

КОМПАКТНЫЕ ЗВЕЗДЫ С МОДИФИЦИРОВАННЫМ УРАВНЕНИЕМ ТОЛМАНА – ОППЕНГЕЙМЕРА – ВОЛКОВА В ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ ГАУССА – БОННЕ

М. Ф. Шамир^{}, Т. Наз^{**}*

*Факультет естественных и гуманитарных наук,
Национальный университет компьютерных и инновационных наук
54000, Лазор, Пакистан*

Поступила в редакцию 4 января 2019 г.,
после переработки 17 января 2019 г.
Принята к публикации 22 января 2019 г.

(Перевод с английского)

COMPACT STARS WITH MODIFIED GAUSS–BONNET TOLMAN–OPPENHEIMER–VOLKOFF’S EQUATION

M. F. Shamir, T. Naz

В рамках модели $f(\mathcal{G})$ -гравитации с использованием модифицированного уравнения Толмана – Оппенгеймера – Волкова исследуются компактные звезды. Уравнения гидростатического равновесия рассмотрены в контексте $f(\mathcal{G})$ -гравитации. Профили плотности энергии, давления и массы звезд исследованы с помощью двух разных моделей уравнений состояния, $p = \omega\rho^{5/3}$ и $p = a(\rho - 4b)$, где ρ — плотность энергии, ω , a и b — конкретные постоянные. В модели, для которой $f(\mathcal{G}) = \alpha\mathcal{G}^2$, где α — произвольная постоянная, обсуждаются физические характеристики компактных объектов при различных значениях параметра модели α . Оказалось, что в рамках $f(\mathcal{G})$ -модели гравитации нейтронные и странные звезды следуют принятым физическим сценариям, причем полученные нами результаты согласуются с результатами, доступными в литературе.

DOI: 10.1134/S0044451019060075

1. ВВЕДЕНИЕ

Согласно последним исследованиям, явление ускоренного расширения Вселенной рассматривается как важнейший и интереснейший предмет современной космологии и астрофизики [1, 2]. Для лучшего понимания этой концепции в работах [3, 4] было введено понятие космологической постоянной. Расширение Вселенной подчиняется законам теории относительности Эйнштейна и классической динамики солнечных объектов. Однако теория относительности имеет некоторые ограничения,

поскольку она не описывает напрямую некоторые важные явления, такие как темная энергия, темная материя, начальная сингулярность, космологическое ускорение в позднюю эпоху и тот факт, что Вселенная является плоской. Теория относительно-сти описывает космологическое поведение в области слабых полей, однако для того, чтобы описать сильные поля с учетом расширения Вселенной, ее нужно немного модифицировать. В последние десятилетия появились модифицированные теории гравитации, альтернативные общей теории относительности. Считается, что из некоторых из предложенных альтернативных моделей гравитации действительно следует ускоренное расширение Вселенной. В работе [5] предполагается, что с помощью модифицированных теорий гравитации можно эффективно

^{*} E-mail: farasat.shamir@nu.edu.pk

^{**} E-mail: tayyaba.naz@nu.edu.pk

описывать загадочное поведение темной энергии и космологические явления в позднюю эпоху. Одной из простейших и хорошо известных модификаций общей теории относительности является $f(R)$ -теория гравитации, предложенная в работе [6], в этой теории скаляр Риччи R заменяется произвольной функцией $f(R)$. Модифицированные теории гравитации играют важную роль в исследовании различных аспектов эволюции Вселенной [7]. Эти теории рассматриваются как альтернативные при попытке ответить на вопрос о том, что является причиной ускоренного расширения Вселенной [8, 9].

Еще одна теория, которая в последнее время привлекает внимание ученых, — это модифицированная теория гравитации Гаусса – Бонне, также известная как $f(\mathcal{G})$ -теория гравитации [10–12]. Аппарат, используемый в $f(\mathcal{G})$ -теории гравитации, был разработан авторами работы [13], где также было показано, как с помощью этой теории можно описать такую последовательность космологических событий, как доминирование материи, переход от замедления к ускорению и, наконец, эпоху ускорения. В работе [14] исследовались ограничения эффективных с точки зрения космологии $f(\mathcal{G})$ -моделей гравитации, обусловленные солнечной системой, и было получено, что с помощью этих моделей можно описать ускоренное расширение Вселенной в позднюю эпоху. Анализ фазового пространства для эффективных $f(\mathcal{G})$ -моделей гравитации и условий их эффективности с космологической точки зрения был проведен в работе [15]. Роль слагаемого Гаусса – Бонне в объяснении фазы ускоренного расширения Вселенной в позднюю эпоху обсуждалась в работе [16].

