

ВОЗБУЖДЕНИЕ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН ПРИ ПАДЕНИИ НЕОДНОРОДНОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ НА ГРАНИЦУ ПЛАЗМЫ

И. Н. Карташов^{*}, *М. В. Кузелев*^{**}

*Физический факультет, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
119991, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 21 февраля 2019 г.,

после переработки 21 февраля 2019 г.

Принята к публикации 18 марта 2019 г.

Исследовано возбуждение поверхностных плазменных волн при распространении цилиндрической электромагнитной волны в слоистой плазменно-диэлектрической среде. Рассмотрены слои диэлектрик–вакуум–плазма и вакуум–плазма–плазма. Показано, что на границе диэлектрик–плазма поверхностные волны цилиндрической электромагнитной волной не возбуждаются (аналогично случаю плоской волны). В слоистой среде возбуждение поверхностной волны происходит в достаточно узком диапазоне частот и углов распространения. Вычислены структуры электромагнитного поля, потока электромагнитной энергии, найдены интегральные коэффициенты отражения и прохождения. Использованы как численные, так и аналитические асимптотические методы. Показано, что во всех случаях вклад поля от боковой волны пренебрежимо мал.

DOI: 10.1134/S0044451019080145

1. Исследование поверхностных электромагнитных волн имеет давнюю историю и продолжается до настоящих дней. Интерес к поверхностным волнам в значительной степени вызван широким кругом практических приложений во многих областях физики. Впервые задача о поверхностных электромагнитных волнах возникла при исследовании распространения радиоволн вблизи поверхности Земли Зоммерфельдом и Ценнеком [1–3]. Несмотря на то что некоторые их результаты вскоре были уточнены другими авторами [4–7], вопросы о возможности возбуждения так называемой поверхностной волны Ценнека считаются дискуссионными и по сей день [8–13].

Поверхностные электромагнитные волны возникают и в других частотных диапазонах, в частности, в СВЧ-диапазоне. Именно на возбуждении поверхностных плазменных волн электронным пучком основаны успешные реализации мощных плазменных источников электромагнитного излучения (усилителей и генераторов) микроволнового диапазона длин

волн [14–18]. Подобные системы представляют собой металлические волноводы, в которых создана плазма со свободной поверхностью и вдоль которых распространяется мощный релятивистский электронный пучок. В плазменных волноводах существуют замедленные поверхностные волны E -типа, которые могут эффективно взаимодействовать с электронным пучком, забирая от него энергию. Таким образом, в зависимости от конкретной реализации системы, возможно или усиление сигнала, подаваемого на вход волновода, или его генерация за счет создания обратной связи. Заметим, что при экспериментальной реализации плазменных усилителей и генераторов на поверхностных волнах используется внешнее продольное магнитное поле, существенно влияющее как на свойства поверхностных плазменных волн, так и на механизм их взаимодействия с пучком электронов [19–21]. В настоящей работе наличие внешнего магнитного поля не учитывается.

Поверхностные электромагнитные волны СВЧ-диапазона возникают также при реализации поверхностного газового разряда, т. е. разряда, в котором вложение энергии для его поддержания осуществляется поверхностной электромагнитной волной. Этот безэлектродный разряд локализован в

* E-mail: igorkartashov@mail.ru

** E-mail: kuzelev@mail.ru

непосредственной близости от поверхности. В отличие от объемного разряда он позволяет создавать плазму со сверхкритической концентрацией электронов. Перечисленные свойства поверхностного разряда в ряде технологических применений являются его преимуществами по сравнению с другими формами газовых разрядов. К таким применениям можно отнести модификацию свойств поверхности, управление обтеканием поверхности в потоке газа, повышение эффективности воспламенения топлива в высокоскоростных потоках топливоздушнoй смеси [22, 23].

Задача возбуждения поверхностных электромагнитных волн примыкает и к проблеме создания излучающих антенн с динамически перестраиваемой диаграммой направленности [24, 25]. Как хорошо известно, диаграмма направленности антенны определяется ее геометрией. Причем традиционно используемые металлические элементы антенны во многих случаях могут быть успешно заменены проводящими каналами газоразрядной плазмы. Таким образом, управляя структурой проводящих областей, возможно формирование антенн различных конфигураций. Плазменные области при этом демонстрируют резонансные свойства, связанные с возбуждением поверхностных плазмонов [26, 27].

Значительное место поверхностным волнам отводится в проблеме повышения скорости работы электронных устройств. Сформировалась новая область физики — плазмоника [28–30], объектом исследования которой являются поверхностные плазмон-поляритоны и поверхностные плазмоны. Возможность локализации поля на субволновых масштабах даже для излучения оптического диапазона длин волн является перспективной с точки зрения миниатюризации вычислительных устройств. По сути, поверхностный плазмон-поляритон и поверхностный плазмон ничем не отличаются от поверхностных плазменных волн, исследование которых началось еще на заре XX века. В теории плазмы поверхностные плазмон-поляритоны называют также поверхностными фотонами [31], что вполне естественно, поскольку в длинноволновой области законы дисперсии фотонов и плазмон-поляритонов практически совпадают [32].

Одним из ключевых вопросов в плазмонике является вопрос о возбуждении поверхностных волн. Невозможность согласования частоты и компоненты волнового вектора вдоль поверхности у падающей объемной волны и у поверхностной волны требует использования специальных согласующих схем. Традиционными являются схемы призмного

и решеточного ввода излучения. По сути же призмный ввод излучения означает возбуждение не поверхностной волны на границе раздела двух сред, а одной из мод более сложной структуры, содержащей две границы раздела. В работе [33] численно исследуется задача рассеяния падающей плоской электромагнитной волны оптического диапазона на системе параллельно расположенных металлических цилиндров, погруженных в диэлектрическую среду. Волна падает из другого диэлектрика с большим показателем преломления, так что реализуется режим полного внутреннего отражения. Возможно также возбуждение поверхностных плазмонов в нелинейной среде без дополнительного согласования [34, 35].

В плазмонике традиционным является предположение о плоской падающей волне. В то же время для возбуждения поверхностных волн в газоразрядной плазме, при использовании существенно более длинноволнового излучения, более привлекательным может оказаться излучение штыревой антенны. В этом случае возбуждающая волна по своей структуре будет близка к цилиндрической. В настоящей работе мы рассмотрим возбуждение поверхностных плазменных волн падающей цилиндрической волной.

2. Рассмотрим взаимодействие неоднородной электромагнитной волны частоты ω с плоским диэлектрическим слоем, соседствующим с двумя различными диэлектрическими средами. Диэлектрики считаем изотропными, пространственную дисперсию не учитываем, поэтому пространственное распределение диэлектрической проницаемости зададим в виде

$$\varepsilon(\omega, x) = \begin{cases} \varepsilon_1(\omega), & x < 0, \\ \varepsilon_0(\omega), & 0 < x < L_0, \\ \varepsilon_2(\omega), & x > L_0. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь L_0 — толщина диэлектрического слоя, а $\varepsilon_{1,2}(\omega)$ и $\varepsilon_0(\omega)$ — некоторые функции частоты (вообще говоря, комплексные). Ниже будет рассмотрен случай, когда среда с диэлектрической проницаемостью ε_2 является холодной электронной плазмой. Значительный интерес представляет также случай, когда плазмой (другой плотности) является среда с проницаемостью ε_0 . На границах раздела плазма–вакуум, плазма–диэлектрик и плазма–плазма существуют поверхностные волны различного типа: поверхностные плазмон-поляритоны (поверхностные фотоны) и поверхностные плазмоны. Основное внимание в настоящей работе сосредоточено на границе слоя с плазмой $x = L_0$ и на возбуждении на этой границе указанных выше поверхност-

ных волн. Казалось бы, что слой при таком подходе вообще не нужен, т. е. в (1) можно положить $L_0 = 0$. Оказывается, однако, что без слоя поверхностные волны вообще не возбуждаются. Для случая плоских волн это обстоятельство хорошо известно [28–30].

Предположим, что электромагнитная волна создается бесконечно длинным линейным внешним источником, перпендикулярным плоскости xz и расположенным в точке $x = x_0 < 0, z = 0$. Таким источником может быть линейный диполь с дипольным моментом $\mathbf{P} = \mathbf{d} \exp(-i\omega t) \delta(x-x_0) \delta(z)$, где \mathbf{d} — вектор, определяющий направление и величину дипольного момента. Поскольку зависимости источника, а значит, и создаваемого им электромагнитного поля, от координаты y нет, ограничимся рассмотрением только электромагнитных волн с отличными от нуля компонентами электромагнитного поля E_z, E_x, B_y (волны, поляризованные в плоскости падения, или волны E -типа). Волны, поляризованные перпендикулярно плоскости падения (или волны B -типа с отличными от нуля B_z, B_x, E_y) к возбуждению поверхностной волны не приводят.

Для описания электромагнитного поля удобно использовать электрический вектор Герца $\mathbf{\Pi}_e$ [36, 37]. Функция $\mathbf{\Pi}_e$ (без общего множителя $\exp(-i\omega t)$) в областях постоянства диэлектрических проницаемостей удовлетворяет следующему волновому уравнению:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{\Pi}_e}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{\Pi}_e}{\partial x^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega, x) \mathbf{\Pi}_e = -4\pi \mathbf{d} \delta(x-x_0) \delta(z), \quad (2)$$

а компоненты электромагнитного поля определяются формулами

$$\begin{aligned} B_y &= i \frac{\omega}{c} \varepsilon \left(\frac{\partial \Pi_z}{\partial x} - \frac{\partial \Pi_x}{\partial z} \right), \\ E_x &= \frac{\partial^2 \Pi_z}{\partial z \partial x} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \Pi_x, \\ E_z &= \left(\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Pi_z + \frac{\partial^2 \Pi_x}{\partial z \partial x}. \end{aligned} \quad (3)$$

Волна E -типа определяется только двумя компонентами вектора Герца Π_z и Π_x , а они, в свою очередь — соответствующими компонентами дипольного момента (и тока). Мы рассмотрим случай диполя, параллельного границам слоя, т. е. $\mathbf{d} = \{0, 0, d\}$. На границах раздела $x = 0$ и $x = L_0$ должны быть непрерывны E_z и B_y (и εE_x).

