

МЕТОД ЭФФЕКТИВНОГО ГАМИЛЬТОНИАНА В ТЕРМОДИНАМИКЕ ДВУХ РЕЗОНАНСНО ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ КВАНТОВЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ

A. I. Трубилко^a*, A. M. Башаров^{b,c**}

^a Санкт-Петербургский университет ГПС МЧС России
196105, Санкт-Петербург, Россия

^b Национальный исследовательский центр «Курчатовский институт»
123182, Москва, Россия

^c Московский физико-технический институт (технический университет)
141701, Долгопрудный, Московская обл., Россия

Поступила в редакцию 15 марта 2019 г.,
после переработки 15 марта 2019 г.
Принята к публикации 2 апреля 2019 г.

Классическая задача о двух резонансно взаимодействующих осцилляторах, каждый из которых резонансно связан со «своим» термостатом, исследована на основе метода эффективного гамильтониана и квантового стохастического дифференциального уравнения (в противоположность известным «глобальному» и «локальному» подходам). Показано, что во втором порядке алгебраической теории возмущений каждый из осцилляторов оказывается также связанным с «чужим» термостатом. Вычислены тепловые потоки в стационарном состоянии и доказано, что никакого теплового потока от холодного термостата к горячему, о чем свидетельствуют некоторые результаты локального подхода, не возникает.

DOI: 10.1134/S0044451019090037

1. ВВЕДЕНИЕ

В последнее время наблюдается интерес к области, получившей название квантовая термодинамика. С одной стороны, он обусловлен фундаментальным аспектом, связанным с возможностью непосредственного получения термодинамических законов из квантовых динамических уравнений движения. С другой стороны, он определен и чисто практическими интересами — описание переноса энергии в квантовых устройствах является принципиальным вопросом для целей новых технологий и создания термодинамических устройств, определенных проявлением квантовой природы взаимодействий. В качестве примеров приведем исследование квантового транспорта в физических системах, например, в ультрахолодных атомах [1–4], квантовых точках

[5], молекулярных, ионных и твердотельных систем [6–8]. Именно такие системы разной физической природы, как предполагается, могут служить основными базовыми элементами квантовых сетей, связь между элементами в которой осуществляется посредством организации различного рода взаимодействий между ними. Они же могут служить основой квантовых рефрижераторов [9] и квантовых тепловых машин [10–13]. При этом каждый элемент системы необратимым образом взаимодействует и со своим окружением. В этой связи центральной при описании является задача получения кинетического уравнения для открытой квантовой системы, которая отвечает реализованным физическим условиям.

В вопросе получения/применения кинетического уравнения следует различать подходы математиков и физиков. Математики начинают с абстрактных общих представлений о кинетическом уравнении и привлекают те или иные модельные операторы взаимодействия [14–17]. Физики в каждой конкретной физической задаче строят адекватный эффективный гамильтониан и операторы взаимодействия, вы-

* E-mail: trubilko.andrey@gmail.com

** E-mail: basharov@gmail.com

водя далее кинетические уравнения для рассматриваемой задачи [18, 19]. В итоге, и те и другие говорят о кинетическом уравнении в форме Линдблада, однако реальные условия применимости уравнения могут быть разными в различных подходах, что приводит к рассмотрению следствий из решения задач за пределами их применимости. Этим, на взгляд авторов данной статьи, обусловлена часть термодинамических парадоксов. Пример будет рассмотрен ниже.

Одной из простых исследуемых моделей является модель, в которой два связанных между собой квантовомеханических осциллятора взаимодействуют с окружающими их термостатами. В качестве последних могут быть использованы системы, состоящие из большого числа осцилляторов, находящихся в равновесном состоянии и взаимодействующих с выделенной системой квазирезонансным образом. В условиях слабого и марковского характера взаимодействия, когда состояние термостата не изменяется, состояние анализируемой системы описывается кинетическим уравнением в форме Линдблада [20, 21], вид которого универсален и не зависит от физической природы диссилирующей системы. Исследования динамики подобных открытых осцилляторных систем в последнее время сопровождаются активным обсуждением вопроса о выполнении законов термодинамики в квантовом мире.

Другие системы — открытые осцилляторные системы здесь выделяются по следующим причинам. С одной стороны, речь идет о широко распространенных и реализуемых на практике моделях типа одномодовых резонаторов, электромагнитные поля которых связаны на зеркалах с полями других одномодовых резонаторов и/или с широкополосными стационарными электромагнитными полями. Состояние стационарных электромагнитных полей характеризуется температурой (и мы будем их именовать термостатными полями с заданной температурой), причем сами широкополосные электромагнитные поля эффективно продуцируются лазерами и параметрическими генераторами. С другой стороны, гамильтониан таких систем — открытой системы, к которой относим несколько мод резонаторов, и ее окружения (термостатные поля), — квадратичен по бозонным операторам и имеются методы, начиная от преобразования Боголюбова, обеспечивающие относительно простую диагонализацию таких гамильтонианов [22].

Для описания системы из двух связанных между собой квантовомеханических осцилляторов, взаим-

одействующих с окружающими их термостатами, используют два подхода — локальный и глобальный [23]. В локальном подходе взаимодействие между одинаковыми системами носит резонансный характер и описывается известным гамильтонианом, отвечающим использованию приближения врачающихся волн. Стационарные решения динамических уравнений подсистем определяют термодинамические потоки. В работе [23] утверждается, что при определенном неравенстве между отношениями собственной энергии к его энергетической температуре для двух осцилляторов возможно возникновение ненулевого потока энергии от холодного резервуара к горячему, что естественно нарушает второе начало термодинамики. При этом авторы [23] не применяют к полученному результату никаких ограничений частот фотонов (бозонов) термостатных полей, и поэтому в результате решения как бы точных уравнений появляется поток энергии от холодного термостата к более горячему через открытую систему. Выход из противоречия авторы [23] нашли, применяя глобальный подход, сводящийся к диагонализации полного гамильтониана осцилляторов. Изменяющаяся при этом диссипативная часть кинетического уравнения учитывает малые влияния отдельного осциллятора на термостат соседнего осциллятора, что приводит, по мнению авторов, к восстановлению справедливости второго начала.

В работе [24] рассмотрена близкая задача, где в качестве системы для переноса энергии между термостатами выбраны два двухуровневых атома, связанные между собой модельным взаимодействием, которое ничем не обосновано. Для получения уравнения в рамках глобального подхода предлагается построение базиса на основе последовательных приближений по константе взаимодействия атомов. Это является, по сути, разложением по указанной константе диагонализованного гамильтониана всей системы.

Следует особо выделить и подчеркнуть, что при рассмотрении эволюции любой физической системы в той или иной степени всегда существует ее связь с внешним окружением, которая описывается посредством кинетического уравнения (master equation) рассматриваемой подсистемы. Построение модели такого взаимодействия с окружением часто сопровождается добавлением феноменологических слагаемых, якобы описывающих те или иные виды релаксации и декогерентизации, без строгого вывода уравнения из первых принципов. Однако такой подход, как впервые было отмечено еще в работе [25], мо-

жет приводить к неверным физическим результатам и парадоксам. В частности, в цитированной работе указывалось на нефизическое стационарное состояние сильно связанных квантовых систем. Этот факт также отмечен в работе [26], где исследована диссипация средних характеристик и запутывания двух сильно связанных осцилляторов. Именно поэтому при выводе основного уравнения динамики подсистемы, взаимодействующей с окружением необратимым образом, всегда следует исходить из первых принципов для его построения, чтобы исключить последующие возможные артефакты и парадоксы.

В настоящей работе мы рассматриваем вопрос переноса энергии в описанной выше задаче двух сильно связанных осцилляторов на основе получения кинетического управляющего уравнения для системы методом эффективного гамильтониана и стохастических дифференциальных уравнений (СДУ). Заметим, что опора на диагональный гамильтониан в случае многих степеней свободы часто затушевывает физические процессы, развивающиеся в сложной системе, а в условиях марковского приближения является и превышением точности. Кроме того, обычная теория возмущений в системах, взаимодействующих резонансным образом, приводит к нулевым знаменателям и расходящимся рядам, поэтому в теории открытых квантовых систем используются различные варианты метода эффективного гамильтониана. Наш вариант метода эффективного гамильтониана является алгебраическим аналогом метода усреднения Боголюбова – Крылова – Митропольского, основного метода упрощения уравнений нелинейной и квантовой оптики, содержащих быстро и медленно меняющиеся во времени величины. Алгебраический вариант метода Боголюбова – Крылова – Митропольского называют также алгебраической теорией возмущений [27].