В астрофизике компактные звезды, как правило, возникают вследствие гравитационного коллапса массивных звезд. Результат такого коллапса зависит от массы звезды. Компактными звездами являются белые карлики, нейтронные звезды и черные дыры. Физические характеристики звезд определяются соотношением между внутренним давлением и силой гравитации, в результате чего возникает состояние равновесия, известное как гидростатическое равновесие. Это явление имеет большое значение при исследовании внутренней структуры звезд. Решения для изотропных звезд в общей теории относительности описываются уравнениями Толмана – Оппенгеймера – Волкова (ТОВ) [17–19]. В работе [20] с использованием уравнений ТОВ исследовалась модель нейтронной звезды, основанная на мотивированной теорией струн гравитации Гаусса – Бонне. В ряде работ [21–29] подход ТОВ использовался для исследования внутренней структуры компактных

объектов. Уравнения ТОВ представляют собой соотношения между давлением, массой и плотностью энергии отдельных звезд. Эти уравнения показывают, как масса компактной звезды влияет на давление и плотность энергии. Для компактных звезд, в особенности для нейтронных звезд, внутреннее давление, эквивалентное гравитационному давлению, обусловлено вырождением фермионов. В соответствии с релятивистским подходом общей теории относительности, будем рассматривать систему уравнений ТОВ для случая сферически-симметричного гидростатического равновесия без вращения:

$$\frac{dp}{dr} = -G \frac{(\rho c^2 + p)(mc^2 + 4\pi r^3)}{r^2 c^4 - 2Gmc^2 r}, \quad \frac{dm}{dr} = 4\pi \rho r^2, \quad (1)$$

где p — радиальное давление, ρ — плотность энергии, а m — масса звезды, все они зависят от радиальной координаты r . Для компактной звезды на границе $r = R$ полная масса звезды равна

$$M(R) = \int_0^R 4\pi r^2 \rho dr. \quad (2)$$

Для решения этой системы важен выбор уравнений состояния (УС), определяющих связь между давлением и плотностью энергии. В работе [30] исследовались равновесные конфигурации нейтронных и кварковых звезд с различными формами УС и было получено, что максимальная масса может превышать наблюдаемые пределы. На возможность существования нейтронных звезд с высокими плотностями в центре и массами, большими, чем те, которые получаются с помощью общей теории относительности, в контексте модифицированных теорий гравитации обращалось внимание в работах [31–33].

Использование уравнений ТОВ для различных модифицированных моделей гравитации имеет большое значение для лучшего понимания и исследования природы компактных звездных структур и материи при больших плотностях [34–37]. В частности, исследование уравнений ТОВ в рамках модифицированной $f(R)$ -модели гравитации имеет очень интересные следствия [38–41]. В работе [35] исследовались модели кварковых звезд с реалистичным УС в непертурбативной $f(R)$ -модели гравитации и было получено соотношение масса–радиус. Структура нейтронной звезды исследовалась в работе [42] в рамках модели гравитации, в которой $f(R) = R + \beta R^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$, с использованием пертурбативного подхода, при этом были получены соотношения масса–радиус для шести различных параметров УС. На самом

деле наибольшее внимание уделяется исследованию компактных звезд именно в рамках модифицированных теорий гравитации, причем предметом обсуждения является целый ряд работ, имеющих отношение к нейтронным звездам [43–45]. В работе [34] в контексте расширенных теорий гравитации исследовались модифицированные уравнения ТОВ и возможное существование нейтронных звезд при сильных магнитных полях. Для этого авторы работы рассмотрели теорию Эйнштейна в обобщенном виде, а именно, с учетом инвариантного члена Гаусса–Бонне, а затем сравнили результаты с результатами, полученными в рамках $f(R)$ -теории гравитации. Недавно в работе [46] обсуждались заряженные компактные структуры в модифицированной теории гравитации Гаусса–Бонне.

В настоящей работе исследуются уравнения ТОВ в рамках $f(\mathcal{G})$ -теории гравитации. Для этого выводится полная система уравнений движения для сферически-симметричного статического пространства–времени в присутствии идеальной жидкости. В частности, рассматриваются уравнения гидростатического равновесия и исследуются профили плотности энергии, давления и массы звезд с помощью моделей с двумя различными уравнениями состояния. Кроме того, подробно обсуждаются физические характеристики компактных объектов при различных значениях параметров модели. Работа построена следующим образом. В разд. 2 приведены краткое обсуждение модифицированной $f(\mathcal{G})$ -теории гравитации, а также соответствующие полевые уравнения и фундаментальные формулировки. В разд. 3 исследуются физические характеристики нейтронных и кварковых странных звезд с использованием двух различных УС. В последнем разделе приведены заключительные замечания и результаты.