3. Линейный источник в среде с проницаемостью ε_1 создает следующую расходящуюся цилиндричес-

кую волну (она определяется решением волнового уравнения (2) [37]):

$$\begin{aligned} \Pi_z(x, z) &= \Pi_0 H_0^{(1)} \left(k_1 \sqrt{(x-x_0)^2 + z^2} \right) = \\ &= \Pi_0 \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk_z \frac{\exp \left(i \sqrt{k_1^2 - k_z^2} (x-x_0) + ik_z z \right)}{\sqrt{k_1^2 - k_z^2}}, \end{aligned} \quad (4)$$

где $k_1^2 = \varepsilon_1 \omega^2 / c^2$, $H_0^{(1)}$ — функция Ганкеля первого рода, а $\Pi_0 \sim d$ — постоянная амплитуда, которую во всех последующих формулах полагаем равной единице. Формула (4) дает разложение цилиндрической волны по плоским волнам при $x > x_0$. При вычислении интеграла в (4) выбирается та ветвь квадратного корня, которая обеспечивает сходимость интеграла.

Рассмотрим сначала падение на границу $x = 0$ не суперпозиции (4), а одной плоской волны с некоторым фиксированным k_z . Для этого запишем известное решение задачи Френеля для диэлектрического слоя [36]:

$$E_z = \begin{cases} A \exp(ik_{x1}x) + B \exp(-ik_{x1}x), & x < 0, \\ C \exp(ik_{x0}x) + D \exp(-ik_{x0}x), & 0 < x < L_0, \\ F \exp(ik_{x2}x), & L_0 < x, \end{cases} \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} k_{x1} &= \sqrt{k_1^2 - k_z^2}, & k_{x0} &= \sqrt{k_0^2 - k_z^2}, \\ k_{x2} &= \sqrt{k_2^2 - k_z^2}, \end{aligned} \quad (6)$$

$k_0^2 = \varepsilon_0 \omega^2 / c^2$, $k_2^2 = \varepsilon_2 \omega^2 / c^2$, а k_z — тангенциальная к границе раздела компонента волнового вектора. Она определяется падающей волной и может быть выражена через угол падения α по формуле

$$k_z = k_1 \sin \alpha. \quad (7)$$

Амплитуда отраженной волны B , амплитуда прошедшей волны F , а также C и D выражаются через амплитуду падающей волны A по формулам

$$\begin{aligned} B &= \frac{A}{S} [(\varepsilon_1 k_{x0} - \varepsilon_0 k_{x1})(\varepsilon_0 k_{x2} + \varepsilon_2 k_{x0}) + \\ &+ (\varepsilon_1 k_{x0} + \varepsilon_0 k_{x1})(\varepsilon_0 k_{x2} - \varepsilon_2 k_{x0}) \exp(2k_{x0}L_0)], \\ C &= \frac{A}{S} 2\varepsilon_1 k_{x0}(\varepsilon_0 k_{x2} + \varepsilon_2 k_{x0}), \\ D &= \frac{A}{S} 2\varepsilon_1 k_{x0}(\varepsilon_0 k_{x2} - \varepsilon_2 k_{x0}) \exp(2ik_{x0}L_0), \\ F &= \frac{A}{S} 4\varepsilon_1 k_{x0} \varepsilon_0 k_{x2} \exp[i(k_{x0} - k_{x2})L_0]. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь

$$S(\omega, k_z) = (\varepsilon_1 k_{x0} + \varepsilon_0 k_{x1})(\varepsilon_0 k_{x2} + \varepsilon_2 k_{x0}) + (\varepsilon_1 k_{x0} - \varepsilon_0 k_{x1})(\varepsilon_0 k_{x2} - \varepsilon_2 k_{x0}) \exp(2ik_{x0}L_0). \quad (9)$$

Чтобы связать решение (5) и формулы (8) с задачей о волнах от линейного внешнего источника, следует, используя разложение по плоским волнам (4) и третью формулу (3), определить амплитуду падающей плоской волны в (5) и (8). Сравнивая подынтегральное выражение в (4) и самый первый член в решении (5), имеем (множитель $\exp(ik_z z)$ в (5) отсутствует, потому что на него было сделано сокращение)

$$A = A(k_z) = \frac{1}{\pi} \sqrt{k_1^2 - k_z^2} \exp\left(-i\sqrt{k_1^2 - k_z^2} x_0\right). \quad (10)$$

Выражение (10) есть не что иное, как угловой (пространственный) спектр излучения линейного источника в плоскости $x = 0$. Полное решение задачи, очевидно, дается суперпозицией плоских волн (5) с угловым спектром (10), а именно:

$$\begin{aligned} E_z(x < 0, z) &= \int_{-\infty}^{\infty} dk_z A \exp(ik_{x1}x + ik_z z) + \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} dk_z B \exp(-ik_{x1}x + ik_z z), \\ E_z(0 < x < L_0, z) &= \int_{-\infty}^{\infty} dk_z C \exp(ik_{x0}x + ik_z z) + \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} dk_z D \exp(-ik_{x0}x + ik_z z), \\ E_z(x > L_0, z) &= \int_{-\infty}^{\infty} dk_z F \exp(ik_{x2}x + ik_z z). \end{aligned} \quad (11)$$

Волновое число k_z в (10) является переменной интегрирования и никак не связано с формулой (7). Для перехода к плоской волне и обычной задаче Френеля для слоя в (11) следует подставить $A = \delta(k_z - k_1 \sin \alpha)$.

4. Вычислим полный поток энергии неоднородной электромагнитной волны (11) в направлении оси x :

$$P_x(x) = -\frac{c}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \langle E_z(x) B_y(x) \rangle dz, \quad (12)$$

где угловые скобки обозначают усреднение по периоду $2\pi/\omega$. Начнем со случая плоских волн (5). Заметим, что в плоском случае имеет смысл только подынтегральное выражение в (12), $P_0 = -c \langle E_z(x) B_y(x) \rangle / 4\pi$, определяющее плотность потока энергии. В области постоянства диэлектрической проницаемости с учетом (5) и второй формулы (3) имеем

$$\begin{aligned} E_z &= \frac{1}{2} [G \exp(-i\varphi) + G^* \exp(i\varphi)], \\ B_y &= -\frac{1}{2} \frac{\omega}{c} [H \exp(-i\varphi) + H^* \exp(i\varphi)], \\ G &= A_{(+)} \exp(ik_x x) + A_{(-)} \exp(-ik_x x), \\ H &= \frac{\varepsilon}{k_x} [A_{(+)} \exp(ik_x x) - A_{(-)} \exp(-ik_x x)]. \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь символ «*» обозначает комплексное сопряжение, $\varphi = \omega t - k_z z$, а ε и k_x — любая из величин (1) и (6). Записывая выражения (13), мы учли, что может быть $\varepsilon \neq \varepsilon^*$ и $k_x \neq k_x^*$, а общее комплексное решение уравнения (2) взяли в виде

$$[A_{(+)} \exp(ik_x x) + A_{(-)} \exp(-ik_x x)] \exp(-i\varphi).$$

Используя (13), находим следующее выражения для плотности потока электромагнитной энергии в плоской волне:

$$\begin{aligned} P_0 &= \frac{\omega}{8\pi} \left[\operatorname{Re}(\varepsilon/k_x) (\exp[-2 \operatorname{Im}(k_x)x] |A_{(+)}|^2 - \right. \\ &- \exp[2 \operatorname{Im}(k_x)x] |A_{(-)}|^2) - 2 \operatorname{Im}(\varepsilon/k_x) \times \\ &\times \operatorname{Im} \left(A_{(+)} A_{(-)}^* \exp[2i \operatorname{Re}(k_x)x] \right) \Big] \equiv \\ &\equiv P_0(A_{(+)}, A_{(-)}, k_x, \varepsilon). \end{aligned} \quad (14)$$

Обратим внимание, что при комплексных ε и k_x поток энергии не сводится просто к разности $|A_{(+)}|^2 - |A_{(-)}|^2$, имеется еще перекрестный член, пропорциональный $A_{(+)} A_{(-)}^*$.

Используя введенное в (14) обозначение, запишем плотность потока электромагнитных волн (5) в виде

$$P_0(x, k_z) = \begin{cases} P_0(A, B, k_{x1}, \varepsilon_1), & x < 0, \\ P_0(C, D, k_{x0}, \varepsilon_0), & 0 < x < L_0, \\ P_0(F, 0, k_{x2}, \varepsilon_2), & L_0 < x, \end{cases} \quad (15)$$

где величины A, B, C, D и F определены в (8). В формуле (15) специально подчеркнута зависимость плотности потока энергии плоской волны от компоненты волнового вектора k_z . Учитывая далее равенство Парсеваля [38]

$$\int_{-\infty}^{\infty} \langle E_z(x, z) B_y(x, z) \rangle dz = \frac{1}{4\pi} \times \int_{-\infty}^{\infty} [E_z(x, k_z) B_y^*(x, k_z) + E_z^*(x, k_z) B_y(x, k_z)] dk_z, \quad (16)$$

получаем окончательно следующее выражение для полного потока энергии электромагнитного поля (11) в полупространство $x > 0$:

$$P_x(x) = \int_{-\infty}^{\infty} P_0(x, k_z) dk_z, \quad (17)$$

где подынтегральное выражение определено формулами (14) и (15).

5. Из формул (8) следует, что при отсутствии падающей волны, т. е. при $A = 0$, решение (5) тождественно равно нулю. Исключением является случай

$$S(\omega, k_z) = 0. \quad (18)$$

Равенство (18) есть дисперсионное уравнение для определения спектров частот собственных волн диэлектрического слоя¹⁾. Эти волны распространяются вдоль оси z и локализованы или частично локализованы в направлении x . Локализованными волнами являются поверхностные волны, которые возможны не при любом сочетании диэлектрических проницаемостей $\varepsilon_1, \varepsilon_0, \varepsilon_2$. Поле поверхностных волн убывает при удалении от слоя, т. е. при $x \rightarrow \pm\infty$. Поэтому, как видно из (5) и (6), для существования поверхностных волн необходимо выполнение неравенств²⁾

$$k_{x1}^2 = k_1^2 - k_z^2 < 0, \quad k_{x2}^2 = k_2^2 - k_z^2 < 0, \quad (19)$$

записанных для простоты для случая вещественной диэлектрической проницаемости. Что касается знака величины k_{x0}^2 , то он может быть любым, т. е. внутри диэлектрического слоя поле волны может быть как поверхностным, так и объемным. Очевидно, что в интегралах (11) есть спектральные составляющие, для которых неравенства (19) выполнены. Поэтому возникает закономерный вопрос о возможности возбуждения поверхностных волн при облучении слоя цилиндрической волной (4).