Применение алгебраической теории возмущений накладывает определенные ограничения на частоты термостатных полей, в результате которых противоречивые результаты работы [23] оказываются за рамками применимости модели. Кроме того, наглядным становится появление прямого канала распада осцилляторов в «чужие» термостаты. Поскольку алгебраическая теория возмущений не распространена среди специалистов по нелинейной и квантовой оптике, несмотря на известную всем востребованность метода усреднения Крылова – Боголюбова – Митропольского [28], в Приложении дан вывод слагаемых эффективного гамильтониана методом алгебраической теории возмущений.



Связь на границе

Наглядное представление двух взаимодействующих между собой фотонных мод, каждая из которых взаимодействует на зеркале со своим термостатом

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ЕЕ ЭФФЕКТИВНЫЙ ГАМИЛЬТОНИАН

Пусть имеется два связанных между собой однодомовых резонатора, каждый из которых на зеркале взаимодействует (накачивается или распадается) со своим термостатным полем (см. рисунок). Обозначим частоты мод осцилляторов через ω_c и ω_r , операторы уничтожения квантов соответственно c и r , операторы уничтожения квантов частоты ω термостатных полей a_ω и b_ω . Все они являются операторами, удовлетворяющими бозонным коммутационным соотношениям, и при этом коммутируют друг с другом.

Будем рассматривать указанные взаимодействующие осцилляторы на основе следующего исходного стандартного гамильтониана H^{Ini} :

$$H^{Ini} = H_0 + V_{c-r} + V_c + V_r,$$

включающего гамильтониан осцилляторов и термостатных полей в отсутствие взаимодействия,

$$H_0 = \hbar\omega_c c^\dagger c + \hbar\omega_r r^\dagger r + \sum_\omega \hbar\omega a_\omega^\dagger a_\omega + \sum_\omega \hbar\omega b_\omega^\dagger b_\omega,$$

и операторы их взаимодействия

$$V_{c-r} = g(c+c^\dagger)(r+r^\dagger), \quad V_c = \gamma_c \sum_\omega (c+c^\dagger)(a_\omega+a_\omega^\dagger),$$

$$V_r = \gamma_r \sum_\omega (r+r^\dagger)(b_\omega+b_\omega^\dagger)$$

с константами взаимодействия g , γ_c и γ_r . Указанный гамильтониан берется в качестве исходного во многих работах, начиная, по-видимому, с работы [29], однако дальнейший его анализ с точки зрения получения эффективного гамильтониана и формулировки условий применимости эффективного гамильтониана авторы не встречали.

Обычно в работах, например [23], используют так называемое приближение вращающейся волны,

когда в операторах взаимодействия учитываются лишь слагаемые

$$g(cr^\dagger + c^\dagger r), \gamma_c \sum_{\omega} (ca_\omega^\dagger + c^\dagger a_\omega), \gamma_r \sum_{\omega} (rb_\omega^\dagger + r^\dagger b_\omega).$$

Подчеркнем, что другие слагаемые просто отбрасывают без обсуждения условий такого действия.

Чтобы корректно обосновать необходимость приближения врачающейся волны и определить области применимости такого приближения, применим к исходному гамильтониану алгебраическую теорию возмущений. Для удобства перейдем в представление взаимодействия. Тогда уравнение Шредингера для волнового вектора всей рассматриваемой системы и ее окружения,

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\Psi(t)\rangle = V(t) |\Psi(t)\rangle, \quad (1)$$

определяется оператором взаимодействия

$$V(t) = V_{c-r}(t) + V_c(t) + V_r(t),$$

$$V_{c-r}(t) = g(c e^{-i\omega_c t} + c^\dagger e^{i\omega_c t})(r e^{-i\omega_r t} + r^\dagger e^{i\omega_r t}),$$

$$V_c(t) = \gamma_c \sum_{\omega} (c e^{-i\omega_c t} + c^\dagger e^{i\omega_c t})(a_{\omega} e^{-i\omega t} + a_{\omega}^\dagger e^{i\omega t}),$$

$$V_r(t) = \gamma_r \sum_{\omega} (r e^{-i\omega_r t} + r^\dagger e^{i\omega_r t})(b_{\omega} e^{-i\omega t} + b_{\omega}^\dagger e^{i\omega t}).$$

Явное написание аргумента времени t использовано для указания на представление взаимодействия, к которому величина с таким аргументом относится.

В силу унитарной симметрии квантовой теории перейдем от исходных векторов и операторов к преобразованным по формулам

$$|\tilde{\Psi}(t)\rangle = \mathcal{T}(t) |\Psi(t)\rangle, \quad \mathcal{T}(t) = e^{-iS(t)}, \quad S^\dagger(t) = S(t).$$

Преобразованный вектор будет удовлетворять уравнению Шредингера

$$i\hbar \frac{d|\tilde{\Psi}(t)\rangle}{dt} = \tilde{H}(t) |\tilde{\Psi}(t)\rangle$$

с преобразованным гамильтонианом

$$\tilde{H}(t) = \mathcal{T}(t) V(t) \mathcal{T}^\dagger(t) - i\hbar \mathcal{T}(t) \frac{d}{dt} \mathcal{T}^\dagger(t).$$

В дальнейшем мы будем использовать формальное решение уравнения Шредингера для оператора

эволюции $U(t, t_0)$ с преобразованным гамильтонианом, которое выражается с помощью T -оператора как

$$\begin{aligned} U(t, t_0) &= I + \left(-\frac{i}{\hbar} \right) \int_{t_0}^t \tilde{H}(t') dt' + \left(-\frac{i}{\hbar} \right)^2 \times \\ &\times \int_{t_0}^t \int_{t'}^{t'} \tilde{H}(t') \tilde{H}(t'') dt' dt'' + \dots = \\ &= \overset{\leftarrow}{T} \exp \left(-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t \tilde{H}(t') dt' \right), \\ |\tilde{\Psi}(t)\rangle &= U(t, t_0) |\tilde{\Psi}(t_0)\rangle. \end{aligned}$$

Разложим $\tilde{H}(t)$ и $S(t)$ в ряд по константам взаимодействия:

$$\begin{aligned} S(t) &= S^{(1,0,0)}(t) + S^{(0,1,0)}(t) + S^{(0,0,1)}(t) + \\ &\quad + S^{(2,0,0)}(t) + \dots, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{H}(t) &= \tilde{H}^{(1,0,0)}(t) + \tilde{H}^{(0,1,0)}(t) + \tilde{H}^{(0,0,1)}(t) + \\ &\quad + \tilde{H}^{(1,1,0)}(t) + \tilde{H}^{(1,0,1)}(t) + \tilde{H}^{(0,1,1)}(t) + \tilde{H}^{(2,0,0)}(t) + \dots \end{aligned}$$

Здесь левый индекс каждой тройки верхних индексов описывает порядок по константе связи g между осцилляторами, средний индекс — порядок по константе γ_c , а правый — порядок по константе γ_r . Реально порядок взаимодействия с полями определяется отношением энергии взаимодействия между полями к энергии кванта осциллятора.

С учетом формулы Бейкера — Хаусдорфа нетрудно получить

$$\begin{aligned} \tilde{H}^{(1,0,0)}(t) &= \hbar \frac{dS^{(1,0,0)}(t)}{dt} + V_{c-r}(t), \\ \tilde{H}^{(0,1,0)}(t) &= \hbar \frac{dS^{(0,1,0)}(t)}{dt} + V_c(t), \\ \tilde{H}^{(0,0,1)}(t) &= \hbar \frac{dS^{(0,0,1)}(t)}{dt} + V_r(t), \\ \tilde{H}^{(1,1,0)}(t) &= \hbar \frac{dS^{(1,1,0)}(t)}{dt} - \\ &- \frac{i}{2} [S^{(1,0,0)}(t), V_c(t)] - \\ &- \frac{i}{2} [S^{(1,0,0)}(t), \tilde{H}^{(0,1,0)}(t)] - \\ &- \frac{i}{2} [S^{(0,1,0)}(t), V_{c-r}(t)] - \\ &- \frac{i}{2} [S^{(0,1,0)}(t), \tilde{H}^{(1,0,0)}(t)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{H}^{(1,0,1)}(t) &= \hbar \frac{dS^{(1,0,1)}(t)}{dt} - \\ &- \frac{i}{2} \left[S^{(1,0,0)}(t), V_r(t) \right] - \\ &- \frac{i}{2} \left[S^{(1,0,0)}(t), \tilde{H}^{(0,0,1)}(t) \right] - \\ &- \frac{i}{2} \left[S^{(0,0,1)}(t), V_{c-r}(t) \right] - \\ &- \frac{i}{2} \left[S^{(0,0,1)}(t), \tilde{H}^{(1,0,0)}(t) \right], \quad (2) \\ \tilde{H}^{(2,0,0)}(t) &= \hbar \frac{dS^{(2,0,0)}(t)}{dt} - \\ &- \frac{i}{2} \left[S^{(1,0,0)}(t), V_{c-r}(t) \right] - \\ &- \frac{i}{2} \left[S^{(1,0,0)}(t), \tilde{H}^{(1,0,0)}(t) \right], \dots\end{aligned}$$

