столкновения со стенкой и может приближаться к 100%.

Из рис. 7 видно, что при $w = 1$ разрыв молекулы происходит тогда, когда вращательная энергия достигает критического значения $U_r \approx 1.544\epsilon$, т. е. разрыв происходит в результате вращения, а непосредственной перекачки энергии в колебательную в результате столкновения со стенкой практически не происходит. Асимметрия молекулы увеличивает перекачку энергий (рис. 8).

Как указывалось выше, мы не будем затрагивать область чрезвычайно низких поступательных энергий, при которых мог бы реализоваться режим малых осцилляций вблизи середины ловушки. При больших энергиях все периодические режимы оказываются неустойчивыми. Примеры установившегося изменения энергетических характеристик приведены на рис. 9. Горизонтальные участки отвечают движению в ловушке вдали от стенок. Виден хаотический

Таблица

V	λ	
	$w = 1$	$w = 0.1$
0.1	0.0025	0.0036
0.2	0.0055	0.0129
0.3	0.0077	
0.4	0.0108	

характер движения, причем из сравнения рис. 9а и 9б следует, что для более жесткой стенки перекачка в колебательную энергию увеличивается.

Хаотический характер движения молекулы подтверждается вычислением показателя Ляпунова — скорости разбегания исходно близких траекторий [3]:

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty, R_0 \rightarrow 0} \frac{1}{t} \ln \frac{R(t)}{R_0}. \tag{14}$$

Здесь

$$R(t) = \left((z_{11}(t) - z_{10}(t))^2 + (y_{11}(t) - y_{10}(t))^2 + \dots \dots + (\dot{y}_{21}(t) - \dot{y}_{20}(t))^2 \right)^{1/2} \tag{15}$$

— текущее расстояние между «невозмущенной» (последний индекс «0») и «возмущенной» (индекс «1») траекториями, а R_0 — его начальное значение. Результаты расчетов показателя Ляпунова представлены в таблице. В расчетах $R_0 = 10^{-3}, 10^{-4}, m_1/m_2 = 1, 2, w = r_0, V$ — начальная скорость поступательного движения (центра инерции молекулы), угол наклона оси молекулы по отношению к направлению поступательного движения (оси z) равен 0.6π . Во всех приведенных случаях показатель Ляпунова положителен: $\lambda > 0$. Нетрудно заметить, что степень хаотичности (λ) возрастает при увеличении исходной поступательной энергии и жесткости стенок (уменьшении w).

Наконец, вернемся к указанному выше обстоятельству о регулярной динамике системы при весьма малых значениях поступательной энергии молекулы. В отсутствие взаимодействия молекулы со стенками задача сводится к проблеме двух тел, так что является интегрируемой (см. выше). Согласно теореме Колмогорова — Арнольда — Мозера [21], достаточно малые возмущения не могут изменить характер такого квазипериодического движения, за исключением множества траекторий меры нуль в