¹⁾ Заметим, что уравнение (18) удовлетворяется тождественно при $k_{x0} = 0$. Однако из решения (8) следует, что поле в этом случае при $A = 0$ является тождественным нулем.

²⁾ Считается, что $\sqrt{-1 \pm i0} = \pm i$.

Помимо локализованных поверхностных волн уравнение (18) определяет и частоты частично локализованных волн. Действительно, слой среды $0 < x < L_0$ является резонатором Фабри–Перо с полупрозрачными стенками $x = 0$ и $x = L_0$. Излучение может уходить через эти стенки на бесконечность, чему соответствует нарушение хотя бы одного из неравенств (19). Поскольку излучение уносится на бесконечность, поле в слое должно затухать. Поэтому частоты частично локализованных волн должны быть комплексными даже тогда, когда любые диссипативные эффекты отсутствуют, т. е. диэлектрические проницаемости $\varepsilon_1, \varepsilon_0, \varepsilon_2$ вещественны. Заметим, что частоты поверхностных волн в недиссипативной системе всегда вещественны. Исследование возможности возбуждения частично локализованных волн диэлектрического слоя падающей на него неоднородной волной (4) также представляется интересным.

В случае, когда $k_{x0}^2 < 0$ (а этот случай и будет нами исследоваться ниже) и выполнено неравенство $2|k_{x0}|L_0 \gg 1$, с точностью до экспоненциально малой величины дисперсионное уравнение (18) распадается на произведение дисперсионных уравнений

$$\begin{aligned} S_{10}(\omega, k_z) &= \varepsilon_1 k_{x0} + \varepsilon_0 k_{x1} = 0, \\ S_{02}(\omega, k_z) &= \varepsilon_0 k_{x2} + \varepsilon_2 k_{x0} = 0, \end{aligned} \quad (20)$$

первое из которых определяет спектры поверхностных волн на границе $x = 0$, второе — на границе $x = L_0$. В другом частном случае $L_0 = 0$ (т. е. диэлектрического слоя нет) дисперсионное уравнение (18) преобразуется к виду

$$S(\omega, k_z) = \varepsilon_1 k_{x2} + \varepsilon_2 k_{x1} = 0. \quad (21)$$

Уравнение (21) определяет спектры поверхностных волн на границе диэлектриков ε_1 и ε_2 .

6. Перейдем теперь к рассмотрению конкретных систем. Положим

$$\varepsilon_1 > 1, \quad \varepsilon_0 = 1, \quad \varepsilon_2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + i\nu)}. \quad (22)$$

Таким образом, диэлектрическая среда без дисперсии в области $x < 0$ и холодная электронная плазма в области $x > L_0$ разделены вакуумным зазором (ω_p — электронная ленгмюровская частота, ν — частота столкновений электронов с нейтральными атомами). В простейшем случае, когда вакуумного зазора нет ($L_0 = 0$), имеем границу диэлектрик–плазма. Напомним, что известно о волнах границы диэлектрик–плазма и о падении электромагнитной волны из области диэлектрика на эту границу.

Известно, что на плоской границе диэлектрика с плазмой имеется сильно непотенциальная поверхностная волна, волновое число которой определяется из уравнения (21) и при $\nu = 0$ дается формулой [39]

$$k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_1 \frac{\omega_p^2 - \omega^2}{\omega_p^2 - (\varepsilon_1 + 1)\omega^2}, \quad (23)$$

$$\omega \in (0, \omega_p / \sqrt{\varepsilon_1 + 1}).$$

Именно эту волну в длинноволновой области $k_z c \ll \ll \omega_p$ называют поверхностным плазмон-поляритонном (поверхностным фотоном), а в коротковолновой области — поверхностным плазмоном. Падающей из диэлектрика на границу плазмы плоской электромагнитной волной нельзя возбудить поверхностную волну плазмы [28–30]. Действительно, для возможности такого возбуждения необходимо, чтобы у обеих волн совпадали и частоты, и тангенциальные волновые числа k_z . Но, как видно из (7), у волны в диэлектрике $k_z < \sqrt{\varepsilon_1} \omega/c$, а у поверхностной волны (23) $k_z > \sqrt{\varepsilon_1} \omega/c$. Невозможность возбуждения поверхностной волны следует и из формул (5), (8), которые при $L_0 = 0$ превращаются в обычные формулы Френеля [36]. В частности, коэффициенты B , F в формулах (8) превращаются в обычные коэффициент отражения и коэффициент прохождения (по амплитуде) на плоской границе раздела, не содержащие никаких особенностей, кроме связанных с явлениями полного внутреннего отражения и Брюстера.

В случае падающей неоднородной волны волновое число k_z уже не связано соотношением (7), а является переменной интегрирования в (11). Поэтому обязательно существует значение, совпадающее с (23). Оказывается, однако, что и в этом случае возбуждение поверхностной волны отсутствует, что следует из асимптотических оценок интегралов (11) (см. далее) и подтверждается численными расчетами. Ситуация не меняется и при учете столкновений в плазме. Поэтому были разработаны специальные схемы возбуждения поверхностной плазменной волны при падении электромагнитной волны на границу плазмы.

7. Одна из таких схем — схема Отто [28–30] — описывается формулами (1) и (22). Поскольку в этой схеме плазма граничит с вакуумным зазором, волновое число поверхностной плазменной волны определяется формулой

$$k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\omega_p^2 - \omega^2}{\omega_p^2 - 2\omega^2}, \quad \omega \in (0, \omega_p / \sqrt{2}). \quad (24)$$

При $\varepsilon_1 > 1$, начиная с некоторых углов падения α , волновое число (7) может совпасть с волновым

числом, определяемым формулой (24). Таким образом, в схеме (22) резонанс между падающей и поверхностной волнами возможен. Правда, в описанной схеме имеется вакуумный зазор, в котором происходит ослабление волны из-за полного внутреннего отражения. Но при достаточно малой толщине зазора L_0 эффект ослабления волны незначителен. Кроме того, наличие зазора меняет закон дисперсии поверхностной волны, что будет учтено в дальнейшем.

Рассмотрим основные соотношения для схемы (22) в случае падения на границу $x = 0$ плоской волны. Приравнивая (7) и (24), находим резонансную частоту возбуждения поверхностной волны в схеме (22):

$$\omega^2 = \omega_p^2 \frac{\varepsilon_1 (\sin \alpha)^2 - 1}{2\varepsilon_1 (\sin \alpha)^2 - 1}. \quad (25)$$

Встает вопрос о ширине резонанса, т. е. о том, насколько точно частота падающей под углом α волны должна совпадать со значением (25). Для ответа на этот вопрос исследуем резонансные свойства коэффициента отражения $R = |B/A|$, где величина B определена в (8). Но для этого необходим учет столкновений в плазме. Действительно, на частоте $\omega < \omega_p$ плазма экранирует электромагнитное поле, т. е. любые волны при $x > L_0$ экспоненциально затухают, а поэтому коэффициент отражения, если нет поглощения, строго равен единице. Учитывая сказанное, при расчетах используем диэлектрическую проницаемость плазмы, приведенную в (22), но частоту столкновений считаем достаточно малой. При выполнении неравенства $\nu/\omega \ll 1$ формула (25) применима, хотя и является приближенной.

Коэффициент отражения R для схемы (22) в зависимости от угла падения α представлен на рис. 1а ($\varepsilon_1 = 3$, $\omega/\omega_p = 0.592$, $\nu/\omega_p = 0.01$, $(\omega_p/c)L_0 = 2.8$). Виден резко выраженный резонансный характер представленной на рисунке зависимости. В резонансной точке коэффициент отражения мал по сравнению с единицей, хотя строго в нуль не обращается. Поскольку частота ω задана, по формуле (25) можно вычислить значение резонансного угла падения:

$$\alpha = \arcsin \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_1} \frac{\omega_p^2 - \omega^2}{\omega_p^2 - 2\omega^2}}. \quad (26)$$

Значение, вычисленное по формуле (26), хорошо согласуется с тем, которое следует из рис. 1. Коэффициент отражения для схемы (22) в зависимости от частоты ω при $\alpha = 1.0724$ представлен на рис. 1б.

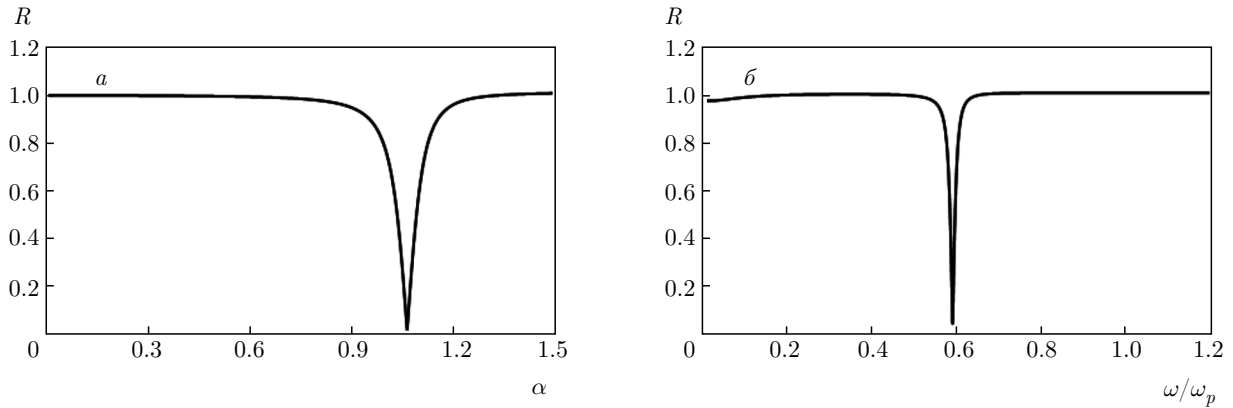


Рис. 1. Коэффициент отражения по амплитуде в схеме (22) в зависимости от угла падения (а) и от частоты (б)