Принцип построения формул (2) представляется достаточно прозрачным. Формулы (2) могут лежать в основе разных алгоритмов построения эффективного гамильтониана. Алгебраической теории возмущений отвечает следование идеям метода усреднения Крылова – Боголюбова – Митропольского — в представлении взаимодействия в слагаемых $\tilde{H}^{(1,0,0)}(t)$, $\tilde{H}^{(0,1,0)}(t)$ и др. эффективного гамильтониана $H^{Eff}(t) = \tilde{H}^{(1,0,0)}(t) + \tilde{H}^{(0,1,0)}(t) + \dots$ должны остаться только величины, медленно меняющиеся во времени [19]. Это условие однозначно определяет (в предположении адиабатического включения полей) величины $S^{(i,j,k)}$ и накладывает ограничение на спектр мод широкополосных полей, учитываемых в эффективном гамильтониане $H^{Eff}(t)$ [19, 30]. Тогда величины $S^{(i,j,k)}$ вбирают в себя все быстро меняющиеся во времени величины и можно упростить выражения (2), представив их в виде

$$\begin{aligned}\tilde{H}^{(1,0,0)}(t) &= V'_{c-r}(t), \quad \tilde{H}^{(0,1,0)}(t) = V'_c(t), \\ \tilde{H}^{(0,0,1)}(t) &= V'_r(t), \\ \tilde{H}^{(1,1,0)}(t) &= -\frac{i}{2} \left[S^{(1,0,0)}(t), V''_c(t) \right]' - \\ &- \frac{i}{2} \left[S^{(0,1,0)}(t), V''_{c-r}(t) \right]', \quad (3) \\ \tilde{H}^{(1,0,1)}(t) &= -\frac{i}{2} \left[S^{(1,0,0)}(t), V''_r(t) \right]' - \\ &- \frac{i}{2} \left[S^{(0,0,1)}(t), V''_{c-r}(t) \right]', \\ \tilde{H}^{(2,0,0)}(t) &= -\frac{i}{2} \left[S^{(1,0,0)}(t), V''_{c-r}(t) \right]', \dots\end{aligned}$$

Одним штрихом обозначено выражение, представленное в виде суммы слагаемых, из которой исключены все слагаемые, содержащие быстро меняющиеся функции времени. Двумя штрихами отмечено выражение после отбрасывания из его составляющих всех медленно меняющихся слагаемых.

Будем рассматривать осцилляторы с одинаковыми частотами $\omega_c = \omega_r$. В этом случае эффективный гамильтониан алгебраической теории возмущений в представлении взаимодействия определяется слагаемыми

$$\begin{aligned}\tilde{H}^{(1,0,0)}(t) &= g (cr^\dagger + c^\dagger r), \\ \tilde{H}^{(0,1,0)}(t) &= \gamma_c \sum_{\omega \in (\omega_c)} (ca_\omega^\dagger e^{-i(\omega_c - \omega)t} + c^\dagger a_\omega e^{i(\omega_c - \omega)t}), \\ \tilde{H}^{(0,0,1)}(t) &= \gamma_r \sum_{\omega \in (\omega_r)} (rb_\omega^\dagger e^{-i(\omega_r - \omega)t} + r^\dagger b_\omega e^{i(\omega_r - \omega)t}).\end{aligned}$$

Здесь область суммирования, обозначаемая как (ω_c) , представляет собой область спектра частот осцилляторов окружения вблизи значения $\omega = \omega_c$. Аналогично определяется (ω_r) .

При помощи генераторов первого порядка (см. Приложение) определяем слагаемые второго порядка по константам связи:

$$\begin{aligned}\tilde{H}^{(1,1,0)}(t) &= -\frac{g\gamma_c}{2\hbar\omega_c} \sum_{\omega \in (\omega_r)} r^\dagger a_\omega e^{-i(\omega - \omega_r)t} - \\ &- \frac{g\gamma_c}{2\hbar\omega_c} \sum_{\omega \in (\omega_r)} r a_\omega^\dagger e^{i(\omega - \omega_r)t}, \\ \tilde{H}^{(1,0,1)}(t) &= -\frac{g\gamma_r}{2\hbar\omega_r} \sum_{\omega \in (\omega_c)} c^\dagger b_\omega e^{-i(\omega - \omega_c)t} - \\ &- \frac{g\gamma_r}{2\hbar\omega_r} \sum_{\omega \in (\omega_c)} c b_\omega^\dagger e^{i(\omega - \omega_c)t}.\end{aligned}$$

Выписанные слагаемые эффективного гамильтониана определяют связь каждого из осцилляторов с «чужим» термостатом. Эти каналы взаимодействия не видны явно в исходном гамильтониане H^{Ini} , а параметры связи определяются как связью g между осцилляторами, так и параметрами γ_c или γ_r другого осциллятора.

Другие слагаемые второго порядка определяют сдвиги частот осцилляторов и еще один канал взаимодействия осцилляторов с окружением:

$$\begin{aligned}\tilde{H}^{(2,0,0)}(t) &= -\frac{g^2}{2\hbar\omega_c} (c^\dagger c + r^\dagger r + 1), \\ \tilde{H}^{(0,2,0)}(t) &= -(c^\dagger c + 1) \gamma_c^2 \sum_{\forall \omega \notin (-\omega_c)} \frac{1}{\hbar(\omega + \omega_c)} - \\ &- \gamma_c^2 \sum_{\omega \notin (-\omega_c)} \frac{a_\omega^\dagger a_\omega e^{i\omega t} e^{-i\omega' t}}{2\hbar(\omega + \omega_c)} - \\ &- \gamma_c^2 \sum_{\omega \notin (-\omega_c)} \frac{a_{\omega'}^\dagger a_\omega e^{i(\omega' - \omega)t}}{2\hbar(\omega + \omega_c)},\end{aligned}$$

$$\tilde{H}^{(0,0,2)}(t) = -\gamma_r^2 (r^\dagger r + 1) \sum_{\forall \omega \notin (-\omega_r)} \frac{1}{\hbar(\omega + \omega_r)} - \\ - \gamma_r^2 \sum_{\omega \notin (-\omega_r)} \frac{b_\omega^\dagger b_{\omega'} e^{-i(\omega' - \omega)t}}{2\hbar(\omega + \omega_r)} - \\ - \gamma_r^2 \sum_{\substack{\omega \notin (-\omega_c) \\ \omega' \notin (-\omega_c)}} \frac{b_{\omega'}^\dagger b_\omega e^{i(\omega' - \omega)t}}{2\hbar(\omega + \omega_r)}.$$

Данные слагаемые интерпретируются как лэмбовские сдвиги частот и операторы «штарковского» взаимодействия системы с окружением. Лэмбовские сдвиги учитываем перенормировкой частот, в результате эффективный гамильтониан системы с точностью до второго порядка по константам связи определяется такими операторами:

$$H^{Eff}(t) = H_{c-r}(t) + H_c^{(1)}(t) + H_c^{(2)}(t) + \\ + H_r^{(1)}(t) + H_r^{(2)}(t), \quad (4)$$

$$H_{c-r}(t) = g (cr^\dagger + c^\dagger r), \quad (5a)$$

$$H_c^{(1)}(t) = \\ = \gamma_c \sum_{\omega \in (\omega_c)} \left(ca_\omega^\dagger e^{-i(\omega_c - \omega)t} + c^\dagger a_\omega e^{i(\omega_c - \omega)t} \right), \quad (5b)$$

$$H_c^{(2)}(t) = -\frac{g\gamma_r}{2\hbar\omega_c} \sum_{\omega \in (\omega_c)} c^\dagger b_\omega e^{-i(\omega - \omega_c)t} - \\ - \frac{g\gamma_r}{2\hbar\omega_c} \sum_{\omega \in (\omega_c)} cb_\omega^\dagger e^{i(\omega - \omega_c)t}, \quad (5c)$$

$$H_r^{(1)}(t) = \\ = \gamma_r \sum_{\omega \in (\omega_r)} \left(rb_\omega^\dagger e^{-i(\omega_r - \omega)t} + r^\dagger b_\omega e^{i(\omega_r - \omega)t} \right), \quad (5d)$$

$$H_r^{(2)}(t) = -\frac{g\gamma_c}{2\hbar\omega_c} \sum_{\omega \in (\omega_r)} r^\dagger a_\omega e^{-i(\omega - \omega_r)t} - \\ - \frac{g\gamma_c}{2\hbar\omega_c} \sum_{\omega \in (\omega_r)} ra_\omega^\dagger e^{i(\omega - \omega_r)t}. \quad (5e)$$