2. МОДИФИЦИРОВАННЫЕ ПОЛЕВЫЕ УРАВНЕНИЯ В $f(\mathcal{G})$ -МОДЕЛИ ГРАВИТАЦИИ

Наиболее общий вид действия для модифицированной теории гравитации Гаусса–Бонне следующий [47]:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{R}{2\kappa^2} + f(\mathcal{G}) \right] + S_m, \quad (3)$$

где R — скаляр Риччи, $\kappa^2 = 8\pi G$ — постоянная взаимодействия, а S_m — лагранжиан материи. Варьируя

действие (3) по метрическому тензору, получаем модифицированные полевые уравнения

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + 8 \left[R_{\mu\rho\nu\sigma} + R_{\rho\nu}g_{\sigma\mu} - R_{\rho\sigma}g_{\nu\mu} - R_{\mu\nu}g_{\sigma\rho} + R_{\mu\sigma}g_{\nu\rho} + \frac{R}{2}(g_{\mu\nu}g_{\sigma\rho} - g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho}) \right] \nabla^\rho \nabla^\sigma f_{\mathcal{G}} + (\mathcal{G}f_{\mathcal{G}} - f)g_{\mu\nu} = \kappa^2 T_{\mu\nu}, \quad (4)$$

где нижний индекс $\mathcal{G}$ в $f_{\mathcal{G}}$ означает производную от $f(\mathcal{G})$ по $\mathcal{G}$, а $R_{\mu\nu}$ и $R_{\mu\rho\nu\sigma}$ — тензоры Риччи и Римана, соответственно. Слагаемое Гаусса–Бонне $\mathcal{G}$ определяется как

$$\mathcal{G} = R^2 - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R_{\mu\nu\sigma\rho}R^{\mu\nu\sigma\rho}. \quad (5)$$

Выберем сигнатуру для римановой метрики в виде $(+, -, -, -)$. Введем ковариантную производную и тензор Римана как

$$\nabla_\mu V_\nu = \partial_\mu V_\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda V_\lambda$$

и

$$R_{\mu\nu\rho}^\sigma = \partial_\nu \Gamma_{\mu\rho}^\sigma - \partial_\rho \Gamma_{\mu\nu}^\sigma + \Gamma_{\mu\rho}^\omega \Gamma_{\omega\nu}^\sigma - \Gamma_{\mu\nu}^\omega \Gamma_{\omega\rho}^\sigma.$$

Рассмотрим сферически-симметричную метрику

$$ds^2 = e^{\nu(r)} dt^2 - e^{\lambda(r)} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (6)$$

где ν и λ — некоторые произвольные функции от r . Для пространства–времени (6) компоненты тензора Эйнштейна $G_{\alpha\beta}$ имеют вид

$$G_{11} = \frac{e^{\nu-\lambda}}{r^2}(\lambda' r + e^\lambda - 1), \quad G_{22} = \frac{1}{r^2}(\nu' r - e^\lambda + 1), \quad (7)$$

$$G_{33} = \frac{r e^{-\lambda}}{4}(-\nu' \lambda' r + \nu'^2 r + 2\nu'' r - 2\lambda' + 2\nu'), \quad (8)$$

где «'» обозначает радиальную производную. Используя уравнения (4), (7) и (8), запишем tt - и rr -компоненты полевых уравнений в виде

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r^2}(\lambda' r + e^\lambda - 1) - 8e^{-\lambda}(f_{\mathcal{G}\mathcal{G}\mathcal{G}}\mathcal{G}'^2 + f_{\mathcal{G}\mathcal{G}}\mathcal{G}'') \times \\ & \times \left(\frac{1 - e^\lambda}{r^2} \right) + (\mathcal{G}f_{\mathcal{G}} - f)e^\lambda - \\ & - 4e^{-\lambda}(\lambda' \mathcal{G}' f_{\mathcal{G}\mathcal{G}}) \left(\frac{e^\lambda - 3}{r^2} \right) = \kappa^2 \rho e^\lambda, \quad (9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r^2}(\nu' r - e^\lambda + 1) - 4e^{-\lambda}\nu' \mathcal{G}' f_{\mathcal{G}\mathcal{G}} \left(\frac{e^\lambda - 3}{r^2} \right) - \\ & - (\mathcal{G}f_{\mathcal{G}} - f)e^\lambda = \kappa^2 p e^\lambda. \quad (10) \end{aligned}$$