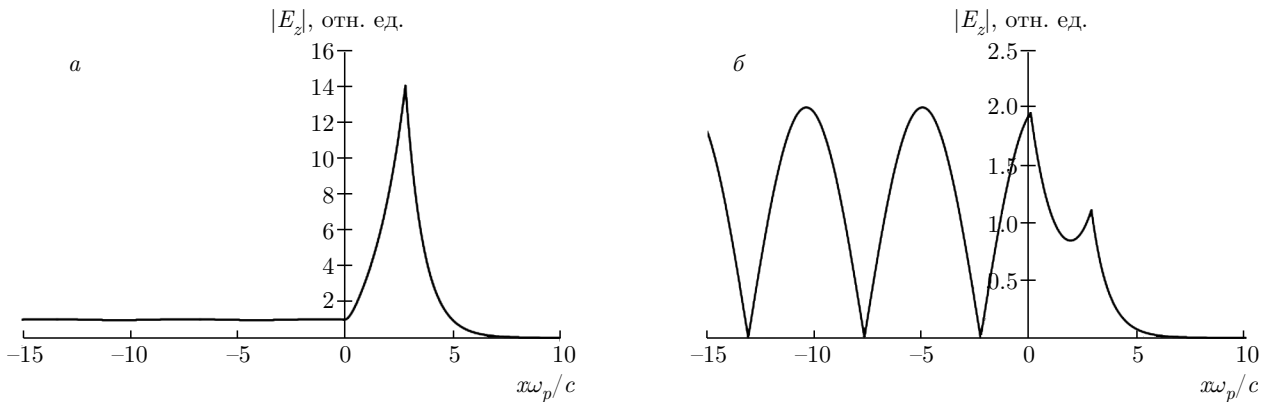


Рис. 2. Пространственное распределение поля волны при $\omega/\omega_p = 0.592$ (а), 0.53 (б)

Коэффициент отражения по-прежнему имеет ярко выраженный резонансный характер. Заметим, что рис. 1 является результатом оптимизации системы по углу падения α и частоте ω . В частности, при любой частоте из области существования поверхностной волны можно подобрать угол, при котором коэффициент отражения достигает локального минимума. Меняя далее частоту и подбирая при этом угол, можно достичь абсолютного минимума коэффициента отражения.

На рис. 2 изображен модуль комплексной функции (5) в зависимости от безразмерной координаты $x\omega_p/c$. В случае рис. 2а имеет место резонансное возбуждение поверхностной плазменной волны: амплитуда достигает резкого максимума на границе плазмы при $x\omega_p/c = 2.8$ и экспоненциально убывает в обе стороны от границы. Видно также отсутствие отраженной от границы $x\omega_p/c = 0$ волны, что согласуется с обращением в нуль коэффициента отра-

жения (рис. 1б)³. В случае рис. 2б незначительно изменена частота (уменьшена всего на 10%). Видно, что резонанс пропал, поскольку амплитуда отраженной волны практически совпала с амплитудой падающей волны.

На рис. 3 показано пространственное распределение потока энергии для резонансного случая (верхняя кривая) и нерезонансного случая (нижняя кривая). Обратим внимание, что нижняя кривая построена в десятикратно увеличенном масштабе. В резонансном случае в области вне плазмы поток энергии большой, что обусловлено отсутствием отраженной волны. Уменьшение потока вглубь плазмы связано с поглощением энергии за счет столкновений. В нерезонансном случае поток энергии суще-

³ Модуль первого выражения в (5) изменяется от $|A| - |B|$ до $|A| + |B|$, т.е. постоянен при $B = 0$ и может обращаться в нуль при $|A| = |B|$.

ственно меньше (примерно в 260 раз), что обусловлено почти полным отражением падающей волны. В любом случае поглощение волны в плазме происходит в слое толщиной порядка $\delta_\nu = |k_{x2}|^{-1}$. При малой частоте столкновений величина δ_ν определяется скинированием поперечного поля в плазме в области частот $\omega < \omega_p$, а поглощение определяется столкновениями. При $\nu = 0$ проникновение поля в плазму на конечную глубину δ_ν есть, а поглощения нет. При этом поток (14) тождественно равен нулю, а при $\nu \neq 0$ на резонансной частоте поток достигает максимального значения.

8. Обсуждая резонансный характер возбуждения поверхностной плазменной волны плоской электромагнитной волной, падающей на границу плазмы, мы допустили существенную неточность. Дело в том, что формула (24) справедлива для границы плазменного и вакуумного полупространств. В схеме (22) плазменное полупространство граничит не с вакуумным полупространством, а с вакуумным зазором. При этом волновое число поверхностной волны должно определяться не из второго уравнения (20), а из существенно более сложного дисперсионного уравнения (18). Рассмотрим решения уравнения (18), тем более что они будут необходимы нам

для вычисления интегралов в решении (11). Ограничимся областью низких частот, $\omega^2 < \omega_p^2$. Низкочастотные волны в системе (22) оказываются частично локализованными волнами. Поскольку такие волны представляют самостоятельный интерес, будем решать уравнение (18) относительно частоты $\omega(k_z)$. Решения этого уравнения относительно волнового числа $k_z(\omega)$ находятся аналогично (они потребуются в дальнейшем при аналитическом вычислении интегралов в (11)).

В коротковолновом пределе $k_z^2 \gg \omega_p^2/c^2$ применимо потенциальное приближение. При этом из уравнения (18) имеем

$$\omega = \frac{\omega_p}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \frac{\varepsilon_1 - 1}{\varepsilon_1 + 1} \exp(-2k_z L_0)}. \quad (27)$$

Потенциальная волна (27) является полностью локализованной поверхностной волной (поверхностным плазмоном), поскольку выполнены не только неравенства (19), но и неравенство $k_{x0}^2 < 0$. Для нас волна со спектром (27) интереса не представляет. В длинноволновом пределе $\omega \sim k_z c \ll \omega_p$ ситуация существенно усложняется, что видно из следующих соображений. При $L_0 = 0$ и $L_0 = \infty$ уравнение (18) имеет следующие точные решения [39]:

$$L_0 = \infty: \omega = \sqrt{\frac{1}{2}\omega_p^2 + k_z^2 c^2} - \sqrt{\frac{1}{4}\omega_p^4 + k_z^4 c^4}, \quad (28a)$$

$$L_0 = 0: \omega = \sqrt{\frac{1}{2}\omega_p^2 + \frac{\varepsilon_1 + 1}{2\varepsilon_1} k_z^2 c^2} - \sqrt{\frac{1}{4}\omega_p^4 + \left(\frac{\varepsilon_1 + 1}{2\varepsilon_1}\right)^2 k_z^4 c^4 + \frac{\varepsilon_1 - 1}{2\varepsilon_1} \omega_p^2 k_z^2 c^2}. \quad (28b)$$

Волны (28a), (28b) являются полностью локализованными поверхностными волнами. В длинноволновом пределе из (28a), (28b) имеем (это случай поверхностных фотонов)

$$\omega = \begin{cases} k_z c \left(1 - \frac{k_z^2 c^2}{2\omega_p^2}\right), & L_0 = \infty, \\ k_z \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_1}} \left(1 - \frac{k_z^2 c^2}{2\omega_p^2}\right), & L_0 = 0. \end{cases} \quad (29)$$

Очевидно, что при промежуточном значении вакуумного зазора в длинноволновом пределе должны выполняться неравенства

$$\frac{c}{\sqrt{\varepsilon_1}} < \frac{\omega}{k_z} < c. \quad (30)$$

При этом первое неравенство (19) оказывается нарушенным и волна не является локализованной: энергия волны излучается в область $x < 0$. В связи с имеющимся в этом случае оттоком энергии, колебания в области вакуумного зазора затухают, чему соответствует появление у частоты ω отрицательной мнимой части.

Аналитическое решение уравнения (18) затруднительно. Поэтому приведем характерное численное решение (рис. 4, $L_0 \omega_p/c = 2.8$, $\nu = 0$). Пунктиром на рисунке проведена «световая» прямая $\omega = k_z c/\sqrt{\varepsilon_1}$. Видно, что затухание имеется именно в той области k_z , где выполнено первое неравенство (19)⁴.

⁴ В окрестности точки $\omega = 0$, $k_z = 0$ решение уравнения (18) подробно не исследовалось.

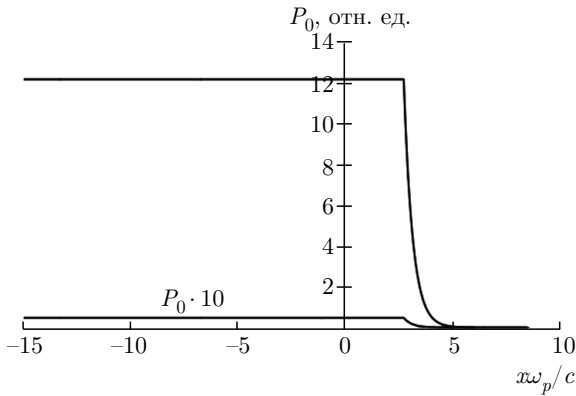


Рис. 3. Пространственное распределение потока энергии

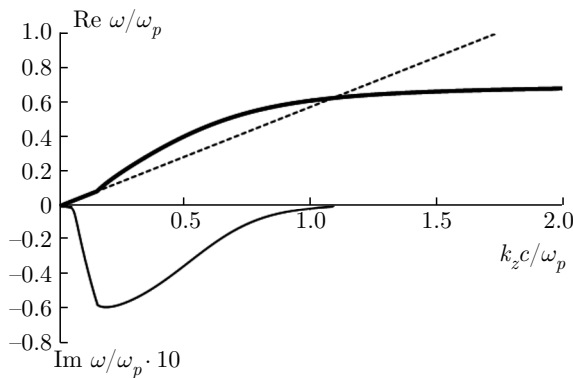


Рис. 4. Комплексная дисперсионная кривая нелокализованной поверхностной волны

На рис. 5 для одной из точек дисперсионной кривой, показанной на рис. 4, ($k_z c / \omega_p = 0.9$, $\omega / \omega_p = 0.592 - 0.0033i$) представлено распределение поля в системе (собственная функция). Модуль поля, изображенный на рис. 5б, мало отличается от распределения, представленного на рис. 2а. Следовательно, в этом случае при падении плоской волны в схеме (22) правильнее говорить не о резонансном возбуждении поверхностной волны на границе плазма–вакуум, а о резонансном возбуждении частично локализованной волны резонатора Фабри–Перо. Эта волна является низшей по частоте модой резонатора. Ее отличительной особенностью является поверхностный характер распределения поля в областях $0 < x < L_0$ и $x > L_0$, а также рост ее амплитуды в области $x < 0$. Этот рост следует из принципа причинности, в соответствии с которым при $\text{Im } \omega < 0$ амплитуда волны в направлении распространения (излучения) возрастает. Заметим, что между полями, изображенными на рис. 2а и рис. 5, имеется существенное различие: в случае рис. 2 объемный характер поля при $x < 0$ обусловлен падаю-

щей из $-\infty$ волной, в случае рис. 5 объемный характер поля при $x < 0$ связан с излучением волны на $-\infty$.