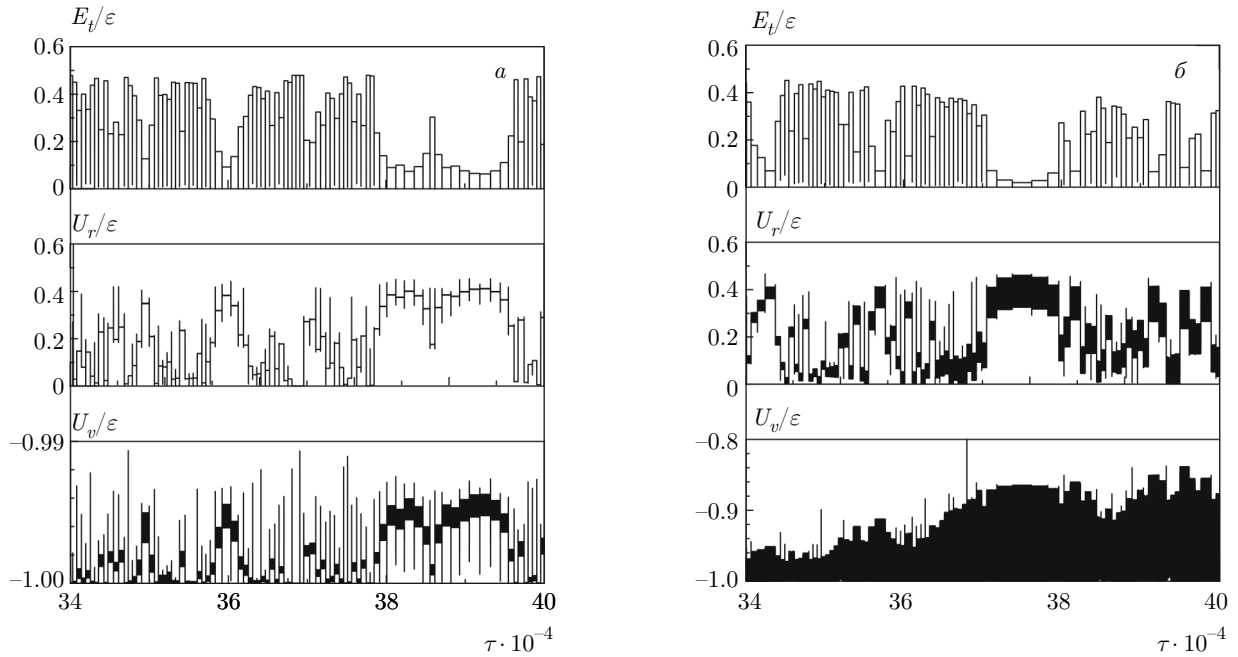


Рис. 9. Зависимости от времени поступательной, вращательной и колебательной энергий при разных значениях w : $w = 0.19r_0$ (а), $0.11r_0$ (б). В начальный момент молекула имела только энергию поступательного движения $E_{t0} = 0.48\epsilon$, $m_1 = m_2$. Перекачка энергий происходит в результате столкновений молекулы со стенками

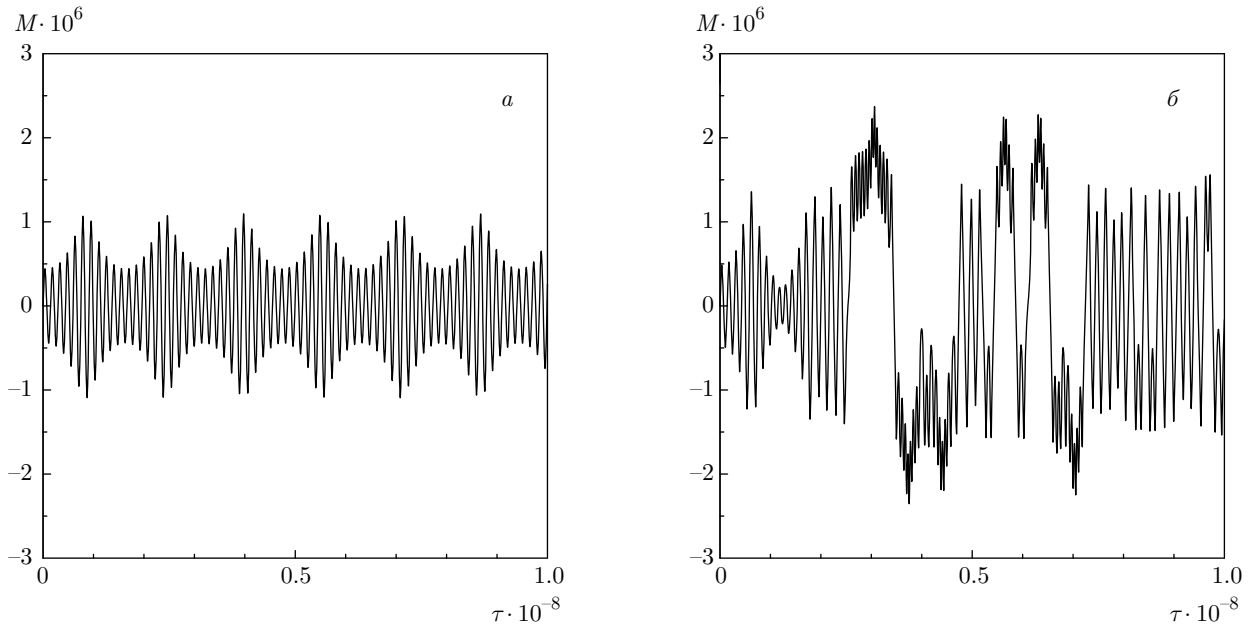


Рис. 10. Регулярная (а) и хаотическая (б) динамика углового момента M в зависимости от времени τ при начальной поступательной энергии молекулы $E_{t0} = 10^{-19}\epsilon$ (а), $10^{-18}\epsilon$ (б); расстояние между стенками ловушки $L'_r - L'_l = 50$