Инвариант Гаусса–Бонне и уравнение сохранения для сферически-симметричного пространства–времени (6) принимают вид

$$\mathcal{G} = \frac{2e^{-\lambda}}{r^2}(\nu'\lambda' + \nu'^2 e^{-\lambda} - 3\nu'\lambda' e^{-\lambda} - 2\nu'' - \nu'^2 + 2\nu'' e^{-\lambda}), \quad (11)$$

$$\frac{dp}{dr} + \frac{\nu'}{2}(p + \rho) = 0. \quad (12)$$

Гравитационную массу m сферической звезды можно связать с внутренним радиусом r уравнением

$$e^{-\lambda} = (1 - 2m/r).$$

Таким образом, записывая уравнения (9) и (10) в терминах dp/dr , dm/dr и ρ , после некоторых преобразований получаем соответствующие уравнения ТОВ:

$$\begin{aligned} & \frac{2}{r^2} \frac{dm}{dr} + 8 \left[1 - \frac{2m}{r} \right]^2 \left[\frac{2m/r^3}{1 - 2m/r} \right] \times \\ & \times \left[f_{\mathcal{G}\mathcal{G}\mathcal{G}} \mathcal{G}'^2 + f_{\mathcal{G}\mathcal{G}} \mathcal{G}'' \right] + 4 \left[\frac{2m}{r^5} \left(1 - \frac{r}{m} \frac{dm}{dr} \right) \times \right. \\ & \left. \times (-2r + 6m) \right] \mathcal{G}' f_{\mathcal{G}\mathcal{G}} + (\mathcal{G} f_{\mathcal{G}} - f) = 8\pi\rho, \quad (13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & - \frac{2}{r^2} \left(\frac{r - 2m}{p + \rho} \right) \frac{dp}{dr} \left[1 + \frac{4}{r^2} (2r - 6m) \mathcal{G}' f_{\mathcal{G}\mathcal{G}} \right] - \\ & - \frac{2m}{r^3} - (\mathcal{G} f_{\mathcal{G}} - f) = 8\pi\rho. \quad (14) \end{aligned}$$

Мы будем использовать эти уравнения для анализа нейтронных и кварковых звезд. Рассмотрим случай, когда

$$f(\mathcal{G}) = \alpha \mathcal{G}^n,$$

т.е. когда $f(\mathcal{G})$ — некоторая аналитическая функция инвариантного слагаемого Гаусса–Бонне $\mathcal{G}$ [12]. Выберем для простоты $n = 2$ и применим двумерный графический анализ. Тогда, собирая уравнения (13) и (14) вместе, получим

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dr} = & \frac{r^2(p + \rho)}{2(r - 2m)(1 + 8\alpha(2r - 6m)\mathcal{G}'/r^2)} \times \\ & \times \left[\frac{-2m}{r^3} - 8\pi(p + \rho) + \frac{2}{r^2} \frac{dm}{dr} + \right. \\ & (16\alpha m)(-2r + 6m)\mathcal{G}' \left(1 - \left(r \frac{dm}{dr} / m \right) \right) + \\ & + \frac{32\alpha m(1 - 2m/r)\mathcal{G}''r}{r^5} \left. \right]. \quad (15) \end{aligned}$$

2.1. Граничные условия

Чтобы найти физические характеристики компактных звезд, находящихся в гидростатическом равновесии, надо проинтегрировать дифференциальное уравнение (15). Определим некоторые конкретные граничные условия в центре звезды:

$$m(0) = 0, \quad \rho(0) = \rho_c, \quad p(0) = p_c. \quad (16)$$

Решения на поверхности компактных звезд ($r = R$) вычисляются при конкретном условии

$$p(R) = 0,$$

так что внутреннее пространство–время звезды гладко сшивается с решением Шварцшильда. Метрические потенциалы внутреннего и внешнего пространства–времени связаны следующим образом:

$$e^{\nu(R)} = \frac{1}{e^{\lambda(R)}} = 1 - \frac{2M}{R},$$

где M — масса компактной звезды.

2.2. Модели уравнения состояния

Структура и формирование нейтронных звезд полностью зависят от параметра УС, который определяет связь между давлением и плотностью энергии внутри звезды [48]. Определив УС, дифференциальное уравнение (15) можно решить относительно неизвестных функций m , p и ρ . Более того, УС можно использовать, чтобы избавиться от одной неизвестной, что облегчает процесс интегрирования. Чтобы получить равновесные структуры компактных звезд в $f(\mathcal{G})$ -теории гравитации, мы рассмотрели два хорошо известных УС (политропная модель и модель МПТ мешка). Работа [49] может служить важным примером того, как можно использовать политропное УС для исследования нейтронных звезд. Таким образом, если использовать политропное УС

$$p = \omega \rho^{5/3},$$

то уравнение (15) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{5}{3} \rho^{2/3} \omega \frac{dp}{dr} = & \frac{r^2(\rho^{5/3} \omega + \rho)}{2(r - 2m)(1 + 8\alpha(2r - 6m)\mathcal{G}'/r^2)} \times \\ & \times \left[\frac{-2m}{r^3} - 8\pi(\rho^{5/3} \omega + \rho) + \frac{2}{r^2} \frac{dm}{dr} + \right. \\ & (16\alpha m)(-2r + 6m)\mathcal{G}' \left(1 - \left(r \frac{dm}{dr} / m \right) \right) + \\ & + \frac{32\alpha m(1 - 2m/r)\mathcal{G}''r}{r^5} \left. \right]. \quad (17) \end{aligned}$$