9. Возбуждение поверхностных волн в схеме (22) цилиндрической волной (4) описывается формулами (8)–(11). Рассмотрим результаты компьютерных расчетов по этим формулам. Выберем те же параметры, что были взяты для случая падения плоской волны: $\omega / \omega_p = 0.592$, $(\omega_p / c)L_0 = 2.8$, $\epsilon_1 = 3$, $\nu / \omega_p = 0.01$. Расстояние от линейного источника до плоскости $x = 0$ положим равным $(\omega_p / c)x_0 = -60$ (примерно 10 длин волн). На рис. 6 представлено пространственное распределение компоненты поля E_z вдоль границы раздела плазма–вакуум. Видим, что при удалении от центральной точки $z = 0$ амплитуда высокочастотного электромагнитного поля сначала возрастает, а затем значительно уменьшается. Если координату точки максимума плотности энергии ($z\omega_p / c \approx 120 \dots 140$) разделить на расстояние от источника до границы плазмы ($(\omega_p / c)(|x_0| + L_0) = 62.8$), то получится тангенс угла в направлении наиболее сильного возбуждения волн на границе плазмы. В нашем случае этот угол составляет порядка 1.09 рад, что весьма близко к значению угла ($\alpha = 1.0724$ рад), при котором имеет место резонансное возбуждение поверхностной волны падающей на границу плазмы плоской волной в схеме Отто (рис. 1а). Это указывает на то, что при падении на границу плазмы неоднородной волны от линейного источника также имеет место резонансное возбуждение поверхностной плазменной волны.

Бесспорным доказательством того, что речь идет именно о резонансном возбуждении поверхностной волны, служит рис. 7, на котором показано распределение модуля поля вдоль луча от источника к максимуму плотности электромагнитной энергии на границе плазмы. Наблюдается типичная картина распределения поля в поверхностной волне, причем очень похожая на представленные на рис. 2а и рис. 5. Отличие обусловлено неоднородностью (цилиндричностью) падающей волны и связанной с этим интерференцией отраженных в сторону источника волн. На рис. 8 показано пространственное распределение амплитуды поля. Хорошо виден узкий пик в той области плоскости xz , где имеет место резонансное возбуждение поверхностной волны.

Тот факт, что интенсивное возбуждение поверхностной плазменной волны происходит в достаточно узком диапазоне направлений от источника к плазменной границе (или в достаточно узком диапазоне координаты вдоль границы плазмы, см. рис. 7), означает, что только небольшая часть потока энер-

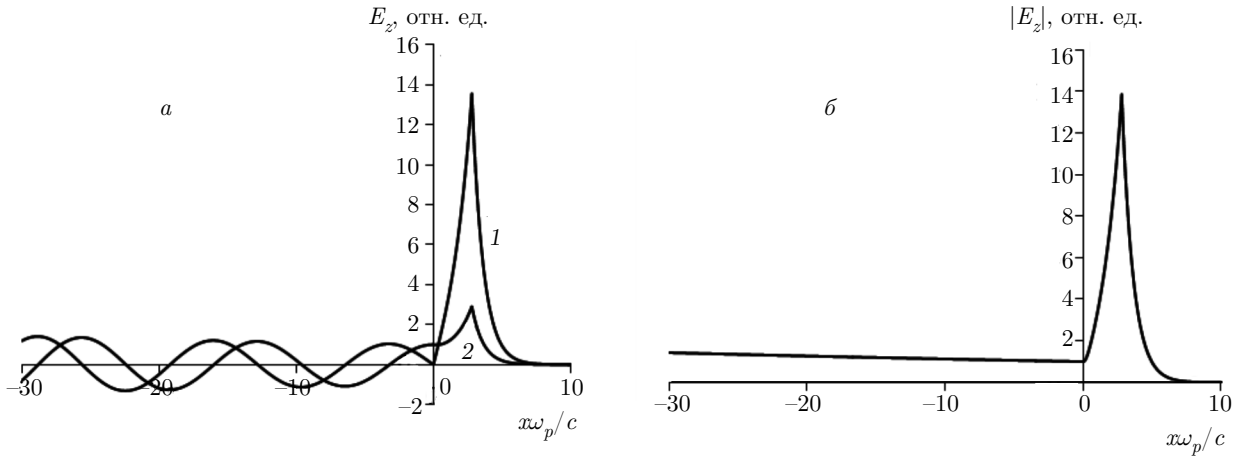


Рис. 5. Распределение поля не локализованной поверхностной волны: $\text{Re } E_z$ (1), $\text{Im } E_z$ (2)

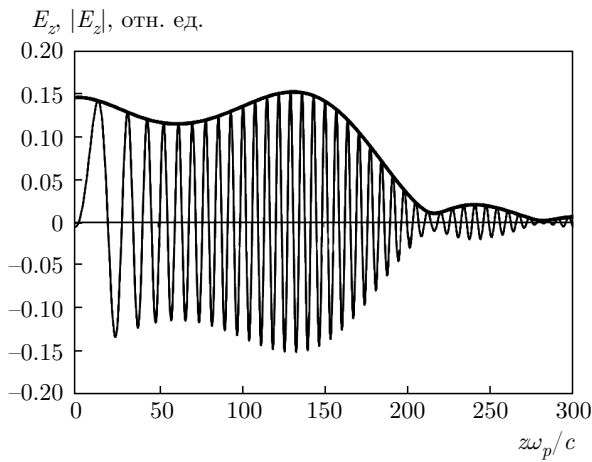


Рис. 6. Распределение поля вдоль границы раздела вакуум-плазма: $\text{Re } E_z$ — нежирная линия, $|E_z|$ — жирная линия

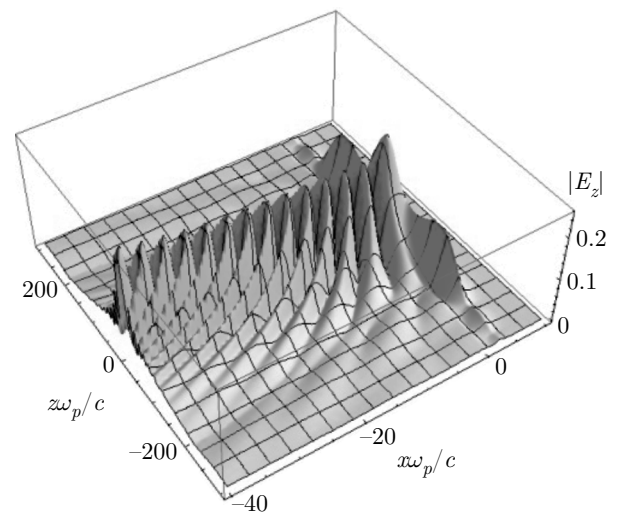


Рис. 8. Поверхность $|E_z(z\omega_p/c, x\omega_p/c)|$

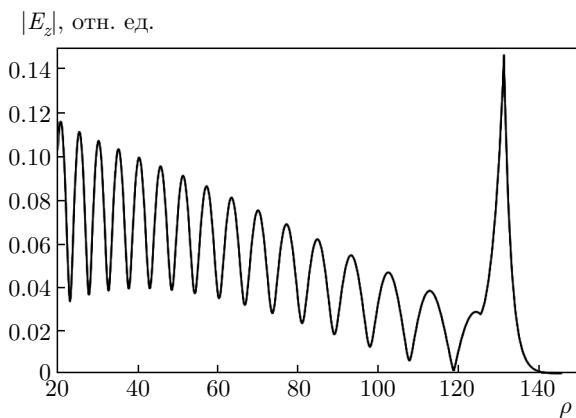


Рис. 7. Распределение поля $|E_z|$ в зависимости от радиальной координаты $\rho = (\omega_p/c)\sqrt{(x-x_0)^2 + z^2}$ вдоль луча $\alpha = 1.07$

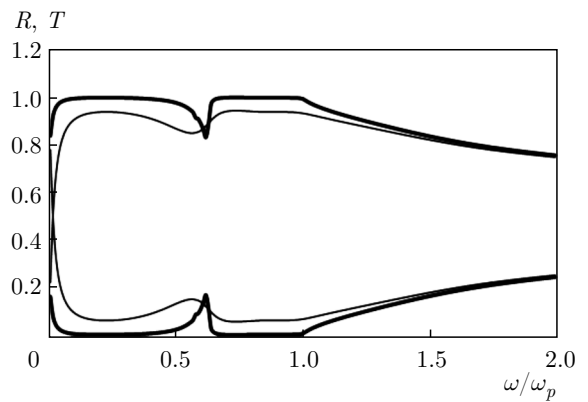


Рис. 9. Коэффициенты отражения (нижние кривые) и коэффициенты прохождения (верхние кривые): жирные линии — $\nu/\omega_p = 0.01$, нежирные линии — $\nu/\omega_p = 0.1$

гии цилиндрической волны источника поглощается в плазме. На рис. 9 представлены интегральные коэффициенты отражения от границы плазмы и прохождения в плазму потока энергии источника, рассчитанные по формулам (14) и (15) для двух значений частот столкновений. Видно, что коэффициент отражения заметно меньше единицы только в достаточно узком диапазоне частот. При этом абсолютный минимум коэффициента отражения (≈ 0.8) и абсолютный максимум коэффициента прохождения в плазму (≈ 0.2) достигаются при $\omega/\omega_p \approx 0.6$, что коррелирует с результатом, представленным на рис. 1а.