фазовом пространстве, так что хаотические режимы в этом случае исключены. Однако эта теорема не отвечает на вопрос о численном значении пороговой

энергии поступательного движения, т. е. границы между квазипериодическим и хаотическим режимами. Качественно такую оценку в рассматриваемом

мом здесь случае можно провести следующим образом. В центре ловушки имеется весьма пологий минимум потенциальной энергии, вызванной воздействием удаленных стенок. При этом минимальной энергией будет обладать молекула, ориентированная ортогонально оси ловушки и покоящаяся точно в ее центре. Придание молекуле поступательного движения вызывает ее колебания около центра с амплитудой, определяемой кинетической энергией. В согласии с представленными на рис. 10 результатами расчетов, движение остается регулярным до тех пор, пока размах колебаний не превышает нескольких размеров молекулы. Рассчитанная пороговая энергия составляет в наших условиях от 10^{-19} э до 10^{-18} э. Столь малая величина порога делает эту оценку условной, так как при этом существенными могут стать квантовые эффекты.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, учет внутренних степеней свободы объекта (по сравнению с точечным) может кардинально менять его динамику. За исключением области чрезвычайно малых кинетических энергий, для которой характерно периодическое движение, двухатомная молекула, обладающая колебательной степенью свободы, испытывает хаотическое движение уже в стационарной ловушке. В определенном смысле колебания молекулы заменяют здесь колебания стенок ловушки в классической проблеме Улама [2], сыгравшей важную роль в развитии представлений о динамическом хаосе. Развитие методов глубокого охлаждения молекул делает реальным постановку соответствующих экспериментов.

ЛИТЕРАТУРА

1. E. Fermi, Phys. Rev. **75**, 1169 (1949).
2. S. M. Ulam, in *Proc. of the Fourth Berkeley Symposium on Mathematics, Statistics, and Probability*, Vol. 3, California Univ. Press, Berkeley (1961), pp. 315–320.
3. А. Лихтенберг, М. Либерман, *Регулярная и стохастическая динамика*, Мир, Москва (1985); A. J. Lichtenberg and M. A. Lieberman, *Regular and Chaotic Dynamics*, Appl. Math. Sci., Vol. 38, Springer-Verlag, New York (1992).
4. А. Ю. Лоскутов, УФН **177**, 989 (2007).
5. Л. Д. Пустыльников, УМН **50**, 143 (1995).
6. А. С. Рошупкин, В. П. Крайнов, ЖЭТФ **114**, 37 (1998).
7. N. N. Rosanov and N. V. Vysotina, Phys. Rev. A **91**, 013622 (2015).
8. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Механика*, Наука, Москва (1988).
9. L. D. Carr, D. DeMille, R. V. Krems, and Jun Ye, New J. Phys. **11**, 055049 (2009).
10. P. Dedecker and J. Hofkens, Nature Chem. **2**, 157 (2010).
11. M. G. Raizen, Physics Today **70**, 12 (2017).
12. H. J. Williams, S. Truppe, M. Hambach et al., New J. Phys. **19**, 113035 (2017).
13. L. R. Liu, J. D. Hood, Y. Yu et al., Science **360**, 900 (2018).
14. U. Keller, Appl. Phys. B **100**, 15 (2010).
15. T. Brabec and F. Krausz, Rev. Mod. Phys. **72**, 545 (2000).
16. F. Krausz and M. Ivanov, Rev. Mod. Phys. **81**, 163 (2009).
17. В. В. Стрелков, В. Т. Платоненко, А. Ф. Стержантов, М. Ю. Рябикин, УФН **186**, 412 (2016).
18. R. Reimann, M. Doderer, E. Hebestreit et al., Phys. Rev. Lett. **121**, 033602 (2018).
19. J. Ahn, Zh. Xu, J. Bang et al., Phys. Rev. Lett. **121**, 033603 (2018).
20. J. E. Lennard-Jones, Proc. Roy. Soc. A **106**, 463 (1924).
21. Ю. Мозер, *КАМ-теория и проблемы устойчивости*, РХД, Ижевск (2001).