Здесь мы полагаем $\omega = 1.4745 \cdot 10^{-3} [\text{фм}^3/\text{МэВ}]^{2/3}$ [50, 51]. При исследовании странной кварковой материи [52] более подходящим считается выбор модели MIT мешка, где

$$p = a(\rho - 4b).$$

Для массивных кварковых звезд можно выбрать параметр $a = 0.28$ при $m_s = 250$ МэВ [53]. Параметр b называется постоянной мешка, в настоящей работе мы полагаем $b = 60$ МэВ/фм³. Тогда

$$\begin{aligned} a \frac{d\rho}{dr} = & \frac{r^2(a(\rho - 4b) + \rho)}{2(r - 2m)(1 + 8\alpha(2r - 6m)\mathcal{G}'/r^2)} \times \\ & \times \left[\frac{-2m}{r^3} - 8\pi(a(\rho - 4b) + \rho) + \frac{2}{r^2} \frac{dm}{dr} + \right. \\ & + \frac{(16\alpha m)(-2r + 6m)\mathcal{G}' \left(1 - \left(r \frac{dm}{dr} \right) / m \right)}{r^5} + \\ & \left. + \frac{32\alpha m(1 - 2m/r)\mathcal{G}''r}{r^3} \right]. \quad (18) \end{aligned}$$

3. НЕЙТРОННЫЕ И СТРАННЫЕ ЗВЕЗДЫ В $f(\mathcal{G})$ -ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ

Уравнения (17) и (18) являются в сильной степени нелинейными дифференциальными уравнениями и решить их аналитически сложно. Поэтому для исследования трех важных физических характеристик компактных звезд, таких как плотность энергии ρ , давление p и нормированная масса $m/M_\odot$, мы решили воспользоваться методом Рунге – Кутты 4-го порядка с граничными условиями при различных значениях α . На рис. 1 и 2 показано поведение плотности энергии и давления для нейтронных и странных кварковых звезд. Видно, что при $r \rightarrow 0$ плотность энергии достигает максимального значения. На рис. 2 видно, что с ростом r радиальное давление для нейтронных и странных кварковых звезд убывает. Более того, на границе давление стремится к нулю. Полученные зависимости плотности энергии и давления свидетельствуют о высокой степени компактности этих звезд, если $f(\mathcal{G})$ -модель гравитации описывается степенным законом. На рис. 3 представлены зависимости между массой и радиальной координатой, являющиеся прямо пропорциональными, причем полученные соотношения точно совпадают с обычными соотношениями масса–радиус для компактных звезд. Видно, что при возрастании α массы нейтронных и кварковых звезд ведут себя противоположным образом.

4. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Основная цель настоящей работы — исследование физических аспектов компактных структур в $f(\mathcal{G})$ -модели гравитации. Для этого в $f(\mathcal{G})$ -модели гравитации было рассмотрено обобщенное уравнение ТОВ. Для исследования обобщенного уравнения ТОВ использовались политропное УС ($p = \omega \rho^{5/3}$) для нейтронных звезд и УС модели MIT мешка ($p = a(\rho - 4b)$) для странных кварковых звезд. Из-за высокой степени нелинейности и сложной природы соответствующих дифференциальных уравнений, мы выбрали численные методы их решения и использовали подходящие граничные условия при различных значениях параметра α .