10. Рассмотрим теперь некоторые аналитические результаты, основанные на асимптотической оценке интегралов, входящих в (11), при помощи метода перевала в дальней зоне [40, 41]. Представим интегралы в (11) в следующем обобщенном виде:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(k_{x0}, k_{x1}, k_{x2}) \exp(ik_{x1}|x_0| + ik_z z) dk_z. \quad (31)$$

В (31) выделен экспоненциальный множитель, одинаковый для всех интегралов в (11), а функция $f(k_{x0}, k_{x1}, k_{x2})$ для каждого из интегралов своя. Подынтегральное выражение (31) содержит ряд особых точек, которые необходимо учитывать при использовании метода перевала. В частности, это точки ветвления $k_z = \pm k_1$. При вещественной ϵ_1 эти точки лежат на вещественной оси, по которой проходит и контур интегрирования в (31). Чтобы устранить неоднозначность при интегрировании, достаточно считать, что первая среда, хотя и является в нашем рассмотрении недиссипативной, тем не менее имеет исчезающе малую положительную мнимую часть в диэлектрической проницаемости, что соответствует предельно малому поглощению волн. Этот прием задает направление обхода особенностей на вещественной оси: точка ветвления $+k_1$ обходится снизу, а точка ветвления $-k_1$ обходится сверху.

Для удобства рассмотрения часто вместо переменной интегрирования k_z вводят новую переменную, определяемую соотношением $k_z = k_1 \sin \theta$ [40], и тогда интеграл (31) можно переписать в виде

$$I = \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} f(k_{x0}(\theta), k_1 \cos \theta, k_{x2}(\theta)) \times \exp\{ik_1 R \cos(\theta - \theta_0)\} d\theta. \quad (32)$$

В (32) введены обозначения $R = \sqrt{z^2 + x_0^2}$ и $\text{tg } \theta_0 = z/|x_0|$. Функция $f(k_{x0}(\theta), k_1 \cos \theta, k_{x2}(\theta))$ определяет зависимость от новой переменной θ и может

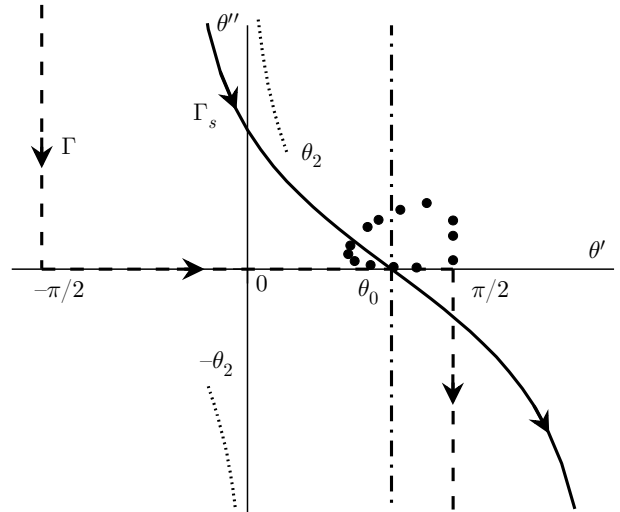


Рис. 10. Комплексная плоскость переменной θ

быть определена из формул (11) и (8), в которых следует положить $A = k_1^2 \cos^2 \theta$. Второй аргумент предэкспоненциальной функции в (32) определяет полностью аналитическую часть зависимости от θ , другие два определяют зависимость через радикалы вида (6). Путь интегрирования Γ по новой переменной выбираем из тех соображений, что $k_z = k_1 \sin \theta$ изменяется в пределах от $-\infty$ до $+\infty$ и интеграл сходится. А именно, от значения $-\pi/2 + i\infty$ комплексной плоскости θ спускаемся по вертикальной прямой до значения $-\pi/2$, далее путь интегрирования проходит по вещественной оси до значения $\pi/2$, а затем по вертикальной прямой до значения $\pi/2 - i\infty$ (см. рис. 10).

При достаточно больших значениях R интеграл (32) может быть оценен методом перевала. Из (32) нетрудно определить точку перевала

$$\theta_s = \theta_0 \quad (33)$$

и значения показателя экспоненты в (32) в этой точке $ik_1 R$. Преобразуя контур интегрирования так, чтобы значения подынтегральной экспоненты убывали от точки перевала наиболее быстрым образом, запишем показатель экспоненты в (32) в виде

$$ik_1 R \cos(\theta - \theta_0) = ik_1 R - s^2, \quad (34)$$

где s пробегает вещественные значения от $-\infty$ до $+\infty$. Значение $s = 0$ соответствует значению θ в точке перевала (33), соответствие других значений s и θ на перевальном контуре определяется вещественной частью соотношения (34). Мнимая часть (34) определяет форму перевального контура Γ_s , а именно, $\cos(\theta' - \theta_0) \text{ch } \theta'' = 1$, где $\theta' = \text{Re } \theta$, $\theta'' = \text{Im } \theta$. Левая

его часть уходит на $-\pi/2 + \theta_0 + i\infty$, правая часть — на $\pi/2 + \theta_0 - i\infty$. В точке перевала перевальный контур пересекает ось абсцисс под углом $-\pi/4$ (см. рис. 10). При достаточно больших R значение интеграла (в отсутствие особых точек подынтегральной функции) определяется малой окрестностью перевальной точки, что в соответствии с методом перевала дает

$$I_s = \sqrt{\frac{2}{\pi k_1 R}} e^{-i\pi/4} f(k_{x0}(\theta_0), k_1 \cos \theta_0, k_{x2}(\theta_0)) \times e^{ik_1 R}. \quad (35)$$

Выражение (35) в зависимости от выбора функции f описывает падающую, отраженную и прошедшую волны.

При переходе к новой переменной в комплексной плоскости θ точка ветвления, соответствующая $k_z = \pm k_1$, уже отсутствует, но имеются радикалы k_{x0} и k_{x2} . Легко проверить, что при изменении знака у k_{x0} выражения в (11), обобщенно обозначенные в (32) через f , не меняются. Это значит, что подынтегральная функция в (32) не имеет точек ветвления $k_z = \pm k_0$, несмотря на наличие радикала k_{x0} . Радикал k_{x2} определяет точки ветвления $k_z = \pm k_2$. На комплексной плоскости θ им соответствуют значения $\theta = \pm \theta_2 = \pm \arcsin(k_2/k_1)$. Если под средой с индексом «2» подразумевать плазму, то при $\omega < \omega_p$ одна из точек ветвления (верхняя) лежит в области $\theta' > 0$ и $\theta'' > 0$. Другая (нижняя) расположена симметрично относительно начала координат (в бесстолкновительном пределе обе точки ветвления при $\omega < \omega_p$ лежат на мнимой оси комплексной плоскости θ). Для выбора однозначного решения следует провести разрезы на комплексной плоскости θ и при интегрировании оставаться на одном листе римановой поверхности. Проведем разрезы исходя из условия отсутствия возмущений при $x \rightarrow +\infty$, т.е. линия разреза будет определяться условием $\text{Im } k_{x2} = 0$, а на выбранном листе римановой поверхности $\text{Im } k_{x2} > 0$. Легко получить уравнение, определяющее линию разреза: $\sin 2\theta' \text{sh } 2\theta'' = 2 \text{Im } \varepsilon_2/\varepsilon_1$, она идет от точки ветвления до значения $\pm i\infty$ для верхней и нижней точек ветвления соответственно (пунктирные линии на рис. 10). При деформации исходного контура интегрирования в перевальный верхняя из точек ветвления может зацепляться за контур интегрирования (на рис. 10 этот случай не показан) и к выражению (35) мы должны добавить интеграл по «петле», охватывающей эту точку ветвления и идущей по бе-

регам разреза. Этот интеграл, как известно, отвечает за так называемую боковую волну [40, 41].

Интеграл вида (32) по петле, идущей по берегам разреза вокруг точки ветвления $\theta = \theta_2$, может быть сведен к интегралу по правому берегу разреза в направлении от точки ветвления до $+i\infty$:

$$I_2 = \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma_2} (f(k_{x0}(\theta), k_1 \cos \theta, k_{x2}(\theta)) - f(k_{x0}(\theta), k_1 \cos \theta, -k_{x2}(\theta))) \times \exp\{ik_1 R \cos(\theta - \theta_0)\} d\theta. \quad (36)$$

Для вычисления интеграла (36) применим одну из модификаций метода наискорейшего спуска. А именно, деформируем контур интегрирования таким образом, что при удалении от точки ветвления значения подынтегральной экспоненты убывали наиболее быстрым образом, т.е. представим

$$ik_1 R \cos(\theta - \theta_0) = ik_1 R \cos(\theta_2 - \theta_0) - s, \quad (37)$$

где s пробегает вещественные значения от 0 до $+\infty$. Значение $s = 0$ соответствует значению $\theta = \theta_2 = \theta'_2 + i\theta''_2$, а контур интегрирования определяется уравнением

$$\cos(\theta' - \theta_0) \text{ch } \theta'' = \cos(\theta'_2 - \theta_0) \text{ch } \theta''_2$$

и подходит к точке θ_2 под углом, тангенс которого равен $\text{tg}(\theta'_2 - \theta_0)/\text{th } \theta''_2$. С другой стороны контур интегрирования уходит к значению $-\pi/2 + \theta_0 + i\infty$. Применение к (36) модификации метода перевала на случай, когда на одном из концов контура интегрирования достигается наибольшее значение вещественной части показателя экспоненты, приводит к оценке

$$I_2 = \sqrt{\frac{\sin 2\theta_2}{i\pi k_1 R^3 \sin(\theta_2 - \theta_0)}} f'_3(k_{x0}(\theta_2), k_1 \cos \theta_2, 0) \times \frac{\exp\{ik_1 R \cos(\theta_2 - \theta_0)\}}{\sin(\theta_2 - \theta_0)}, \quad (38)$$

где f'_3 означает производную по третьему аргументу, а знак корня выбирается таким, что вещественная его часть положительна. Боковая волна (38) порождается плазменным полупространством и согласно выражению (38) является сильно затухающей вдоль границы плазмы даже в бездиссипативном случае ввиду наличия значительной мнимой части у величины θ_2 .