Операторами «штарковского» взаимодействия с окружением $\tilde{H}^{(0,2,0)}(t)$ и $\tilde{H}^{(0,0,2)}(t)$ можно пренебречь даже в сравнении с $H_c^{(2)}(t)$ и $H_r^{(2)}(t)$. Такое пренебрежение основано на представлении $\tilde{H}^{(0,2,0)}(t)$ и $\tilde{H}^{(0,0,2)}(t)$ квантовыми считающими процессами и результатами анализа их роли в атомных открытых системах [30]. Из работы [30] заимствовано использование термина «штарковское» взаимодействие, поскольку учет данных слагаемых весьма сходен с учетом аналогичных слагаемых в теории открытых атомных систем. И именно исходя из такой аналогии, сделан вывод, что в рассматриваемой модели двух резонансно взаимодействующих

осцилляторов роль $\tilde{H}^{(0,2,0)}(t)$ и $\tilde{H}^{(0,0,2)}(t)$ не существенна.

Частоты осцилляторов, первоначально равные между собой, отличаются во втором порядке на величину порядка $|\gamma_c^2 - \gamma_r^2|\omega_c^{-1}$, чем пренебрегаем при расчете тепловых потоков, поскольку такие отличия не превышают термодинамических флуктуаций. Подчеркнем, что характерные размеры областей частот термостатных полей, участвующих в резонансном взаимодействии с выделенными осцилляторами, (ω_c) и (ω_r) порядка γ_c^2 и γ_r^2 , что не меньше указанных отличий.

3. КВАНТОВОЕ СТОХАСТИЧЕСКОЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ И КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ

Приведем стандартный вывод кинетического уравнения при помощи формулировки квантового СДУ на основе полученного гамильтониана. Этот вывод неоднократно применялся в случае открытых систем, состоящих из резонансно взаимодействующих атомов [30], а также в случае осцилляторов и атомов [30–32]. Наш случай отличается только учитываемыми термостатами.

В условиях марковского приближения операторы эффективного гамильтониана, описывающие взаимодействие с широкополосными полями, представляют квантовыми рождающими и уничтожающими случайными процессами, заменив суммы по частотам интегралами с бесконечными пределами:

$$H_c^{(1)}(t) dt = \gamma_c (cdA^\dagger(t) + c^\dagger dA(t)), \\ H_r^{(2)}(t) dt = -\frac{g\gamma_c}{2\hbar\omega_c} (rdA^\dagger(t) + r^\dagger dA(t)), \\ H_r^{(1)}(t) dt = \gamma_r (rdB^\dagger(t) + r^\dagger dB(t)), \\ H_c^{(2)}(t) dt = -\frac{g\gamma_r}{2\hbar\omega_c} (cdB^\dagger(t) + c^\dagger dB(t)),$$

$$dA(t) = A(t + dt) - A(t), \quad A(t) = \int_0^t dt' a(t'),$$

$$a(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i(\omega - \omega_c)t} a_\omega,$$

$$dB(t) = B(t + dt) - B(t), \quad B(t) = \int_0^t dt' b(t'),$$

$$b(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i(\omega - \omega_c)t} b_\omega.$$

Дифференциалы Ито стандартных квантовых случайных процессов удовлетворяют алгебре Ито [32]:

$$\begin{aligned} dA(t) dA^\dagger(t) &= (n_c + 1) dt, \quad dA^\dagger(t) dA(t) = n_c dt, \\ dB(t) dB^\dagger(t) &= (n_r + 1) dt, \quad dB^\dagger(t) dB(t) = n_r dt, \\ dB(t) dB(t) &= dA(t) dA(t) = dA(t) dB(t) = \quad (6) \\ &= dA^\dagger(t) dB(t) = dB(t) dt = \\ &= dA(t) dt = dt dt = 0. \end{aligned}$$

Особо подчеркнем, что, несмотря на области формального интегрирования введенных величин, термостатные осцилляторы задействованы лишь на резонансных частотах согласно примененной алгебраической теории возмущений. Это отражают плотности фотонов термостатов n_c и n_r , отвечающих частотам соответственно ω_c и ω_r .

В результате для дифференциала Ито оператора эволюции нетрудно получить квантовое СДУ, которое запишем в безразмерном виде:

$$\begin{aligned} dU(t) &= -iH^{Eff-S}(t) dt U(t) - \\ &- \sum_{k=1,2} \left(\frac{n_k + 1}{2} \bar{\gamma}_k Y_k^\dagger Y_k dt + \frac{n_k}{2} \bar{\gamma}_k Y_k Y_k^\dagger dt + \right. \\ &\quad \left. + i\sqrt{\bar{\gamma}_k} Y_k^\dagger dB_k(t) + i\sqrt{\bar{\gamma}_k} Y_k dB_k^\dagger(t) \right) U(t), \quad (7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H^{Eff-S}(t) &= H_{c-r}(t), \quad dB_1(t) = dA(t), \\ dB_2(t) &= dB(t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_1^\dagger &= c^\dagger - \lambda r^\dagger, \quad Y_1 = c - \lambda r, \\ Y_2^\dagger &= r^\dagger - \lambda c^\dagger, \quad Y_2 = r - \lambda c. \end{aligned} \quad (8)$$

Введены безразмерные величины

$$\bar{\gamma}_1 = \frac{2\pi\gamma_c^2}{\hbar\omega_c^2}, \quad \bar{\gamma}_2 = \frac{2\pi\gamma_r^2}{\hbar\omega_c^2}, \quad \lambda = \frac{g}{2\hbar\omega_c}.$$

В качестве безразмерного времени взята величина $\bar{t} = \omega_c t$, однако у переменной времени мы будем опускать черту над символом, указывающую на ее безразмерный характер. Индекс n нумерует широкополосные поля окружения системы — термостаты A и B . Через n_k обозначены плотности фотонов термостатных полей на резонансной частоте $\omega_c = \omega_r$: n_1 отвечает термостату A , n_2 отвечает термостату B . Эти плотности определяются температурами термостатов T_1 и T_2 соответственно.

Уравнение для матрицы плотности следует из стандартной цепочки преобразований:

$$d\rho(t) \equiv \rho(t + dt) - \rho(t),$$

$$\begin{aligned} \rho(t + dt) &= |\Psi(t + dt)\rangle\langle\Psi(t + dt)| = \\ &= U(t + dt)|\Psi(0)\rangle\langle\Psi(0)|U^\dagger(t + dt), \end{aligned}$$

$$U(t + dt) = U(t) + dU(t),$$

$$\begin{aligned} d\rho(t) &= dU(t)|\Psi(0)\rangle\langle\Psi(0)|U^\dagger(t) + U(t) \times \\ &\times |\Psi(0)\rangle\langle\Psi(0)|dU^\dagger(t) + dU(t)|\Psi(0)\rangle\langle\Psi(0)|dU^\dagger(t). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\rho(t) &= -i [H^{Eff-S}(t), \rho(t)] dt - \\ &- \sum_{k=1,2} \left(\frac{n_k + 1}{2} \bar{\gamma}_k Y_k^\dagger Y_k dt + \frac{n_k}{2} \bar{\gamma}_k Y_k Y_k^\dagger dt + \right. \\ &\quad \left. + i\sqrt{\bar{\gamma}_k} Y_k^\dagger dB_k(t) + i\sqrt{\bar{\gamma}_k} Y_k dB_k^\dagger(t) \right) \rho(t) - \\ &- \rho(t) \sum_{k=1,2} \left(\frac{n_k + 1}{2} \bar{\gamma}_k Y_k^\dagger Y_k dt + \frac{n_k}{2} \bar{\gamma}_k Y_k Y_k^\dagger dt - \right. \\ &\quad \left. - i\sqrt{\bar{\gamma}_k} dB_k^\dagger(t) Y_k - i\sqrt{\bar{\gamma}_k} dB_k(t) Y_k^\dagger \right) + \\ &+ \sum_{k=1,2} \left(\sqrt{\bar{\gamma}_k} Y_k^\dagger dB_k(t) + \sqrt{\bar{\gamma}_k} Y_k dB_k^\dagger(t) \right) \rho(t) \times \\ &\quad \times \sum_{k=1,2} \left(\sqrt{\bar{\gamma}_k} dB_k^\dagger(t) Y_k + \sqrt{\bar{\gamma}_k} dB_k(t) Y_k^\dagger \right). \end{aligned}$$