Исследовались физические и геометрические аспекты этих УС при различных значениях параметра α . Параметр модели α играет важную роль в эволюции компактных структур в $f(\mathcal{G})$ -модели гравитации. Для модели, в которой $f(\mathcal{G}) = \alpha \mathcal{G}^2$, поведение плотности энергии ρ , давления p и нормированной массы звезды $m/M_\odot$ показано на рис. 1–3. Видно, что когда радиальная координата $r \rightarrow 0$, плотность энергии достигает максимального значения, что указывает на компактность звезд. Кроме того, радиальное давление для нейтронных и странных кварковых звезд убывает при увеличении r и стремится к нулю на границе. Также получено, что при возрастании α массы нейтронных и кварковых звезд ведут себя противоположным образом. Рост массы компактных объектов обусловлен параметром модели α , этот факт играет важную роль. В принципе, можно сказать, что влияние параметра модели аналогично влиянию давления или дополнительного электрического заряда в конфигурациях нейтронных и странных звезд в общей теории относительности [50–55]. Однако важно отметить, что зависимость масса–радиус оказывается прямо пропорциональной, что соответствует реальным физическим характеристикам компактных структур и результатам, доступным в литературе [30, 56]. Более того, соотношение масса–радиус показывает, что с учетом кубических поправок в $f(R)$ -модели гравитации, может быть достигнута максимальная масса нейтронных звезд [34]. В принципе, в модифицированных моделях гравитации возможно существование массивных нейтронных звезд с массами $M > 4M_\odot$ и радиусами 12–15 км. Таким образом, в нашем случае существование устойчивых звезд с высокими плотностями в центре представляется реалистичным, если в $f(\mathcal{G})$ -модели гравитации учитывать квадратичные поправки.

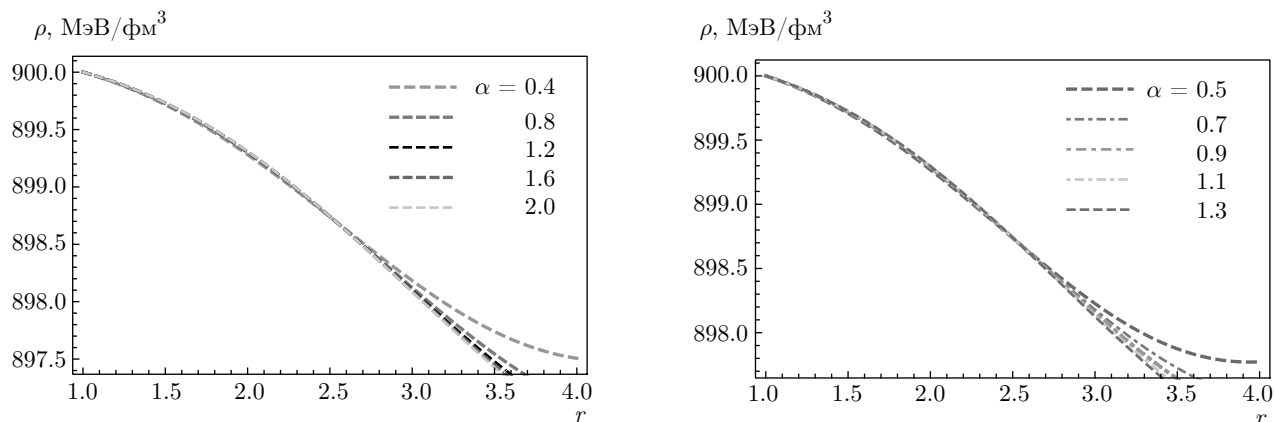


Рис. 1. (В цвете онлайн) Зависимости от радиальной координаты плотности энергии нейтронных (левая панель) и странных кварковых (правая панель) звезд при различных значениях параметра α . Плотность энергии в центре предполагалась равной 900 МэВ/фм^3

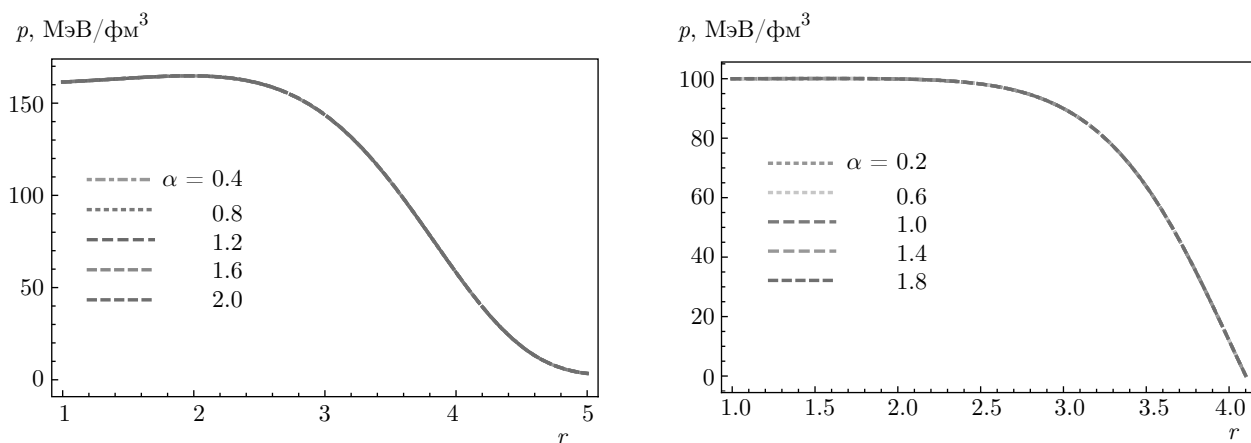


Рис. 2. (В цвете онлайн) Зависимости от радиальной координаты давления для нейтронных (левая панель) и странных кварковых (правая панель) звезд при различных значениях параметра α