Кроме точек ветвления, подынтегральные выражения в (11) содержат полюсы — корни дисперсионного уравнения (18). Если при деформации контура интегрирования к перевальному произойдет зацепление за полюс подынтегрального выражения,

то оценка исходного интеграла помимо (35) и (38) должна содержать вклад от этого полюса. Именно этот полюс и отвечает за поверхностную волну. Запишем предэкспоненциальный множитель в (32) в виде

$$f = \frac{f_1(\theta)}{S(\omega, \theta)}, \quad (39)$$

где $S(\omega, \theta)$ — дисперсионная функция $S(\omega, k_z)$, выраженная через новую переменную θ . Равенство $S(\omega, \theta) = 0$ представляет собой дисперсионное уравнение и, если $\theta = \theta_p$ — его решение (вообще говоря, комплексное), то вблизи θ_p выражение (39) можно представить в виде

$$f = \frac{f_1(\theta_p)}{S'(\omega, \theta_p)(\theta - \theta_p)}. \quad (40)$$

В итоге полюс, который зацепляется за перевальный контур при деформации, дает вклад в интеграл (32)

$$I_p = \pm \frac{2if_1(\theta_p)}{S'(\omega, \theta_p)} \exp\{ik_1R \cos(\theta_p - \theta_0)\}. \quad (41)$$

Знак в правой части (41) определяется направлением обхода полюса при деформации контура. При $\theta_0 < \text{Re} \theta_p < \pi/2$ следует взять знак «-», в остальных случаях — знак «+».

Среди множества корней дисперсионного уравнения (18) не все будут давать сколь-нибудь существенный вклад в оценку интеграла (32), даже если они лежат на рассматриваемом листе римановой поверхности и зацепляются за перевальный контур. На рис. 10 штрихпунктирной линией представлена одна из линий уровня подынтегральной экспоненты, вторая из этих линий совпадает с вещественной осью. Линии уровня делят комплексную плоскость на четыре сектора: два из них соответствуют убыванию подынтегрального выражения (те, через которые проходит перевальный контур), два других — возрастанию. Зацепиться за перевальный контур могут только полюсы, лежащие в секторах, где он проходит. Причем не пренебрежимо малый вклад по сравнению с вкладом от точки перевала будут давать только те из них, которые находятся вблизи линий уровня, точнее, той линии уровня, которая совпадает с вещественной осью. На рис. 10 для параметров системы, использованных выше, отдельными точками представлены положения корней дисперсионного уравнения для набора частот из диапазона $\omega/\omega_p = 0.65 \dots 0.05$. Наибольший вклад в интеграл дают корни дисперсионного уравнения, лежащие вблизи точки перевала. Соответствующие

этим корням частоты отвечают условиям резонансного возбуждения поверхностной волны.

В случае, когда полюс (корень дисперсионного уравнения) оказывается вблизи перевальной точки, требует уточнения и основная формула метода перевала (35) [40]. Запишем (39) в виде

$$f = \frac{f_1(\theta(s))}{\frac{S(\omega, \theta(s))}{s^2 - s_p^2}}, \quad (42)$$

выделив полюсы $s = \pm s_p$, соответствующие при замене (34) полюсу $\theta = \theta_p$. Первый множитель в знаменателе (42) уже не содержит нулей при $s = \pm s_p$. Так приходим к асимптотической оценке интеграла вблизи перевальной точки:

$$I_s = J_0(\sqrt{2}s_p) \sqrt{\frac{2}{\pi k_1 R}} e^{-i\pi/4} \times f(k_{x0}(\theta_0), k_1 \cos \theta_0, k_{x2}(\theta_0)) e^{ik_1 R}, \quad (43)$$

где

$$J_0(x) = \frac{x}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\xi^2/2}}{x - \xi} d\xi. \quad (44)$$

Формула (43) отличается от (35) только наличием множителя $J_0(\sqrt{2}s_p)$. Область значений s , при которых этот множитель еще существует, составляет диапазон $-1 < s < 1$. Если $|s_p|$ значительно превышает единицу, то можно использовать асимптотическое выражение для $J_0(x)$:

$$J_0(x) \approx 1 + \frac{1}{x^2} \quad \text{при} \quad |x| \gg 1. \quad (45)$$

В итоге мы возвращаемся к формуле (35). Похожая на $J_0(x)$ функция (обозначаемая иногда $J_+(x)$) часто используется в кинетической теории плазмы [32]. В отличие от (44) функция $J_+(x)$ задается не определенным интегралом, а контурным, при этом контур интегрирования проходит по вещественной оси, огибая особую точку $\xi = x$ снизу. То есть при $\text{Im} x > 0$ функции $J_0(x)$ и $J_+(x)$ совпадают, а при $\text{Im} x < 0$ различаются на $\sqrt{2\pi} i x e^{-x^2/2}$. Функция $J_+(x)$ аналитически продолжается из области $\text{Im} x > 0$ в область $\text{Im} x < 0$, а функция $J_0(x)$ имеет разрыв при переходе вещественной оси.

Приведенные выше решения представлены на рис. 11 в зависимости от координаты вдоль поверхности на границе плазма-вакуум при $x = L_0$ для частот столкновений $\nu/\omega_p = 0$ и $\nu/\omega_p = 0.01$ при тех же остальных параметрах. Жирной линией на

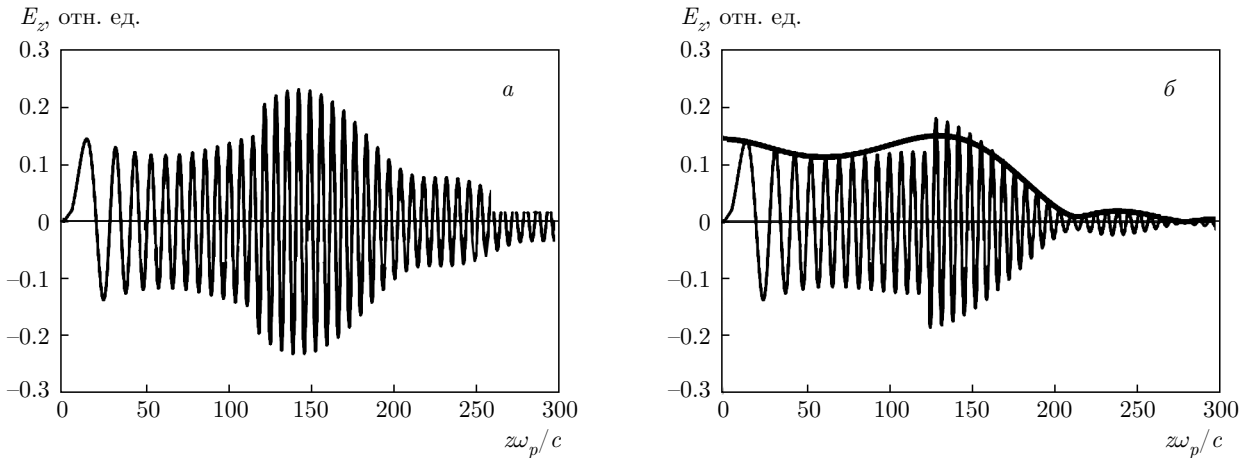


Рис. 11. Зависимость поля $\text{Re } E_z$ от координаты вдоль поверхности на границе плазма–вакуум при $\nu/\omega_p = 0$ (а), 0.01 (б)

рис. 11б изображена огибающая с рис. 6. В целом результаты аналитического исследования с достаточной степенью точности соответствуют полному численному нахождению интегралов в (11). Из рисунков видно, что начиная со значения $z\omega_p/c \approx 120 \dots 130$ амплитуда поля увеличивается. Эти значения координаты соответствуют пересечению полюсом (нулем дисперсионного уравнения) перевального контура и, следовательно, возбуждению поверхностной волны. С ростом частоты столкновений в плазме эффективность возбуждения поверхностной волны снижается. При значениях $z\omega_p/c$, меньших указанных выше, поверхностная волна отсутствует и поле E_z определяется суперпозицией полей падающей и отраженной волн. При этом, как и следовало ожидать, значения E_z в этом диапазоне $z\omega_p/c$ слабо зависят от частоты столкновений в плазме.

Таким образом, при некотором значении z_0 , соответствующем углу падения плоской волны, при котором наблюдается минимум коэффициента отражения, происходит возбуждение поверхностной волны и с этого значения z_0 начинается ее распространение вдоль поверхности. При других значениях z поверхностная волна падающей цилиндрической волной уже не возбуждается.

11. Аналогично можно рассмотреть возбуждение поверхностной волны на границе раздела двух слоев плазмы разной плотности. В этом случае диэлектрическую проницаемость среды с индексом «0» в (1) следует определить формулой

$$\varepsilon_0 = 1 - \frac{\omega_{p0}^2}{\omega(\omega + i\nu_0)}. \tag{46}$$

Положим также $\varepsilon_1 = 1$, т.е. будем рассматривать систему вакуум–плазма–плазма. Как известно [39], на границе раздела слоев плазмы разной плотности возможно распространение поверхностной волны, волновое число которой определяется формулой

$$k_z^2 = \frac{|(\omega_p^2 - \omega^2)(\omega^2 - \omega_{p0}^2)|}{2c^2(\Omega^2 - \omega^2)}, \tag{47}$$

$$\omega \in (\min(\omega_p, \omega_{p0}), \Omega),$$

где $\Omega = \sqrt{(\omega_p^2 + \omega_{p0}^2)/2}$. Случай $\omega_{p0} < \omega_p$ практически не отличается от уже рассмотренного, а все результаты в целом сохраняют свою силу. В частности, расположение характерных точек на комплексной плоскости θ аналогично показанному на рис. 11. Если $\omega_{p0} > \omega_p$, то волна с частотой $\omega_p < \omega < \Omega$, падающая из среды с индексом «1», оказывается непроникающей в плазму с диэлектрической проницаемостью ε_0 при любом угле падения. Кроме того, точки ветвления $\theta = \pm\theta_2 = \pm \arcsin(\sqrt{\varepsilon_2})$ в бесстолкновительном пределе лежат уже на вещественной оси комплексной плоскости θ , а при учете слабых столкновений в первом и третьем квадрантах вблизи вещественной оси θ . Причем во многих практически важных случаях расположение характерных точек на комплексной плоскости θ таково, что точка перевала оказывается вблизи как полюса, так и точки ветвления. В связи с этим получение каких-либо аналитических выражений для поля возбуждаемой поверхностной волны затруднено.