После усреднения по состояниям вакуумных термостатных полей,

$$\begin{aligned} \text{Tr}_F \rho(t) &= \rho^S(t), \\ \text{Tr}_F \rho(t) dB_k^\dagger(t) dB_{k'}(t) &= \delta_{kk'} n_k \rho^S(t) dt, \end{aligned}$$

$$\text{Tr}_F \rho(t) dB_{k'}(t) dB_k^\dagger(t) = \delta_{kk'} (n_k + 1) \rho^S(t) dt,$$

получаем кинетическое уравнение для матрицы плотности $\rho^S(t)$ рассматриваемых двух фотонных мод ω_c и ω_r в виде

$$\begin{aligned} \frac{d\rho^S(t)}{dt} &= -i [H^{Eff-S}(t), \rho^S(t)] - \\ &- \left\{ \sum_{k=1,2} \bar{\gamma}_k \left(\frac{n_k + 1}{2} Y_k^\dagger Y_k + \frac{n_k}{2} Y_k Y_k^\dagger \right) \rho^S(t) + \right. \\ &\quad \left. + \rho^S(t) \sum_{k=1,2} \bar{\gamma}_k \left(\frac{n_k + 1}{2} Y_k^\dagger Y_k + \frac{n_k}{2} Y_k Y_k^\dagger \right) \right\} + \\ &+ \sum_{k=1,2} \bar{\gamma}_k n_k Y_k^\dagger \rho(t) Y_k + \sum_{k=1,2} \bar{\gamma}_k Y_k \rho(t) (n_k + 1) Y_k^\dagger. \quad (9) \end{aligned}$$

Уравнение (9) с параметрами (8) определяет всю динамику и термодинамику рассматриваемой системы из двух осцилляторов, резонансно взаимодействующих как между собой, так и с окружающими термостатными полями. При этом средние плотности фотонов термостатных полей в силу условий алгебраической теории возмущений берутся на частотах осцилляторов, а именно $\omega_c = \omega_r$. Поэтому при численном моделировании этого уравнения, связав параметры n_k с температурами термостатов и частотами фотонов термостатов [31], нельзя произвольно оперировать со значениями частот фотонов термостатов, как делают в работе [23]. Ниже представим результаты аналитического исследования уравнения (9) в стационарном случае.

Для удобства последующего анализа введем релаксационные операторы Γ_A и Γ_B , определяющие каналы распада в термостаты A и B :

$$\frac{d\rho^S(t)}{dt} = -i [H^{Eff-S}(t), \rho^S(t)] + \\ + \hat{\Gamma}_A \rho^S(t) + \hat{\Gamma}_B \rho^S(t), \quad (9')$$

$$\hat{\Gamma}_A \rho^S(t) = -\bar{\gamma}_1 n_1 Y_1^\dagger \rho(t) Y_1 + \bar{\gamma}_1 Y_1 \rho(t) (n_1 + 1) Y_1^\dagger + \\ + \left\{ \bar{\gamma}_1 \left(\frac{n_1 + 1}{2} Y_1^\dagger Y_1 + \frac{n_1}{2} Y_1 Y_1^\dagger \right) \rho^S(t) + \right. \\ \left. + \rho^S(t) \bar{\gamma}_1 \left(\frac{n_1 + 1}{2} Y_1^\dagger Y_1 + \frac{n_1}{2} Y_1 Y_1^\dagger \right) \right\},$$

$$\hat{\Gamma}_B \rho^S(t) = -\bar{\gamma}_2 n_2 Y_2^\dagger \rho(t) Y_2 + \bar{\gamma}_2 Y_2 \rho(t) (n_2 + 1) Y_2^\dagger + \\ + \left\{ \bar{\gamma}_2 \left(\frac{n_2 + 1}{2} Y_2^\dagger Y_2 + \frac{n_2}{2} Y_2 Y_2^\dagger \right) \rho^S(t) + \right. \\ \left. + \rho^S(t) \bar{\gamma}_2 \left(\frac{n_2 + 1}{2} Y_2^\dagger Y_2 + \frac{n_2}{2} Y_2 Y_2^\dagger \right) \right\}. \quad]$$

4. СТАЦИОНАРНОЕ РЕШЕНИЕ КИНЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ И ПОТОКИ ЭНЕРГИИ

Чтобы иметь представление об энергообмене в рассматриваемой системе, вычислим средние значения энергии осцилляторов ω_c и ω_r , т. е. найдем величины $\langle c^\dagger c \rangle = \text{Tr} (c^\dagger c \rho^S(t))$ и $\langle r^\dagger r \rangle = \text{Tr} (r^\dagger r \rho^S(t))$. Оказывается, что из уравнения (9) следует замкнутая система уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle c^\dagger c \rangle &= \text{Tr} \left(c^\dagger c \frac{d\rho^S(t)}{dt} \right) = \\ &= -\bar{g}Y + \bar{\gamma}_1 \left(n_1 - \langle c^\dagger c \rangle + \lambda \frac{X}{2} \right) + \\ &\quad + \lambda \bar{\gamma}_2 \left(\lambda n_2 - \lambda \langle c^\dagger c \rangle + \frac{X}{2} \right), \\ \frac{d}{dt} \langle r^\dagger r \rangle &= \text{Tr} \left(r^\dagger r \frac{d\rho^S(t)}{dt} \right) = \\ &= \bar{g}Y + \bar{\gamma}_2 \left(n_2 - \langle r^\dagger r \rangle + \lambda \frac{X}{2} \right) + \\ &\quad + \lambda \bar{\gamma}_1 \left(\lambda n_1 - \lambda \langle r^\dagger r \rangle + \frac{X}{2} \right), \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= \text{Tr} \left((c^\dagger r + cr^\dagger) \frac{d\rho^S(t)}{dt} \right) = \\ &= -\bar{\gamma}_1 \left(2\lambda n_1 - \lambda \langle c^\dagger c \rangle - \lambda \langle r^\dagger r \rangle + (1 + \lambda^2) \frac{X}{2} \right) - \\ &\quad - \bar{\gamma}_2 \left(2\lambda n_2 - \lambda \langle c^\dagger c \rangle - \lambda \langle r^\dagger r \rangle + (1 + \lambda^2) \frac{X}{2} \right), \\ \frac{dY}{dt} &= \text{Tr} \left(i(c^\dagger r - cr^\dagger) \frac{d\rho^S(t)}{dt} \right) = \\ &= -2\bar{g} (\langle r^\dagger r \rangle - \langle c^\dagger c \rangle) - (1 + \lambda^2) (\bar{\gamma}_1 + \bar{\gamma}_2) \frac{Y}{2}. \end{aligned}$$