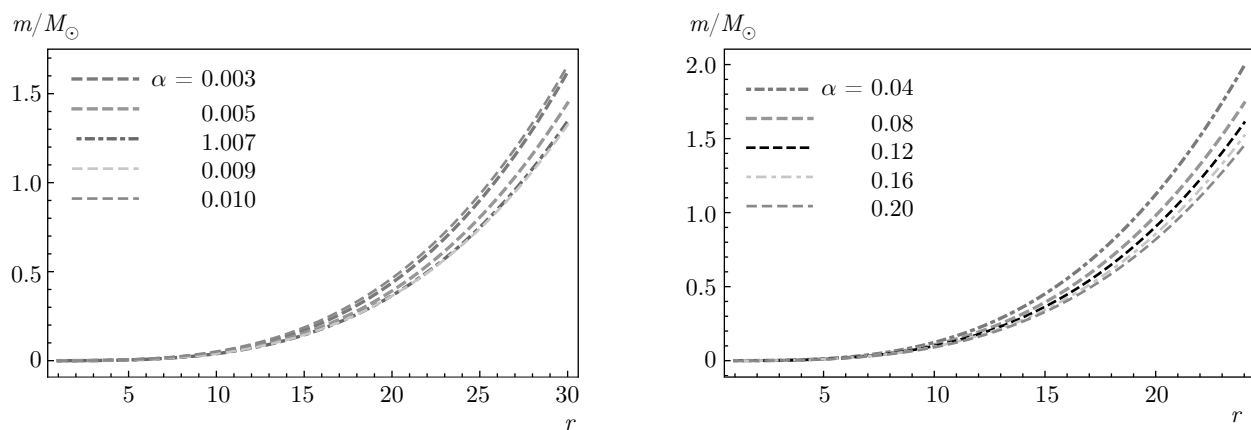


Рис. 3. (В цвете онлайн) Зависимости от радиальной координаты массы нейтронных (левая панель) и странных кварковых (правая панель) звезд, нормированной на солнечную массу, при различных значениях параметра α

Благодарности. Авторы благодарят рецензента за полезные замечания, которые помогли существенно улучшить работу. Работа поддержана Национальным университетом компьютерных и инновационных наук, Пакистан.