12. В работе исследовано возбуждение поверхностных плазменных волн цилиндрической электромагнитной волной. Волны по структуре близкой к цилиндрической возникают при использовании штыревых дипольных антенн. Как и в случае

плоской падающей волны, возбуждения поверхностных волн на границе двух полупространств не происходит и поэтому в работе рассмотрена слоистая плазменно-диэлектрическая структура. В частности, проанализированы структуры: диэлектрик–вакуум–плазма и вакуум–плазма–плазма. При падении цилиндрической волны на слоистую структуру возбуждение поверхностной волны происходит в достаточно узком диапазоне частот и углов распространения, соответствующих условию возбуждения поверхностной плазменной волны плоской электромагнитной волной. В работе получены аналитические интегральные выражения для электромагнитного поля в каждой из областей слоистой структуры. На основе этих выражений вычислены структуры поля, потока электромагнитной энергии, найдены интегральные коэффициенты отражения и прохождения. Однако такой численный анализ не позволяет выделить различные составляющие полного электромагнитного поля, такие как поверхностная волна на границе раздела, боковая волна и т. п. Для этих целей были использованы асимптотические методы — метод перевала и его модификации, примененные к выражению для поля в виде фурье-интеграла. Падающая, отраженная и прошедшая волны определяются вкладом в интеграл от окрестности перевальной точки. Боковая волна определяется вкладом в интеграл при интегрировании по берегам разреза вблизи точек ветвления подынтегральной функции. Во всех случаях вклад от боковой волны пренебрежимо мал. Поверхностная волна определяется вкладом от полюса подынтегрального выражения (корня дисперсионного уравнения). Этот вклад возникает при пересечении полюсом перевального контура.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. Sommerfeld, *Math. Ann.* **47**, 317 (1896).
2. J. Zenneck, *Ann. Physik.* **328**, 846 (1907).
3. A. Sommerfeld, *Ann. Physik.* **333**, 665 (1909).
4. H. Weyl, *Ann. Physik.* **365**, 481 (1919).
5. V. Fock, *Ann. Physik.* **409**, 401 (1933).
6. B. Van der Pol, *Physica* **2**, 843 (1935).
7. Ф. Франк, Р. Мизес, *Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики*, ч. 2, ОНТИ (1937).
8. Ю. Б. Башкуев, В. Б. Хаптанов, М. Г. Дембелов, Письма в ЖТФ **36**(3), 88 (2010) [Yu. B. Bashkuev, V. B. Khaptanov, and M. G. Dembelov, *Tech. Phys. Lett.* **36**(2), 136 (2010)].
9. В. И. Байбаков, В. Н. Дацко, Ю. В. Кистович, УФН **157**, 722 (1989) [V. I. Baibakov, V. N. Datsko, and Yu. V. Kistovich, *Sov. Phys. Usp.* **32**, 378 (1989)].
10. В. Н. Дацко, А. А. Копылов, УФН **178**, 109 (2008) [V. N. Datsko and A. A. Kopylov, *Phys.-Usp.* **51**, 101 (2008)].
11. А. В. Кукушкин, УФН **179**, 801 (2009) [A. V. Kukushkin, *Phys.-Usp.* **52**, 755 (2009)].
12. А. В. Кукушкин, А. А. Рухадзе, К. З. Рухадзе, УФН **182**, 1205 (2012) [A. V. Kukushkin, A. A. Rukhadze, and K. Z. Rukhadze, *Phys.-Usp.* **55**, 1124 (2012)].
13. И. Н. Карташов, М. В. Кузелев, *Физика плазмы* **40**, 749 (2014) [I. N. Kartashov and M. V. Kuzelev, *Plasma Phys. Rep.* **40**, 650 (2014)].
14. К. С. Бекховская, И. Л. Богданкевич, Р. С. Стрелков, В. Р. Тараканов, и Д. К. Ул'янов, *Plasma Phys. Rep.* **37**, 1119 (2011).
15. П. С. Стрелков, И. Е. Иванов, Д. В. Шумейко, *Физика плазмы* **38**, 536 (2012) [P. S. Strelkov, I. E. Ivanov, and D. V. Shumeiko, *Plasma Phys. Rep.* **38**, 488 (2012)].
16. П. С. Стрелков, В. П. Тараканов, И. Е. Иванов, Д. В. Шумейко, *Физика плазмы* **40**, 738 (2014) [P. S. Strelkov, I. E. Ivanov, D. V. Shumeiko, and V. P. Tarakanov, *Plasma Phys. Rep.* **40**, 640 (2014)].
17. И. Н. Карташов, М. В. Кузелев, П. С. Стрелков, В. П. Тараканов, *Физика плазмы* **44**, 250 (2018) [I. N. Kartashov, M. V. Kuzelev, P. S. Strelkov, and V. P. Tarakanov, *Plasma Phys. Rep.* **44**, 289 (2018)].
18. М. В. Кузелев, А. А. Рухадзе, П. С. Стрелков, *Плазменная релятивистская СВЧ-электроника*, Ленанд, Москва (2018).
19. М. В. Кузелев, Н. Г. Орликовская, ЖЭТФ **150**, 1252 (2016) [M. V. Kuzelev and N. G. Orlikovskaya, *JETP* **123**, 1090 (2016)].
20. И. Н. Карташов, М. В. Кузелев, А. А. Рухадзе, *Физика плазмы* **30**, 60 (2004) [I. N. Kartashov, M. V. Kuzelev, and A. A. Rukhadze, *Plasma Phys. Rep.* **30**, 56 (2004)].
21. И. Н. Карташов, М. В. Кузелев, А. А. Рухадзе, *Физика плазмы* **35**, 194 (2009) [I. N. Kartashov, M. V. Kuzelev, and A. A. Rukhadze, *Plasma Phys. Rep.* **35**, 169 (2009)].

22. А. Ф. Александров, В. М. Шибков, Л. В. Шибкова, ТВТ **48**, 643 (2010) [A. F. Aleksandrov, V. M. Shibkov, and L. V. Shibkova, High Temp. **48**, 611 (2010)].
23. В. М. Шибков, Л. В. Шибкова, В. Г. Громов, А. А. Карачев, Р. С. Константиновский, ТВТ **49**, 163 (2011) [V. M. Shibkov, L. V. Shibkova, V. G. Gromov, A. A. Karachev, and R. S. Konstantinovskii, High Temp. **49**, 155 (2011)].
24. Г. П. Кузьмин, И. М. Минаев, К. З. Рухадзе, В. П. Тараканов, О. В. Тихоневич, Радиотехн. и электр. **57**, 590 (2012) [G. P. Kuzmin, I. M. Minaev, K. Z. Rukhadze, V. P. Tarakanov, and O. V. Tikhonovich, J. Comm. Technol. Electron. **57**, 536 (2012)].
25. Н. Н. Богачев, И. Л. Богданкевич, Н. Г. Гусейн-заде, А. А. Рухадзе, Физика плазмы **41**, 860 (2015) [N. N. Bogachev, I. L. Bogdankevich, N. G. Gusein-zade, and A. A. Rukhadze, Plasma Phys. Rep. **41**, 792 (2015)].
26. В. А. Еськин, А. В. Ивонинский, А. В. Кудрин, Л. Л. Попова, ЖЭТФ **151**, 236 (2017) [V. A. Es'kin, A. V. Ivoninsky, A. V. Kudrin, and L. L. Popova, JETP **124**, 202 (2017)].
27. В. А. Еськин, А. В. Ивонинский, А. В. Кудрин, Физика плазмы **44**, 203 (2018) [V. A. Es'kin, A. V. Ivoninsky, and A. V. Kudrin, Plasma Phys. Rep. **44**, 245 (2018)].
28. H. Raether, *Surface Plasmons on Smooth and Rough Surface and on Gratings*, Springer-Verlag (1988).
29. В. В. Климов, *Наноплазмоника*, Физматлит, Москва (2009).
30. С. А. Майер, *Плазмоника. Теория и приложения*, R&C Dynamics, Москва, Ижевск (2011) [S. A. Mayer, *Plasmonics: Fundamentals and Applications*, Springer (2007)].
31. М. В. Кузелев, Физика плазмы **44**, 430 (2018) [M. V. Kuzelev, Plasma Phys. Rep. **44**, 498 (2018)].
32. А. Ф. Александров, Л. С. Богданкевич, А. А. Рухадзе, *Основы электродинамики плазмы*, Вышш. школа, Москва (1988) [A. F. Alexandrov, L. S. Bogdankevich, and A. A. Rukhadze, *Principles of Plasma Electrodynamics*, Springer-Verlag, Heidelberg (1984)].
33. А. В. Немькин, С. В. Перминов, Л. Л. Фрумин, Д. А. Шапиро, КЭ **45**, 240 (2015).
34. И. М. Ахмеджанов, КЭ **42**, 934 (2012) [I. M. Akhmedzhanov, Quant. Electr. **42**, 934 (2012)].
35. С. А. Урюпин, А. А. Фролов, КЭ **43**, 1132 (2013) [S. A. Uryupin and A. A. Frolov, Quant. Electr. **43**, 1132 (2013)].
36. М. Борн, Э. Вольф, *Основы оптики*, Наука, Москва (1973) [M. Born and E. Wolf, *Principles of Optics*, Pergamon Press (1968)].
37. М. Б. Виноградова, О. В. Руденко, А. П. Сухорюков, *Теория волн*, Наука, Москва (1979).
38. В. А. Ильин, Э. Г. Позняк, *Основы математического анализа*, ч. 2, Физматлит, Москва (2002).
39. М. В. Кузелев, *Волновые явления в средах с дисперсией*, Ленанд, Москва (2017).
40. Л. М. Бреховских, *Волны в слоистых средах*, Изд. АН СССР, Москва (1957).
41. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Гидродинамика*, Наука, Москва (1986).