Уравнения (10) имеют стационарное решение, обладающее определенной симметрией при заменах индексов $A \leftrightarrow B$ и $1 \leftrightarrow 2$, отражающей исходную перестановочную симметрию задачи:

$$\langle c^\dagger c \rangle = \frac{\bar{\gamma}_1 n_1 \left(\frac{1}{\bar{\gamma}_2 1 + \lambda^2} + 4 \frac{\bar{g}^2}{\bar{\gamma}_1 + \bar{\gamma}_2} \frac{1}{(1 + \lambda^2)^2} \right) + \bar{\gamma}_2 n_2 \left(\frac{\lambda^2}{\bar{\gamma}_1 1 + \lambda^2} + 4 \frac{\bar{g}^2}{\bar{\gamma}_1 + \bar{\gamma}_2} \frac{1}{(1 + \lambda^2)^2} \right)}{4\bar{g}^2 \frac{1}{(1 + \lambda^2)^2} + \bar{\gamma}_1 \bar{\gamma}_2},$$

$$\langle r^\dagger r \rangle = \frac{\bar{\gamma}_2 n_2 \left(\frac{1}{\bar{\gamma}_1 1 + \lambda^2} + 4 \frac{\bar{g}^2}{\bar{\gamma}_1 + \bar{\gamma}_2} \frac{1}{(1 + \lambda^2)^2} \right) + \bar{\gamma}_1 n_1 \left(\frac{\lambda^2}{\bar{\gamma}_2 1 + \lambda^2} + 4 \frac{\bar{g}^2}{\bar{\gamma}_1 + \bar{\gamma}_2} \frac{1}{(1 + \lambda^2)^2} \right)}{4\bar{g}^2 \frac{1}{(1 + \lambda^2)^2} + \bar{\gamma}_1 \bar{\gamma}_2},$$

$$\langle X \rangle = 2 \frac{\lambda}{1 + \lambda^2} \frac{\frac{\bar{\gamma}_1 \bar{\gamma}_2}{\bar{\gamma}_1 + \bar{\gamma}_2} (\bar{\gamma}_1 - \bar{\gamma}_2)}{4\bar{g}^2 \frac{1}{(1 + \lambda^2)^2} + \bar{\gamma}_1 \bar{\gamma}_2} (n_2 - n_1), \quad \langle Y \rangle = 4 \frac{\bar{g}}{1 + \lambda^2} \frac{\frac{\bar{\gamma}_1 \bar{\gamma}_2}{\bar{\gamma}_1 + \bar{\gamma}_2} \frac{1 - \lambda^2}{1 + \lambda^2}}{4\bar{g}^2 \frac{1}{(1 + \lambda^2)^2} + \bar{\gamma}_1 \bar{\gamma}_2} (n_1 - n_2).$$

Теперь нетрудно определить стационарные потоки энергии в имеющиеся термостаты, состояния которых считались неизменными.

1. Поток энергии в термостаты от осциллятора ω_c . От осциллятора ω_c тепловой поток в термостат A определяется по формуле $Q_{c-A} = \hbar\omega_c \text{Tr}(\hat{\Gamma}_A \rho^S(t) c^\dagger c)$. В указанной формуле для наглядности использованы размерные величины. В безразмерном виде (как его отношение к единичному кванту энергии этого осциллятора) имеем

$$\overline{Q}_{c-A} = \frac{\bar{\gamma}_1 \bar{\gamma}_2}{\bar{\gamma}_1 + \bar{\gamma}_2} \frac{4\bar{g}^2 \frac{1}{(1+\lambda^2)^2} + 2\bar{\gamma}_1 \bar{\gamma}_2 \frac{\lambda^2}{1+\lambda^2}}{4\bar{g}^2 \frac{1}{(1+\lambda^2)^2} + \bar{\gamma}_1 \bar{\gamma}_2} (n_1 - n_2).$$

Также от осциллятора ω_c тепловой поток идет и в термостат B ; этот поток вычисляется по формуле $Q_{c-B} = \hbar\omega_c \text{Tr}(\hat{\Gamma}_B \rho^S(t) c^\dagger c)$. В безразмерном виде имеем

$$\overline{Q}_{c-B} = \frac{\bar{\gamma}_1 \bar{\gamma}_2}{\bar{\gamma}_1 + \bar{\gamma}_2} \frac{\lambda^2}{(1+\lambda^2)^2} \frac{4\bar{g}^2 \frac{1}{1+\lambda^2} + 2\bar{\gamma}_1 \bar{\gamma}_2}{4\bar{g}^2 \frac{1}{(1+\lambda^2)^2} + \bar{\gamma}_1 \bar{\gamma}_2} (n_2 - n_1).$$

2. Поток энергии в термостаты от осциллятора ω_r . В «свой» термостат B поток вычисляется по формуле $Q_{r-B} = \hbar\omega_r \text{Tr}(\hat{\Gamma}_B \rho^S(t) r^\dagger r)$. В безразмерном виде его величина в точности равна величине безразмерного потока \overline{Q}_{c-A} , взятого с обратным знаком: $\overline{Q}_{r-B} = -\overline{Q}_{c-A}$.

Как и в случае с осциллятором ω_c , от осциллятора ω_r идет тепловой поток в «чужой» термостат, в данном случае в термостат A , который вычисляется по формуле $Q_{r-A} = \hbar\omega_r \text{Tr}(\hat{\Gamma}_A \rho^S(t) r^\dagger r)$. Подчеркнем, что оба потока в «чужие» термостаты обусловлены взаимодействием между осцилляторами ω_c и ω_r , что наглядно видно на примере соответствующих слагаемых алгебраической теории возмущений. В безразмерном виде обсуждаемый поток дается выражением

$$\overline{Q}_{r-A} = \frac{\bar{\gamma}_1 \bar{\gamma}_2}{\bar{\gamma}_1 + \bar{\gamma}_2} \frac{\lambda^2}{(1+\lambda^2)^2} \frac{4\bar{g}^2 \frac{1}{1+\lambda^2} + 2\bar{\gamma}_1 \bar{\gamma}_2}{4\bar{g}^2 \frac{1}{(1+\lambda^2)^2} + \bar{\gamma}_1 \bar{\gamma}_2} (n_1 - n_2),$$

которое равно по величине и противоположно по знаку соответствующему безразмерному потоку от осциллятора ω_c в «чужой» термостат B .

Если говорить об энергии открытой системы, то она, помимо энергий каждого из осцилляторов ω_c и ω_r , включает также энергию их взаимодействия. Нетрудно видеть, что соответствующие потоки от одного осциллятора к другому равны, так что

$$\begin{aligned} \text{Tr} \left[\hat{\Gamma}_B \rho^S(t) \bar{g} (cr^\dagger + c^\dagger r) \right] &= \\ = -\text{Tr} \left[\hat{\Gamma}_A \rho^S(t) \bar{g} (cr^\dagger + c^\dagger r) \right] &= 2\lambda \frac{\bar{\gamma}_1 \bar{\gamma}_2}{\bar{\gamma}_1 + \bar{\gamma}_2} (n_2 - n_1). \end{aligned}$$

В результате имеем очевидное: сумма потоков от осцилляторов к термостатам задачи равна нулю, а направление потока (в силу равенства частот осцилляторов) определяется температурами термостата — от «горячего» к «холодному». Если горячий термостат — это термостат A , то $n_1 > n_2$. В силу рассмотренных ограничений алгебраической теории возмущений мы не вправе, как это было в работе [23], манипулировать частотами термостатных фотонов, чтобы влиять на значение величины плотности фотонов термостатов. Подчеркнем, что плотности фотонов термостатов n_1 и n_2 вычисляются на одной и той же резонансной частоте $\omega_c = \omega_r$. Таким образом, второе начало термодинамики в динамике открытой системы, состоящей из двух резонансно взаимодействующих осцилляторов, не нарушается.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы продемонстрировали применение алгебраической теории возмущений к задаче о двух резонансно взаимодействующих осцилляторах, каждый из которых резонансно связан со «своим» термостатом. Показано, что взаимодействие между осцилляторами приводит к эффективной связи осцилляторов с «чужими» термостатами. Таким образом, задача о резонансно связанных осцилляторах, каждый из которых распадается в свой термостат, в определенном смысле подобна задаче об одном осцилляторе, связанным с двумя различными термостатами. В более простой задаче также следует применить алгебраическую теорию возмущений, чтобы не иметь дела с «глобальным» подходом для получения результатов, не противоречащих второму началу термодинамики. Вкратце приведем результаты здесь.