ЛИТЕРАТУРА

1. P. M. Garnavich et al., *Astrophys. J.* **509**, 74 (1998).
2. A. G. Riess et al., *Astron. J.* **116**, 1009 (1998).
3. E. J. Copeland, M. Sami, and S. Tsujikawa, *Int. J. Mod. Phys. D* **15**, 1753 (2006).
4. K. Bamba, S. Capozziello, S. Nojiri, and S. D. Odintsov, *Astrophys. Space Sci.* **342**, 155 (2012).
5. S. Capozziello, *Int. J. Mod. Phys. D* **11**, 483 (2002).
6. H. A. Buchdahl, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **150**, 1 (1970).
7. S. Nojiri and S. D. Odintsov, *Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.* **4**, 115 (2007).
8. S. Nojiri and S. D. Odintsov, *Phys. Rep.* **505**, 59 (2011).
9. S. Nojiri, S. D. Odintsov and V. K. Oikonomou, *Phys. Rep.* **692**, 1 (2017).
10. S. Nojiri and S. D. Odintsov, *Phys. Lett. B* **1**, 631 (2005).
11. G. Cognola, E. Elizalde, S. Nojiri, S. D. Odintsov and S. Zerbini, *Phys. Rev. D* **73**, 084007 (2006).
12. G. Cognola, E. Elizalde, S. Nojiri, S. D. Odintsov and S. Zerbini, *Phys. Rev. D* **75**, 086002 (2007).
13. S. Nojiri and S. D. Odintsov, *J. Phys. Conf. Ser.* **66**, 012005 (2007).
14. A. D. Felice and S. Tsujikawa, *Phys. Rev. D* **80**, 063516 (2009).
15. S. Y. Zhou, E. J. Copeland, and P. M. Saffin, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **07**, 009 (2009).
16. M. Sharif and H. I. Fatima, *Int. J. Mod. Phys. D* **25**, 1650011 (2016).
17. R. C. Tolman, *Proc. Nat. Acad. Sci.* **20**, 169 (1934).
18. R. C. Tolman, *Phys. Rev.* **55**, 364 (1939).
19. J. R. Oppenheimer and G. M. Volkoff, *Phys. Rev.* **55**, 374 (1939).
20. D. Momeni and R. Myrzakulov, *Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.* **12**, 1550014 (2015).
21. G. H. Bordbar and M. Modarres, *Phys. Rev. C* **57**, 714 (1998).
22. M. Visser and N. Yunes, *Int. J. Mod. Phys. A* **18**, 3433 (2003).
23. R. R. Silbar and S. Reddy, *Amer. J. Phys.* **72**, 892 (2004).
24. G. Narain, J. Schaffner-Bielich and I. N. Mishustin, *Phys. Rev. D* **74**, 063003 (2006).
25. G. H. Bordbar, M. Bigdeli, and T. Yazdizadeh, *Int. J. Mod. Phys. A* **21**, 5991 (2006).
26. P. Boonserm, M. Visser, and S. Weinfurtner, *Phys. Rev. D* **76**, 044024 (2007).
27. X. Li, F. Wang and K. S. Cheng, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **10**, 031 (2012).
28. A. M. Oliveira, H. E. S. Velten, J. C. Fabris, and I. G. Salako, *Eur. Phys. J. C* **74**, 3170 (2014).
29. X. T. He, F. J. Fattoyev, B. A. Li, and W. G. Newton, *Phys. Rev. C* **91**, 015810 (2015).
30. P. H. R. S. Moraes, J. D. V. Arbañil, and M. Malheiro, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **06**, 005 (2016).
31. A. V. Astashenok, S. D. Odintsov, and A. de la Cruz-Dombriz, *Class. Quant. Grav.* **34**, 205008 (2017).
32. G. A. Carvalho et al., *Eur. Phys. J. C* **77**, 871 (2017).
33. M. Sharif and A. Siddiq, *Eur. Phys. J. Plus.* **132**, 529 (2017).
34. A. V. Astashenok, S. Capozziello, and S. D. Odintsov, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **01**, 001 (2015).
35. A. V. Astashenok, S. Capozziello, and S. D. Odintsov, *Phys. Lett. B* **742**, 160 (2015).
36. D. Momeni, P. H. R. S. Moraes, H. Gholizade, and R. Myrzakulov, *Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.* **15**, 1850091 (2018).
37. D. Momeni, H. Gholizade, M. Raza, and R. Myrzakulov, *Int. J. Mod. Phys. A* **30**, 1550093 (2015).
38. S. Capozziello, M. De Laurentis, R. Farinelli, and S. D. Odintsov, *Phys. Rev. D* **93**, 023501 (2016).
39. P. Brax, A. C. Davis, and R. Jha, *Phys. Rev. D* **95**, 083514 (2017).
40. H. Mansour, B. S. Lakhal, and A. Yanallah, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **06**, 006 (2018).
41. S. Capozziello, M. De Laurentis, I. De Martino, M. Formisano, and S. D. Odintsov, *Phys. Rev. D* **85**, 044022 (2012).

42. C. Deliduman, K. Y. Eki, and V. Kele, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **05**, 036 (2012).
43. A. V. Astashenok, S. Capozziello, and S. D. Odintsov, *Astrophys. Space Sci.* **355**, 333 (2015).
44. A. V. Astashenok, S. Capozziello, and S. D. Odintsov, *Phys. Rev. D* **89**, 103509 (2014).
45. A. V. Astashenok, S. Capozziello, and S. D. Odintsov, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **12**, 040 (2013).
46. M. Ilyas, *Eur. Phys. J. C* **78**, 757 (2018).
47. S. Nojiri and S. D. Odintsov, *Phys. Lett. B* **631**, 1 (2005).
48. J. M. Lattimer and M. Prakash, *Science* **304**, 536 (2004).
49. R. F. Tooper, *Astrophys. J.* **140**, 434 (1964).
50. S. Ray, A. L. Espndola, M. Malheiro, J. P. S. Lemos, and V. T. Zanchin, *Phys. Rev. D* **68**, 084004 (2003) .
51. J. D. V. Arbañil, J. P. S. Lemos, and V. T. Zanchin, *Phys. Rev. D* **88**, 084023 (2013).
52. E. Witten, *Phys. Rev. D* **30**, 272 (1984).
53. N. Stergioulas, *Living Rev. Relativ.* **6**, 3 (2003).
54. J. D. V. Arbañil and M. Malheiro, *Phys. Rev. D* **92**, 084009 (2015).
55. R. P. Negreiros, F. Weber, M. Malheiro, and V. Usov, *Phys. Rev. D* **80**, 083006 (2009).
56. M. F. Shamir and M. Ahmad, to be published in *Mod. Phys. Lett. A*, arXiv:1807.09103.