Уравнение для матрицы плотности одного осциллятора ω_c , получаемое по изложенной в статье

методике, имеет вид, полностью совпадающий с (9'), только со следующими значениями входящих операторов $H^{Eff-S}(t) = 0$ и $Y_1 = Y_2 = c$. Тогда среднее число фотонов осциллятора дается очень наглядной формулой

$$\langle c^\dagger c \rangle = \frac{\bar{\gamma}_1 n_1 + \bar{\gamma}_2 n_2}{\bar{\gamma}_1 + \bar{\gamma}_2},$$

сравнение которой с формулой в случае двух взаимодействующих осцилляторов, проясняет роль каждого слагаемого. Потоки энергии от осциллятора к термостатам, определяемые как описано выше, также имеют простые выражения

$$Q_{c-A} = \frac{\bar{\gamma}_1 \bar{\gamma}_2}{\bar{\gamma}_1 + \bar{\gamma}_2} (n_1 - n_2), \quad Q_{c-B} = \frac{\bar{\gamma}_1 \bar{\gamma}_2}{\bar{\gamma}_1 + \bar{\gamma}_2} (n_2 - n_1).$$

Суммарный поток $Q_{c-A} + Q_{c-B}$ при этом равен нулю, но отчетливо виден тепловой поток от горячего термостата к холодному, что подчеркивает преимущества нашего подхода перед «глобальным» подходом. В нашем подходе здесь нет взаимодействия, нет двух подсистем, нет диагонализации «глобального» подхода, а поток от горячего термостата к холодному есть. Еще раз отметим, что используемый метод не привлекает к описанию какое-либо феноменологическое моделирование процессов и явлений, а исходит исключительно из первых принципов и естественного предположения о марковости взаимодействия с термостатами.

Таким образом, мы не только продемонстрировали эффективность метода алгебраической теории возмущений [19] в новом для него классе задач, но и получили непротиворечивые результаты в задаче, которая до сих пор неоднократно обсуждалась в рамках «глобального» и «локального» подходов, неадекватных, на наш взгляд, физической постановке классической задачи о двух резонансно взаимодействующих осцилляторах, каждый из которых также резонансно связан со «своим» термостатом.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Техника вычислений слагаемых эффективного гамильтониана

Удобно операторы взаимодействия с широкополосными полями записать в виде

$$V_c(t) = \gamma_c \sum_{\forall \omega \neq 0} (ce^{-i\omega_c t} + c^\dagger e^{i\omega_c t}) a_\omega e^{-i\omega t},$$

$$a_{-\omega} = a_\omega^\dagger, \quad \omega > 0,$$

$$V_r(t) = \gamma_r \sum_{\forall \omega \neq 0} (re^{-i\omega_r t} + r^\dagger e^{i\omega_r t}) b_\omega e^{-i\omega t},$$

$$b_{-\omega} = b_\omega^\dagger, \quad \omega > 0.$$

Тогда медленно меняющиеся во времени слагаемые имеют вид

$$V'_c(t) = \gamma_c \sum_{\omega \in (\omega_c)} \left(ca_\omega^\dagger e^{i(\omega - \omega_c)t} + c^\dagger a_\omega e^{-i(\omega - \omega_c)t} \right),$$

$$V'_r(t) = \gamma_r \sum_{\omega \in (\omega_r)} \left(rb_\omega^\dagger e^{i(\omega - \omega_r)t} + r^\dagger b_\omega e^{-i(\omega - \omega_r)t} \right).$$

Они определяют операторы первого порядка по константам связи.

Быстро меняющиеся слагаемые можно представить в виде

$$V''_c(t) = \gamma_c \sum_{\forall \omega \notin (-\omega_c)} ca_\omega e^{-i(\omega + \omega_c)t} +$$

$$+ \gamma_c \sum_{\forall \omega \notin (\omega_c)} c^\dagger a_\omega e^{-i(\omega - \omega_c)t},$$

$$V''_r(t) = \gamma_r \sum_{\forall \omega \notin (-\omega_r)} rb_\omega e^{-i(\omega + \omega_r)t} +$$

$$+ \gamma_r \sum_{\forall \omega \notin (\omega_r)} r^\dagger b_\omega e^{-i(\omega - \omega_r)t},$$

где (ω_c) — область размерами $|\omega - \omega_c| \ll \omega_c$ вблизи значения $\omega = \omega_c$, но не меньшая обратной скорости релаксации по данному каналу связи с широкополосным полем. Аналогично определяются области непрерывного спектра $(-\omega_c)$, (ω_r) и $(-\omega_r)$.

Выделение быстро и медленно меняющихся слагаемых в операторе взаимодействия между осцилляторами вообще не вызывает каких-либо особенностей в случае равенства частот осцилляторов $\omega_c = \omega_r$:

$$V'_{c-r}(t) = g (cr^\dagger + c^\dagger r),$$

$$V''_{c-r}(t) = g \left(c^\dagger r^\dagger e^{i(\omega_c + \omega_r)t} + cre^{-i(\omega_c + \omega_r)t} \right).$$

Генераторы преобразования первого порядка находятся из соотношений

$$\frac{dS^{(1,0,0)}(t)}{dt} = -\hbar^{-1} V''_{c-r}(t),$$

$$\frac{dS^{(0,1,0)}(t)}{dt} = -\hbar^{-1} V''_c(t),$$

$$\frac{dS^{(0,0,1)}(t)}{dt} = -\hbar^{-1} V''_r(t).$$

Они являются быстрыми функциями времени. В предположении адиабатического включения взаимодействий генераторы преобразования первого порядка определяются выражениями

$$S^{(1,0,0)}(t) = cr \frac{ge^{-i(\omega_c + \omega_r)t}}{i\hbar(\omega_c + \omega_r)} - c^\dagger r^\dagger \frac{ge^{i(\omega_c + \omega_r)t}}{i\hbar(\omega_c + \omega_r)},$$

$$\begin{aligned} S^{(0,1,0)}(t) &= \gamma_c \sum_{\omega \notin (-\omega_c)} \frac{ca_\omega e^{-i(\omega+\omega_c)t}}{i\hbar(\omega + \omega_c)} + \\ &\quad + \gamma_c \sum_{\omega \notin (\omega_c)} \frac{c^\dagger a_\omega e^{-i(\omega-\omega_c)t}}{i\hbar(\omega - \omega_c)}, \\ S^{(0,0,1)}(t) &= \gamma_r \sum_{\omega \notin (-\omega_r)} \frac{rb_\omega e^{-i(\omega+\omega_r)t}}{i\hbar(\omega + \omega_r)} + \\ &\quad + \gamma_r \sum_{\omega \notin (\omega_r)} \frac{r^\dagger b_\omega e^{-i(\omega-\omega_r)t}}{i\hbar(\omega - \omega_r)}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} [S^{(1,0,0)}(t), V''_c(t)]' &= \frac{g\gamma_c}{i\hbar(\omega_c + \omega_r)} \times \\ &\times \sum_{\omega \in (\omega_r)} ra_\omega^\dagger e^{i(\omega-\omega_r)t} + \frac{g\gamma_c}{i\hbar(\omega_c + \omega_r)} \times \\ &\times \sum_{\omega \in (\omega_r)} r^\dagger a_\omega e^{-i(\omega-\omega_r)t}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [S^{(0,1,0)}(t), V''_{c-r}(t)]' &= \gamma_c g \sum_{\omega \in (\omega_r)} \frac{a_\omega^\dagger r e^{i(\omega-\omega_r)t}}{i\hbar(\omega + \omega_c)} + \\ &+ \gamma_c g \sum_{\omega \in (\omega_r)} \frac{a_\omega r^\dagger e^{-i(\omega-\omega_r)t}}{i\hbar(\omega + \omega_c)}. \end{aligned}$$

В результате в эффективном гамильтониане появляется слагаемое, которое описывает связь однодомового осциллятора частоты ω_r с «чужим» термостатом:

$$\begin{aligned} \tilde{H}^{(1,1,0)}(t) &= -\frac{g\gamma_c}{2\hbar\omega_c} \sum_{\omega \in (\omega_r)} r^\dagger c a_\omega e^{-i(\omega-\omega_r)t} - \\ &- \frac{g\gamma_c}{2\hbar\omega_c} \sum_{\omega \in (\omega_r)} r a_\omega^\dagger e^{i(\omega-\omega_r)t}. \end{aligned}$$

Здесь мы положили $\omega_c = \omega_r \approx \omega$.

Аналогично нетрудно получить

$$\begin{aligned} \tilde{H}^{(1,0,1)}(t) &= -\frac{g\gamma_r}{2\hbar\omega_c} \sum_{\omega \in (\omega_c)} c^\dagger b_\omega e^{-i(\omega-\omega_c)t} - \\ &- \frac{g\gamma_r}{2\hbar\omega_c} \sum_{\omega \in (\omega_c)} b c_\omega^\dagger e^{i(\omega-\omega_c)t}. \end{aligned}$$

Оператор $\tilde{H}^{(0,1,1)}(t)$ описывает связь второго порядка между термостатами, не затрагивающую открытую систему, поэтому далее он не учитывается.

Другие, возможно релевантные, слагаемые второго порядка имеют вид

$$\tilde{H}^{(2,0,0)}(t) = -\frac{i}{2} [S^{(1,0,0)}(t), V''_{c-r}(t)]' = -\frac{g^2}{2\hbar\omega_c} (c^\dagger c + r^\dagger r + 1),$$

$$\tilde{H}^{(0,2,0)}(t) = -\frac{i}{2} [S^{(0,1,0)}(t), V''_c(t)]',$$

$$\begin{aligned} [S^{(0,1,0)}(t), V''_c(t)]' &= \left[\gamma_c \sum_{\omega \notin (-\omega_c)} \frac{ca_\omega e^{-i(\omega+\omega_c)t}}{i\hbar(\omega + \omega_c)} + \gamma_c \sum_{\omega \notin (\omega_c)} \frac{c^\dagger a_\omega e^{-i(\omega-\omega_c)t}}{i\hbar(\omega - \omega_c)}, \gamma_c \sum_{\forall \omega \notin (-\omega_c)} ca_\omega e^{-i(\omega+\omega_c)t} + \right. \\ &+ \left. \gamma_c \sum_{\forall \omega \notin (\omega_c)} c^\dagger a_\omega e^{-i(\omega-\omega_c)t} \right] = \left[\gamma_c \sum_{\omega \notin (\omega_c)} \frac{c^\dagger a_\omega e^{-i(\omega-\omega_c)t}}{i\hbar(\omega - \omega_c)}, \gamma_c \sum_{\forall \omega' \notin (-\omega_c)} ca_{\omega'} e^{-i(\omega'+\omega_c)t} \right] + \\ &+ \left[\gamma_c \sum_{\omega \notin (-\omega_c)} \frac{ca_\omega e^{-i(\omega+\omega_c)t}}{i\hbar(\omega + \omega_c)}, \gamma_c \sum_{\forall \omega' \notin (\omega_c)} c^\dagger a_{\omega'} e^{-i(\omega'-\omega_c)t} \right]. \end{aligned}$$

В результате имеем вклады $\tilde{H}^{(0,2,0)}(t)$ и $\tilde{H}^{(0,0,2)}(t)$ в эффективный гамильтониан,

$$\tilde{H}^{(0,2,0)}(t) = -\gamma_c^2 (c^\dagger c + 1) \sum_{\forall \omega \notin (-\omega_c)} \frac{1}{\hbar(\omega + \omega_c)} - \gamma_c^2 \sum_{\omega \notin (-\omega_c)} \frac{a_\omega^\dagger a_{\omega'} e^{i\omega t} e^{-i\omega' t}}{2\hbar(\omega + \omega_c)} - \gamma_c^2 \sum_{\substack{\omega \notin (-\omega_c) \\ \forall \omega' \notin (-\omega_c)}} \frac{a_{\omega'}^\dagger a_\omega e^{i(\omega'-\omega)t}}{2\hbar(\omega + \omega_c)},$$

а оператор $\tilde{H}^{(0,0,2)}(t)$ получается из $\tilde{H}^{(0,2,0)}(t)$ одновременными заменами нижних индексов и одинаковых операторов $c \rightarrow r$ и операторов широколосного поля $a_\omega \rightarrow b_\omega$. Операторы $\tilde{H}^{(0,2,0)}(t)$ и $\tilde{H}^{(0,0,2)}(t)$ могут быть представлены квантовыми считающими процессами аналогично работе [30, 31, 33]. Эти процессы удовлетворяют другой алгебре дифференциалов Ито [33], обобщающей известную алгебру Хадсона–Партасарата [34]. Если воспользоваться результатами [30, 31, 33] анализа их роли наряду с винеровскими процессами, то можно констатировать, что слагаемыми $\tilde{H}^{(0,2,0)}(t)$ и $\tilde{H}^{(0,0,2)}(t)$ в рассматриваемой здесь постановке задачи следует пренебречь.

ЛИТЕРАТУРА

1. J.-P. Brantut, C. Grenier, J. Meineke, D. Stadler, S. Krinner, C. Kollath, T. Esslinger, and A. Georges, *Science* **342**, 713 (2013).
2. M. Brunelli, L. Fusco, R. Landig, W. Wieczorek, J. Hoelscher-Obermaier, G. Landi, F. L. Semio, A. Ferraro, N. Kiesel, T. Donner, G. De Chiara, and M. Paternostro, *Phys. Rev. Lett.* **121**, 160604 (2018).
3. R. Landig, L. Hruby, N. Dogra, M. Landini, R. Mottl, T. Donner, and T. Esslinger, *Nature* **532**, 476 (2016).
4. S. Krinner, T. Esslinger, and J.-P. Brantut, *J. Phys.: Condens. Matter* **29**, 343003 (2017).
5. M. Josefsson, A. Svilans, A. M. Burke, E. A. Hoffmann, S. Fahlvik, C. Thelander, M. Leijnse, and H. Linke, *Nature Nanotechnol.* **13**, 920 (2018).
6. A. Nitzan and M. A. Ratner, *Science* **300**, 1384 (2003).
7. Y. Dubi and M. Di Ventra, *Rev. Mod. Phys.* **83**, 131 (2011).
8. J. P. Pekola and I. M. Khaymovich, *Ann. Rev. Condens. Matter Phys.* (2018).
9. A. Levy and R. Kosloff, *Phys. Rev. Lett.* **108**, 070604 (2012).
10. A. Roulet, S. Nimmrichter, J. M. Arrazola, S. Seah, and V. Scarani, *Phys. Rev. E* **95**, 062131 (2017).
11. B. Reid, S. Pigeon, M. Antezza, and G. De Chiara, *Europhys. Lett.* **120**, 60006 (2017).
12. A. Hewgill, A. Ferraro, and G. De Chiara, *Phys. Rev. A* **98**, 042102 (2018).
13. S. Scopa, G. T. Landi, and D. Karevski, *Phys. Rev. A* **97**, 062121 (2018).
14. E. B. Davis, *Quantum Theory of Open Systems*, Acad. Press (1976).
15. R. S. Ingarden, A. Kossakowski, and M. Ohya, *Information Dynamics and Open Systems: Classical and Quantum Approach*, Springer, Netherlands (1997).
16. A. Joye, S. Attal, and Cl.-A. Pillet, *Open Quantum Systems I. The Hamiltonian Approach*, Springer-Verlag, Berlin – Heidelberg (2005).
17. G. Schaller, *Open Quantum Systems Far from Equilibrium*, Springer Int. Publ. (2014).
18. И. Г. Ланг, Ю. А. Фирсов, *ЖЭТФ* **43**, 1843 (1962).
19. A. I. Maimistov and A. M. Basharov, *Nonlinear Optical Waves*, Kluwer Acad., Dordrecht (1999).
20. G. Lindblad, *Comm. Math. Phys.* **48**, 119 (1976).
21. V. Gorini, A. Frigerio, M. Verri, A. Kossakowski, and E. C. G. Sudarshan, *Rep. Math. Phys.* **13**, 149 (1978).
22. Н. Н. Боголюбов, В. В. Толмачев, Д. В. Ширков, *Новый метод в теории сверхпроводимости*, Изд. АН СССР, Москва (1958).
23. A. Levy and R. Kozloff, *Europhys. Lett.* **107**, 20004 (2014).
24. A. S. Trushechkin and I. V. Volovich, *Europhys. Lett.* **113**, 30005 (2016).
25. D. F. Walls, *Z. Phys.* **234**, 231 (1970).
26. C. Joshi, P. Ohberg, J. D. Cresser, and E. Andersson, *Phys. Rev. A* **90**, 063815 (2014).
27. V. N. Bogaevski and A. Povzner, *Algebraic Methods in Nonlinear Perturbation Theory*, Springer (1991).
28. В. С. Бутылкин, А. Е. Каплан, Ю. Г. Хронопуло, Е. И. Якубович, *Резонансные взаимодействия света с веществом*, Наука, Москва (1977).
29. W. H. Louisell and L. R. Walker, *Phys. Rev.* **137**, B204 (1965).
30. A. M. Basharov, *Phys. Rev. A* **84**, 013801 (2011).
31. A. M. Basharov, *Phys. Lett. A* **376**, 1881 (2012).
32. C. W. Gardiner and P. Zoller, *Quantum Noise*, Springer-Verlag, Berlin (2004).
33. А. М. Башаров, А. И. Трубилко, *ЖЭТФ* **155**, 425 (2019).
34. R. L. Hudson and K. R. Parthasarathy, *Comm. Math. Phys.* **93**, 301 (1984).